

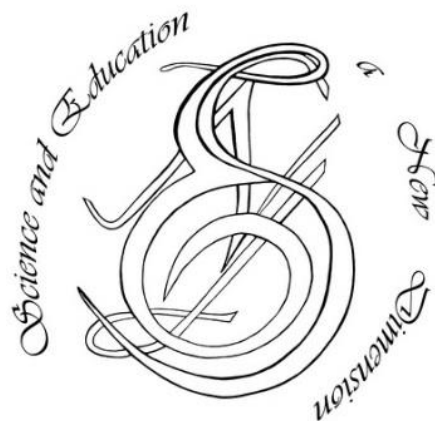
p-ISSN 2308-5258

e-ISSN 2308-1996

Natural and Technical Sciences, IX(33), ISSUE 262, 2021 Dec.

SCIENCE AND EDUCATION A NEW DIMENSION

NATURAL
AND
TECHNICAL SCIENCES



www.seanewdim.com

p-ISSN 2308-5258

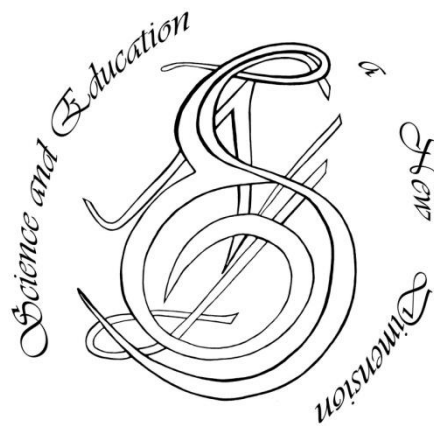
e-ISSN 2308-1996

IX(33), Issue 262, 2021 Dec.

SCIENCE AND EDUCATION A NEW DIMENSION

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-262IX33>

Natural and Technical Sciences



www.seanewdim.com

Editorial board

Editor-in-chief: Dr. Xénia Vámos

Honorary Senior Editor:

Jenő Barkáts, Dr. habil. **Nina Tarasenkova, Dr. habil.**

Andriy Myachykov, PhD in Psychology, Senior Lecturer, Department of Psychology, Faculty of Health and Life Sciences, Northumbria University, Northumberland Building, Newcastle upon Tyne, United Kingdom

Edvard Ayvazyan, Doctor of Science in Pedagogy, National Institute of Education, Yerevan, Armenia

Ferenc Ihász, PhD in Sport Science, Apáczai Csere János Faculty of the University of West Hungary

Ireneusz Pyrzyk, Doctor of Science in Pedagogy, Dean of Faculty of Pedagogical Sciences, University of Humanities and Economics in Wrocław, Poland

Irina Malova, Doctor of Science in Pedagogy, Head of Department of methodology of teaching mathematics and information technology, Bryansk State University named after Academician IG Petrovskii, Russia

Irina S. Shevchenko, Doctor of Science in Philology, Department of ESP and Translation, V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine
Department of Psychology, Faculty of Health and Life Sciences, Northumbria University, Northumberland Building, Newcastle upon Tyne, United Kingdom

Kosta Garow, PhD in Pedagogy, associated professor, Plovdiv University „Paisii Hilendarski”, Bulgaria

László Kótis, PhD in Physics, Research Centre for Natural Sciences, Hungary, Budapest

Larysa Klymanska, Doctor of Political Sciences, associated professor, Head of the Department of Sociology and Social Work, Lviv Polytechnic National University, Ukraine

Liudmyla Sokurianska, Doctor of Science in Sociology, Prof. habil., Head of Department of Sociology, V.N. Karazin Kharkiv National University

Marian Wloshinski, Doctor of Science in Pedagogy, Faculty of Pedagogical Sciences, University of Humanities and Economics in Wrocław, Poland

Melinda Nagy, PhD in Biology, associated professor, Department of Biology, J. Selye University in Komarno, Slovakia

Alexander Perekhrest, Doctor of Science in History, Prof. habil., Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Ukraine

Nikolai N. Boldyrev, Doctor of Science in Philology, Professor and Vice-Rector in Science, G.R. Derzhavin State University in Tambov, Russia

Oleksii Marchenko, Doctor of Science in Philosophy, Head of the Department of Philosophy and Religious Studies, Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Ukraine

Olga Sannikova, Doctor of Science in Psychology, professor, Head of the department of general and differential psychology, South Ukrainian National Pedagogical University named after K.D. Ushynsky, Odesa, Ukraine

Oleg Melnikov, Doctor of Science in Pedagogy, Belarusian State University, Belarus

Perekhrest Alexander, Doctor of Science in History, Prof. habil., Bohdan Khmelnytsky National University in Cherkasy, Ukraine

Riskeldy Turgunbayev, CSc in Physics and Mathematics, associated professor, head of the Department of Mathematical Analysis, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics of the Tashkent State Pedagogical University, Uzbekistan

Roza Uteeva, Doctor of Science in Pedagogy, Head of the Department of Algebra and Geometry, Togliatti State University, Russia

Seda K. Gasparyan, Doctor of Science in Philology, Department of English Philology, Professor and Chair, Yerevan State University, Armenia

Sokuriaynska Liudmyla, Doctor of sociological science. Prof. Head of Department of Sociology. V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Svitlana A. Zhabotynska, Doctor of Science in Philology, Department of English Philology of Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Ukraine

Tatyana Prokhorova, Doctor of Science in Pedagogy, Professor of Psychology, Department chair of pedagogics and subject technologies, Astrakhan state university, Russia

Tetiana Hranchak, Doctor of Science Social Communication, Head of department of political analysis of the Vernadsky National Library of Ukraine

Valentina Orlova, Doctor of Science in Economics, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ukraine

Millousheva-Boykina Dobrinka Vassileva, PhD, assoc. professor at the Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv University „Paisii Hilendarski”

Veselin Kostov Vasilev, Doctor of Psychology, Professor and Head of the department of Psychology Plovdiv University „Paisii Hilendarski”, Bulgaria

Vladimir I. Karasik, Doctor of Science in Philology, Department of English Philology, Professor and Chair, Volgograd State Pedagogical University, Russia

Volodimir Lizogub, Doctor of Science in Biology, Head of the department of anatomy and physiology of humans and animals, Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Ukraine

Zinaida A. Kharitonchik, Doctor of Science in Philology, Department of General Linguistics, Minsk State Linguistic University, Belarus

Zoltán Poór, CSc in Language Pedagogy, Head of Institute of Pedagogy, Apáczai Csere János Faculty of the University of West Hungary

Managing editor:

Diana Barkáts

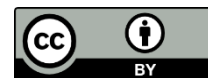
© EDITOR AND AUTHORS OF INDIVIDUAL ARTICLES

The journal is published by the support of Society for Cultural and Scientific Progress in Central and Eastern Europe
BUDAPEST, 2015

Statement:

By submitting a manuscript to this journal, each author explicitly confirms that the manuscript meets the highest ethical standards for authors and co-authors. Each author acknowledges that fabrication of data is an egregious departure from the expected norms of scientific conduct, as is the selective reporting of data with the intent to mislead or deceive, as well as the theft of data or research results from others. By acknowledging these facts, each author takes personal responsibility for the accuracy, credibility and authenticity of research results described in their manuscripts. All the articles are published in author's edition.

The journal is published under Creative Commons Attribution License v4.0



THE JOURNAL IS LISTED AND INDEXED IN:

INDEX COPERNICUS: ICV 2014: 70.95; ICV 2015: 80.87; ICV 2016: 73.35; ICV 2018: 90.25;
ICV 2019: 89.50; ICV 2020: 94.89

GOOGLE SCHOLAR

CROSSREF (DOI prefix:10.31174)

ULRICHS WEB GLOBAL SERIALS DIRECTORY

UNION OF INTERNATIONAL ASSOCIATIONS YEARBOOK

SCRIBD

ACADEMIA.EDU

CONTENT

ANATOMY	7
Median nerve suppression by hypertrophied palmaris longus muscle, a rare anatomic aberration <i>N. Barkáts</i>	7
ENVIRONMENTAL STUDIES	10
Роль прогностичної діагностики в організаційному управлінні процесами раціонального природокористування <i>О. А. Котовенко, О. Ю. Мірошниченко</i>	10
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES	14
Дослідження впливу похибок параметрів шарів просвітлюючих оптичних фільтрів на стійкість їх спектральних характеристик <i>О. Міца, Й. Головач, С. Бересасі, Н. Боркач, Г. Копча-Горячкіна, М. Сичов</i>	14
Physical bases of fiber-optic temperature sensors development with chalcogenide vitreous semi-conductors sensors <i>Ig. Iv. Chychura, S.V. Kutchak, Iv.Iv. Chychura</i>	19
The ω F -covering Subgroups of Finite Groups <i>М. М. Sorokina, D. G. Novikova</i>	22
TECHNICAL SCIENCES	26
Використання техноценологічного підходу для формування ієрархії заходів енергетичної ефективності на підприємствах харчової промисловості України <i>Я. Д. Онищенко, А. І. Замулко</i>	26
Best approximation of periodic functions in the Lebesgue spaces <i>V. Shkapa, I. Zamrii, H. Vlasyk</i>	30

ANATOMY

Median nerve suppression by hypertrophied palmaris longus muscle, a rare anatomic aberration

N. Barkáts

Paper received 10.09.21; Accepted for publication 26.09.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-262IX33-01>

Abstract. The palmaris longus muscle (PLM) is considered to be a phylogenetically degenerate muscle. For many authors, this may be the cause of its great variability. The loss of function in the PLM makes it an important muscle in plastic and reconstructive surgery. During a study of PLM agenesis rate in the Hungarian population, a 19-year-old male showed an unusual patterns of muscles in his forearms, which were found to be a hypertrophied PLM. The hypertrophied muscle was causing symptoms of median nerve compression.

Keywords: *palmaris longus, median nerve compression, muscle hypertrophy, muscle anomaly.*

Introduction. By many authors, the palmaris longus muscle (PLM) is described as a phylogenetically degenerate muscle, since the human hand can perfectly function even with the complete absence of the muscle. This is considered as the main reasons for its great variability and frequent absence. The human hand can function perfectly without this muscle and thus its absence or variation in shape and structure usually doesn't affect the proper function of the hand [4]. The PLM is currently one of the most variable muscles in the human body; its described variations include: agenesis, the most frequent anatomical variation [18], reversed PLM [20], double PLM [13], variation in location [18], and many others.

The loss of function of the PLM and its superficial location, easy accessibility and the fact that the muscle is fully developed at birth and can be used as tendon donor muscle in any age group, make it the first-choice donor muscle for tendon grafts in plastic and reconstructive surgery, and have also allowed it to become probably the most variable muscle in the human body [2–6, 24, 25].

Unfortunately, different variations and anomalies of the PLM may be the cause of pathologies of the forearm, like median or ulnar nerve compression. The literature review showed that the pathologies mentioned above primarily develop in cases when the muscular part of the PLM is located distally, and that if this is accompanied by another anomaly like bifid muscle, accessory muscle, hypertrophy of the muscular part then the chance of the development of the pathology seems even higher. Hypertrophy of the muscle, or its anomalous position also may cause pathologies, like nerve entrapments, or nerve compressions which lead to inflammation and constant, or periodically reoccurring pain in patients [1, 5, 9, 16, 22, 23, 26].

According to literature review, the following variations and anomalies of the PLM may cause pathologies of the forearm: reverse PLM, reverse PLM with multiplication of muscular part (bifid, or 3-headed PLM), accessory PLM, accessory muscles taking their origin from the tendinous part of the PLM [5, 9, 11, 16, 17, 19, 22, 23, 26].

All the facts mentioned above serve as evidence for the importance of all possible information regarding the variations, anomalies and pathologies caused by PLM in orthopaedics, plastic, and reconstructive surgery. The article presents a case report of PLM hypertrophy, according to searches done in Google Scholar and PubMed; this is a quite uncommon anomaly of the PLM.

Case report. A study on the prevalence or absence of the PLM was carried out among Hungarian students in Budapest. One of the examined students (a 19-year old male) showed an unusual muscular pattern in his both hands. During a more detailed visual examination and palpation done while the patient was performing the Thompson's et al. [24], Schaeffer's [21], Pushpakumar's et al. [15], Mishra's 1, Mishra's 2 [12], Gangata's [8] and Hiz-Ediz et al. [10] tests, it was established that the patient had severe hypertrophy of the PLM.

1. Thompson's: the patient is asked to make a fist, then flex the wrist and finally the thumb is opposed and flexed over the fingers. (Fig 1) [24].



Fig. 1.

2. Shaffer's: the patient is asked to oppose the thumb to the little finger and then flex the wrist. (Fig 2.) [21].



Fig. 2.

3. Pushpakumar's: the patient is asked to fully extend the index and middle finger, the wrist and other fingers are flexed and finally the thumb is fully opposed and flexed (Fig 3.) [15].



Fig. 3.

4. Mishra's 1: metacarpo-phalangeal joints of all fingers are passively hyperextended by the examiner and the patient is asked to actively flex the wrist (Fig 4.) [12].

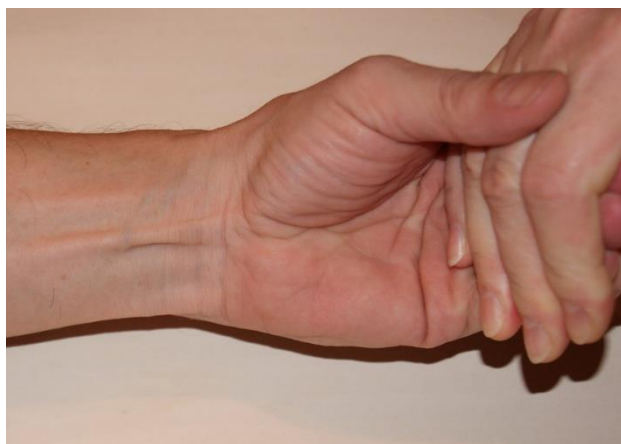


Fig. 4.

5. Mishra's 2: The patient is asked to abduct the thumb against resistance with the wrist in slight palmar flexion (Fig 5.) [12].



Fig. 5.

6. Hiz-Ediz test: performed by applying resistance to flexion of fingers and wrist while all fingers were at the opposite position with the wrist at slight flexion (Fig 6.) [10].



Fig. 6.

The muscles appeared as a strong protrusions under the skin of the forearm leading to the distal end of forearm and ending almost over the retinaculum flexorum. A short less than 1 cm-long tendinous part could be palpated over the retinaculum flexorum in both forearms of the patient..

The muscles in both hands had unusually prominent and strong muscular parts that could be easily palpated all the way to the middle of the upper quarter of the forearm .

During the examination the patient showed symptoms of median nerve compression, complaining about a twinge in the middle and index finger and wrist, and also about strong stabbing pain which appeared when the patient tried to flex his fingers, and form a fist.

Because of the symptoms described above the patient was advised to visit a specialist.

Discussion. During the investigation of the described case, there was no opportunity to examine the patient with ultrasound, magnetic resonance imaging or computed tomography, so we can only rely on the results of visual evaluation and palpation. Though the patient most likely had hypertrophy of the Palmaris longus muscle, since the PLM has a large number of variations it would be unwise to exclude some other variations of the muscle. In literature we can find certain cases which produce similar pathologies or analogous shapes to those which were described in this case. The article by Paraskevas et al. [14] describing a failure of PLM duplication appears to be a case similar to this one. Zeiss and Jakab [27] describe the case of an anomalous muscle originating from the PLM tendon, in which the patient shows very similar symptoms to this one. In the report presented by Acikel et al. [1] a reversed 3-headed and hypertrophied PLM with an extension of Guyon's canal causes effort-related compression of median and ulnar nerves.

Unfortunately many of the variations of the PLM have a negative influence on the functionality of hand by causing nerve compression and thus producing unpleasant and painful symptoms [1, 2, 5, 6, 9, 11, 16,

17, 19, 22, 23, 26], as happened in this case. Usually symptoms caused by different variations of the PLM can be relieved.

REFERENCES

1. Acikel C, Ulkur E, Karagoz H, Celikoz B (2007) Effort-related compression of median and ulnar nerves as a result of reversed three-headed and hypertrophied palmaris longus muscle with extension of Guyon's canal. *Scan J Plast Reconstr Surg Hand Surg*, 41: 45–47.
2. N. Barkáts (2014) Hypertrophy of palmaris longus muscle, a rare anatomic aberration, *Folia Morphol.* Vol. 74, No. 2, pp. 262–264. DOI: 10.5603/FM.2015.0040
3. Barkáts N, Nagy M (2013) Agenesis of palmaris longus muscle in representatives of Hungarian population of Slovakia. *Science Education New Dimension*, 2: 184–187.
4. Ceyhan O, Mavt A (1997) Distribution of agenesis of Palmaris longus muscle in 12 to 18 years old age groups. *Indian J Med Sci*, 51: 156–160.
5. Cope JM, Looney EM, Craig CA, Gawron R, Lampros R, Mahoney R (2009) Median nerve compression and the reversed palmaris longus. *Int J Anat Variations*, 2: 102–104.
6. De Smet L (2002) Median and ulnar nerve compression at the wrist caused by anomalous muscles. *Acta Orthopædica Belgica*, 68: 431–438.
7. Enye LA, Saalu LC, Osinubi AA (2010) The prevalence of agenesis of palmaris longus muscle amongst students in two lagos-based medical schools. *Int J Morphol*, 28: 849–854.
8. Gangata H (2009) The clinical surface anatomy anomalies of the palmaris longus muscle in the Black African population of Zimbabwe and a proposed new testing technique. *Clin Anat*, 22: 230–235.
9. Green MB (2006) Median nerve compression at the wrist caused by a reversed palmaris longus muscle. *Int J Surg*, 7: 9.
10. Hiz Ö, Ediz L, Fethi Ceylan M, Gezici E, Gülcü E, Erden M (2011) Prevalence of the absence of palmaris longus muscle assessed by a new examination test (Hiz-Ediz Test) in the population residing in the area of Van, Turkey. *J Clin Experimental Investigations*, 2: 254–259.
11. Lal RA, Raj S (2009) Guyons canal syndrome due to accessory palmaris longus muscle: aetiological classification: a case report. *Cases J*, 2: 9146.
12. Mishra S (2001) Alternative tests in demonstrating the presence of palmaris longus. *Indian J Plast. Surg*, 34: 12.
13. Park MJ, Namdari S, Yao J (2010) Anatomic variations of the palmaris longus muscle. *Am J Orthop*, 39: 89–94.
14. Paraskevas G, Tzaveas A, Natsis K, Kitsoulis P, Spyridakis I (2008) Failure of palmaris longus muscle duplication and its clinical application. *Folia Morphol*, 67: 150–153
15. Pushpakumar SB, Hanson RP, Carroll S (2004) The 'two finger' sign. Clinical examination of palmaris longus (PL) tendon. *Br J Plast Surg*, 57: 184–185.
16. Regan PJ, Roberts JO, Bailey BN (1988.) Ulnar nerve compression caused by a reversed palmaris longus muscle. *SJ Hand Surg Br*, 13: 406–407.
17. Regan PJ, Feldberg L, Bailey BN (1991) Accessory palmaris longus muscle causing ulnar nerve compression at the wrist. *J Hand Surg Am*, 16: 736–738.
18. Reimann AF, Daseler EH, Anson BJ, Beaton LE (1944) The palmaris longus muscle and tendon. A study of 1600 extremities. *Anat Rec*, 89: 495–505.
19. Robinson D, Aghasi MK, Halperin N (1989) Ulnar tunnel syndrome caused by an accessory palmaris muscle. *Orthop Rev*, 18: 345–347.
20. Salgado G, Cantin M, Inzunza O, Munoz A, Saez J, Macuer M (2011) Bilateral reversed palmaris longus muscle: a rare anatomical variation. *Folia Morphol*, 71: 52–55.
21. Schaeffer JP (1909) On the variations of the palmaris longus muscle. *Anat Rec*, 3: 275–278.
22. Schlafly B, Lister G (1987) Median nerve compression secondary to bifid reversed palmaris longus. *J Hand Surg Am*, 12: 371–373.
23. Schuurman AH, van Gils AP (2000) Reversed palmaris longus muscle on MRI: report of four cases. *Eur Radiol*, 10: 1242–1244.
24. Thompson JW, McBatts J, Danforth CH (1921) Hereditary and racial variations in the musculus palmaris longus. *Am J Phys Anthropol*, 4: 205–220.
25. Wehbe MA (1992) Tendon graft donor sites. *J Hand Surg Am*, 17: 1130–1132.
26. Yildiz M, Sener M, Aynaci O (2000) Three-headed reversed palmaris longus muscle: a case report and review of the literature. *Surg Radiol Anat*, 22: 217–219.
27. Zeiss J, Jakab E (1995) MR demonstration of an anomalous muscle in a patient with coexistent carpal and ulnar tunnel syndrome. Case report and literature summary. *Clin Imaging*, 19: 102–105.

ENVIRONMENTAL STUDIES

Роль прогностичної діагностики в організаційному управлінні процесами раціонального природокористування

О. А. Котовенко*, О. Ю. Мірошниченко

Київський національний університет будівництва і архітектури
Corresponding author. E-mail: kotovenko_ea@ukr.net

Paper received 12.12.21; Accepted for publication 22.12.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-262IX33-02>

Анотація. В роботі розглянута та обґрунтована можливість використання прогностичної функціональної діагностики в системі організаційного управління процесами раціонального природокористування в регіональних екосистемах. На основі системного підходу визначено структуру та спосіб побудови діагностичної системи як підсистеми загальної системи організаційного управління природокористуванням у регіоні. Запропонований підхід дасть можливість не тільки діагностувати зародження передкризових і кризових ситуацій в компонентах екосистеми та виявити їх генезис, але й за рахунок цього попередити розвиток кризових ситуацій в регіональних екосистемах.

Ключові слова: прогностична діагностика, організаційне управління, раціональне природокористування, регіональна екосистема.

Вступ. Перехід до сталого розвитку на глобальному рівні обумовлений лише за умов раціонального природокористування та збереження необхідної якості навколишнього природного середовища як на національному, так і на регіональному та місцевому рівнях. Відповідно, задоволення потреб в природних ресурсах повинно узгоджуватись з екологічними, економічними та соціальними складовими еволюції, коли техногенне навантаження не перевищує можливість навколишнього середовища (екосистеми) до самовідновлення. Тобто суспільство повинно усвідомити перевагу екологічних пріоритетів над іншими. В наш час одним із основних напрямків стратегії вирішення цих питань є створення системи організаційного управління природокористуванням. Важливу роль у вирішенні цієї стратегічної задачі відіграє дослідження і визначення умов і механізмів еколого-безпечного природокористування на рівні регіонів і регіональних екосистем.

Однією із складових при вирішенні цієї проблеми є динамічні процеси. При цьому для визначення методів і принципів вирішення такої задачі необхідне обґрунтування і визначення результуючих умов. Важливою складовою в цьому питанні є динамічні процеси, які пов'язані з природокористуванням взагалі і збалансованим природокористуванням зокрема, а також існуючими техногенними навантаженнями на компоненти екосистеми регіону. В наш час на навколишнє природне середовище здійснюється широкий спектр впливів, які постійно змінюються і можуть стати основою для виникнення і розвитку деградаційних процесів, зародження і розвитку кризових екологічних ситуацій аж до екологічних катастроф.

Короткий огляд публікацій з теми. Аналіз джерел наукової літератури показав, що на сьогодні прогностичне функціональне діагностування з попередженням та усуненням передаварій в основному застосовується при створенні систем керування технічними об'єктами як невід'ємна частина оптимального управління. В свою чергу системний підхід до дослідження еволюційних процесів в регіональних екосис-

темах надає можливість створити систему функціональної прогностичної діагностики і попередження розвитку передкризових і кризових ситуацій в екосистемі, а також виникнення екологічних катастроф.

Мета. Метою роботи є обґрунтування ролі та визначення структури прогностичної функціональної діагностики в системах організаційного управління природокористуванням у регіонах.

Матеріали і методи. Управління – це здійснення певних цілеспрямованих дій на об'єкт чи систему. В той же час обов'язковою частиною будь-якого процесу управління є контроль. Він полягає в одержанні та обробці даних результатів управління з метою виявлення подій, які визначають дії управління. Побудова програм оптимальної перевірки в розумінні екстремумів тієї чи іншої функції аналогічна організації відповідного оптимального процесу управління, результатом якого є визначення стану об'єкта. Крайній випадок складають об'єкти при перевірці стану яких подання дій управління не проводиться (оскільки це непотрібно або недопустимо). Результати перевірки стану об'єкту необхідні для активного впливу на процеси, що проходять в екосистемах під впливом техногенного навантаження, а також попередження виходу системи в передкризовий та кризовий стан. Основна мета діагностики полягає у визначенні стану в першу чергу складних об'єктів і систем. Це відповідає організації більш складного процесу управління, який містить в собі процес перевірки стану системи та її компонентів. Системи, що реалізують такий процес управління і мають в якості нижчого рівня ієрархії систему перевірки станів, в яких може знаходитись система, називають діагностичними системами управління.

Основою прогностичної функціональної діагностики є поточне діагностування, яке визначає стан об'єкта в деякий момент його функціонування і надає можливість прогнозувати зміну цього об'єкту чи процесу. Воно проводиться за реальними сигналами, тобто параметрами, що надходять з об'єкту, і надає можливість виявити порушення правильності функці-

онування екосистеми і негайно реагувати. Цей метод також надає можливість в реальному масштабі часу, а також в динаміці еволюційного розвитку екосистеми та процесу організаційного управління екосистемою:

- визначати порушення в окремих компонентах екосистеми;
- виникнення передкризових ситуацій,
- попередити переростання передкризових ситуацій в кризові;
- застосувати опосередковані параметри для ідентифікації стану об'єкта та процесу;
- вирішувати задачі поточного аналізу, прогнозу і генезису ситуацій, які складаються в процесі розвитку екосистеми під дією антропогенного навантаження;
- встановити імовірність розвитку техногенних передкризових ситуацій і перехід їх у кризові ситуації;
- ідентифікувати джерело зародження і виникнення негативних процесів і передкризових ситуацій;
- передбачити дії при виникненні тих чи інших передкризових ситуацій в екосистемах;
- негайно реагувати на ситуації, які виникають на джерелах техногенезу, аж до переходу на інший режим функціонування цих джерел, що дає можливість зберігати стабільне (збалансоване) функціонування екосистеми;
- реалізувати систему, побудовану на цих передумовах, у вигляді програмного забезпечення;
- використовувати дані моніторингової системи як базу інформаційну систему.

Системний ієрархічний структурно-функціональний аналіз регіону включає такі етапи:

1. визначення класу до якого відноситься регіон (ранжування);
2. визначення техногенно-антропогенного наповнення регіону (тобто його структури, переліку джерел техногенезу);
3. ранжування джерел техногенезу за їх потенційною небезпекою;
4. визначення екологічних ситуацій, які виникають в регіоні;
5. визначення ієрархії виникаючих екологічних ситуацій;
6. визначення взаємозв'язку цих ситуацій.

Виникаючі ситуації можна паспортизувати і ранжувати таким чином: вид ситуації (в чому вона полягає); причина виникнення ситуації; ступінь небезпеки при виникненні даної ситуації; вплив даної ситуації на можливість виникнення інших передкризових і кризових ситуацій і на всю регіональну систему в цілому; ієрархічний зв'язок між можливими ситуаціями (декомпозиція множини всіх ситуацій на основні ситуації і підситуації); можливі способи і засоби усунення розвитку ситуації, що виникла (дії при її виникненні).

При організації діагностування складних багатокомпонентних систем, таких як екосистеми, потрібно враховувати такі фактори: складну фізичну, фізико-хімічну природу процесів і ситуацій, що виникають в компонентах об'єкта; значну кількість точок контролю; неможливість у ряді випадків точного математич-

ного опису процесу виникнення певних небезпечних ситуацій на об'єкті діагностування; швидкість протікання процесів, що можуть призвести до деградації у компонентах навколишнього природного середовища та інше. В таких умовах найбільш перспективним методом є використання послідовних методів як в організації системи діагностування в цілому, так і при вирішенні задач діагностування окремих ситуацій.

Результати і їх обговорення.

В структурному плані реалізація послідовних процедур діагностування полягає в широкому використанні попередньої обробки інформації. Актуальним є розвиток та подальше удосконалення обробки діагностичної інформації і послідовного аналізу. Ефективність обробки діагностичної інформації залежить не тільки від кількості контрольованих точок, складності математичних описів, що застосовуються для діагностування, але і від характеристик самих засобів діагностування, їх швидкодії, об'єктів та алгоритмів обробки інформації, що використовуються.

Кількісна оцінка дійсних антропогенних змін в екосистемах може бути отримана на основі аналізу інтегральних функцій, що відображають взаємозв'язки ситуацій. Вибір множини показників, які характеризують конкретні ситуації в декомпозованій моделі розвитку передкризових і кризових ситуацій в регіональній екосистемі проводиться таким чином. Проводиться аналіз кожної ситуації ситуаційного графу ікографічної моделі регіональної екосистеми, розглядається можливість ідентифікації кожної ситуації за допомогою вимірюваних на об'єкті параметрів, які характеризують його стан. Тобто:

- Множині ситуацій повинна відповідати множина вимірюваних параметрів за допомогою яких ідентифікується розглядувана ситуація.
- Вибір критерію ідентифікації проводиться на основі емпіричних даних, апостеріорної інформації відносно системи посилок надійності, швидкості і монотонності зміни сигналу (параметрів).
- Ситуації необхідно аналізувати відносно особливостей конкретної екосистеми, специфіки розвитку процесів, ландшафтної специфіки розвитку процесів, ландшафтної специфіки і технічного наповнення регіональної екосистеми.
- Ситуації повинні бути проаналізовані відносно специфіки еволюції процесів, що відбуваються в регіоні, і відносно приладів і обладнання, що використовуються для визначення значень параметрів, виходячи із ступені їх надійності і придатності. Це може бути найбільший за абсолютною величиною сигнал. За надійністю вибирається сигнал з відсутністю значного шуму.
- Одним з визначальних факторів при виборі параметрів для формалізації моделі є швидкість сигналу. Оскільки перехідні процеси в екосистемі по каналу дії техногенного навантаження проходять від кількох хвилин (повітря) до років (грунти), достатньо враховувати динаміку самих підсистем, вимірювального приладу або методу вимірювання та механізму вироблення та здійснення стабілізуючих заходів. За монотонністю динамічних характеристик швидкість зміни сигналу достатньо точно оцінюється величиною запізнення постійної часу. Серед параметрів за безі-

нерційністю на перше місце можна поставити концентрацію забруднювачів у повітрі, на останнє – ґрунти і підземні води.

Параметри, що вимірюються, повинні характеризувати динамічний процес техногенезу.

Для характеристики кожної конкретної ситуації визначаються прямі і опосередковані показники (бажано по три показники на кожну ситуацію).

Для перевірки достовірності виникнення тієї чи іншої ситуації пропонується використовувати класичний принцип «два з трьох». Цей принцип полягає в такому: якщо ситуація підтверджується двома з трьох показників, що її характеризують, то виникнення відповідної ситуації достовірно.

Під ситуацією розуміють деяку область станів діагностованої системи, що відрізняється значенням цільових показників. Ціль аналізу – визначення якомога більш повної множини ситуацій, знаходження в яких суттєво впливає на якість функціонування діагностичної системи.

Виконання кожного виду аналізу рекомендується проводити за такою схемою:

I. Задачі натурного аналізу

1) виділення кількісних показників для головних і основних цілей;

2) деревовидна деталізація головних і основних цілей по елементах організації моделей з виділенням кількісних показників;

3) встановлення діапазонів значень для кількісного аналізу показників елементів цільової компоненти системи функціональної діагностики;

4) опис взаємозв'язку окремих цільових показників.

II. Інформаційний аналіз

1) опис документів та повідомлень, який представляє собою інформаційний інструмент діагностування;

2) опис структури документів та їх елементів, показників, відношень, об'єктів.

III. Задачі ситуаційного аналізу

1) багаторівневі класифікації станів процесу функціонування у просторі показників функціонування, в тому числі цільових (фактичних і прогнозованих);

2) встановлення відповідності «ситуація – інформаційний елемент» для ув'язування економічних ефектів втрат з елементами втрат діагностування ситуацій;

3) опис алгоритмічних моделей ситуацій для використання їх як організаційної компоненти системи функціональної діагностики;

4) ситуаційний підхід до діагностування полягає в тому, що основною характеристикою системи функціональної діагностики (СФД) є те, які ситуації СФД може розпізнавати (контролювати) і які реакції виробляються системою для кожного конкретного класу ситуацій;

5) діагностування – це цілеспрямований процес збору інформації про об'єкт, що надходить як від вимірювального обладнання, так і від персоналу і служить для таких задач: ідентифікація ситуацій, в яких перебуває система в даний момент часу; прийняття рішень про відповідність поточного стану раніш прийнятим обмеженням (дисциплінуючим умовам), тобто аналіз; оцінки стану, в який перейде система; виробки оперативних рішень.

Ситуації, які не формалізуються, можна ідентифікувати за рахунок аналізу процесів, що знаходяться на нижчому за ієрархією рівні та формалізовані. Для визначення таких ситуацій пропонується застосовувати метод «прогнозна ідентифікація».

Метод ідентифікації ситуацій з використанням прогнозу є, по суті, методом визначення в реальному масштабі часу перехідної функції процесу. Він дозволяє на кожному інтервалі діагностування визначити вектор параметрів для характеристики ситуації вищої за ієрархією. Перехідні процеси між ситуаціями можуть бути описані за допомогою екологічних моделей міграції забруднювачів у компонентах навколишнього середовища. Для прогнозна ідентифікації можна застосовувати моделі міграційних процесів, які при невеликих модифікаціях для умов конкретного регіону не тільки дають можливість ідентифікації ситуації, але й надають інформацію з попередженням.

Висновок. Включення прогнозна функціональної діагностики у систему організаційного управління природокористуванням в регіональній екосистемі надає можливість вдосконалення і підвищення ефективності охорони навколишнього середовища, зниження ризику виникнення передкризових і кризових ситуацій, які можуть виникати внаслідок техногенних навантажень на екосистему, стабілізації стану навколишнього природного середовища, вирішення задачі раціонального природокористування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гуляев В.А. Методы и средства обработки диагностической информации в режиме реального времени /В.А. Гуляев, И.М. Чаплыга, И.В. Кедровский – Киев: Наукова думка, 1986. 222 с.
2. Потехин Г.С. Технические средства управления химическим производством /Г.С. Потехин, М.С. Прохоров, И.И. Терещенко // ЖВХО им. Менделеева - т. XXXV, № 4, 1995. с. 455-461
3. Котовенко Е.А. Автоматизированное предупреждение аварийных ситуаций при управлении агрегатом синтеза аммиака / Е.А. Котовенко, Г.А. Статюха, А.В. Федоров // Международная научно-техническая конференция «Комплексная автоматизация промышленности» - Wydawnictwo Politec. Wroclaw. 1991. p.125-126
4. Заграй Я.М. Системный структурно-функциональный анализ в дослідженні регіональних промислових екосистем /Я.М. Заграй, О.А. Котовенко, О.Ю. Мірошніченко О.Ю. //ж. Екологія довкілля і безпека життєдіяльності. Київ : Знання, 2009. №6. С.61-68
5. Котовенко О.А. Метод функціональної прогнозаційної діагностики як інструмент попередження екологічних катастроф / О.А.Котовенко, О.Ю.Мірошніченко //Зб. наук. статей 7 міжнародної конференції «Комп'ютерне моделювання в хімії і технологіях та системах сталого розвитку», Київ. 2009. с. 285-289

REFERENCES

1. Gulyaev V.A. Metody i sredstva obrabotki diagnosticheskoy informacii v rejime realnogo vremeni /V.A.Gulyaev, I.M.Chaplyga. I.V.Kedrovskiy – Kiev: Naukova dumka, 1986. 222 s.
2. Potekhin G.S. Tekhnicheskie sredstva upravleniya khimicheskim proizvodstvom / G.S. Potekhin, I.I.Tereshchenko //JVCHO im. Mendeleeva – t. XXXV, № 4,1995. s. 455-461
3. Kotovenko E.A. Avtomatizirovannoe preduprezhdenie avariynykh situaciy pri upravlenii agregatom sinteza ammiaka /E.A.Kotovenko, G.A.Statyukha, A.V.Fedorov //Mezhdunarodaya nauchno-tekhnicheskaya konferenciya “Kompleksnaya avtomatizatsiya promishlennosti” - Wydawnictwo Politec. Wroclaw. 1991. p.125-126
4. Zagray Ya.M. Sistemnyi struktarno-funkcionalniy analiz v doslidzhenni regionalnikh ekosistem /Ya.M.Zagray, O.A.Kotovenko, O.Yu.Miroshnychenko //j. Ekologiya dovkillya I bezpeka zhittyediyalnosti. Kyiv: Znannya, 2009. №6. s. 61-68
5. Kotovenko O.A. Metod funktsionalnoi diagnostiki yak instrument poperedzhennya ekologichnikh katastrof /O.A.Kotovenko. O.Yu.Miroshnichenko //zb. nauk. statey 7 mizhnarodnoyi konferenciyi “Komputerne modeljuvannya v chimii I tekhnologiyah ta sistemakh stalogo rozvitku”, Kyiv. 2009. c. 285-289

The prognostic diagnostics role in the organizational management of environmental rational use nature processes

O. A Kotovenko, O. Yu. Miroshnychenko

Abstract. The paper considers and substantiates the possibility of using prognostic functional diagnostics in the system of organizational management of environmental rational use nature processes in regional ecosystems. Based on the system approach, the structure and method of building a diagnostic system as a subsystem in the general system of organizational management of nature management in the region are determined. The proposed approach will allow not only to diagnose the emergence of pre-crisis and crisis situations in the ecosystem components and identify their genesis, but also to prevent the crisis situations development in regional ecosystems.

Keywords: *prognostic diagnostics, organizational management, rational nature management, regional ecosystem.*

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Дослідження впливу похибок параметрів шарів просвітлюючих оптичних фільтрів на стійкість їх спектральних характеристик

О. Міца¹, Й. Головач², С. Бергсасі², Н. Боркач¹, Г. Копча-Горячкіна¹, М. Сичов¹

¹Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

² Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Paper received 20.09.21; Accepted for publication 08.10.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-262IX33-03>

Анотація. У статті описано застосування методу Монте-Карло для дослідження стійкості спектральних характеристик різних типів антивідбиваючих фільтрів на основі плівок з низьким (Н) та високим (В) показниками заломлення. Для опису помилок під час осадження плівок був прийнятий нормальний закон розподілу. Для ширококугових фільтрів типу S-2Н2В..2ВН2В було показано, що спектральні характеристики найбільш чутливі до похибок показника заломлення компонентів з низьким показником заломлення.

Ключові слова: багатошарові оптичні покриття, метод Монте-Карло, коефіцієнт пропускання, ширококугові фільтри, стійкість спектральних характеристик.

Мета виконання аналізу стійкості – отримання інформації про розсіювання спектральних характеристик, що виникають при варіаціях параметрів шарів. Як правило, при виготовленні оптичного покриття вдається лише з певною точністю отримати обчислені значення показників заломлення і товщини шарів. Тому дуже важливо оцінити, при якому відхиленні цих значень характеристики покриття виявляються нечутливими або малочутливими до відхилень параметрів шарів від номінальних значень. У такому разі при промисловому виробництві більш надійно можна отримувати вироби з характеристиками, які були закладені в них при проектуванні. Якщо ж якась характеристика покриття виявляється дуже чутливою до зміни деяких параметрів, то слід ретельніше дослідити її стійкість. Крім розв'язання основної задачі аналізу стійкості, пов'язаної з оцінкою чутливості спектральних характеристик покриття до збурень параметрів шарів, аналіз стійкості дозволяє оцінити чутливість характеристик при зміні параметрів навколишніх середовищ [1], а також полегшує внесення необхідних коректив у структуру покриття, що проектується.

Усю сукупність факторів, що впливають на характеристики покриття, можна розділити на дві групи [2]. До першої групи належать фактори, пов'язані з нестабільністю процесу виготовлення шарів покриття. Нестабільність процесу виготовлення покриття є наслідком поганого контролю таких технологічних параметрів, як температура нагріву підкладок, тиск залишкових газів у напилуючій камері, швидкість випаровування і конденсації плівкового матеріалу та ін. У свою чергу, це може призвести до зміни дисперсійної залежності показника заломлення одержуваних шарів при появі неоднорідності. Вплив цієї групи факторів, у принципі, може бути враховано в рамках описаної математичної моделі покриття. При цьому аналіз стійкості характеристик покриття виконується шляхом багаторазового розв'язання прямої задачі з використанням моделей різної точності. До другої групи належать фактори, пов'язані з контролем параметрів шарів, насамперед їх товщини, у процесі виготовлення покриття. Ця

частина проблеми розв'язується за допомогою комп'ютерного моделювання процесу контролю товщини шарів [3]. У ході моделювання вдається врахувати помилки у визначенні товщини шарів, обумовлені обмеженою чутливістю використовуваної контрольно-виміральної апаратури, оцінити допуски і вибрати раціональний спосіб контролю. Це дозволяє звести до мінімуму можливі експериментальні помилки і тим самим скоротити шлях від розрахунку конструкції покриття до її практичної реалізації.

Найпростішим варіантом зробити оцінку стійкості спектральних характеристик до можливих похибок параметрів шарів можна, знаючи значення функції якості покриття $F(x)$, за формулою [4]:

$$\Delta F = \sum_{j=1}^{2N} \Delta x_j \frac{\partial F(x_j^0)}{\partial x_j},$$

де N – кількість шарів, x_j^0 та Δx_j – номінальне значення та похибка j -го параметру.

Тоді оцінити степінь розсіювання спектральних характеристик можна за величиною ΔF . Характер розподілу помилок, що виникають при визначенні товщини шарів багатошарових покриттів, у вирішальній мірі залежить від методу контролю, використовуваного при виготовленні покриття. Якщо ж помилки у визначенні товщини шару великі й аналіз за допомогою часткових похідних не дає адекватних результатів, то оцінка розсіювання спектральних характеристик багатошарового оптичного покриття проводиться за допомогою методу Монте-Карло.

Розглянемо загальну схему роботи методу Монте-Карло [1], [5]-[12] і застосуємо його для визначення стійкості спектральних характеристик ширококугових просвітлюючих покриттів. Відзначимо, що при дослідженні бралось за основу припущення, що похибка параметрів шарів має нормальний розподіл.

Розглянемо покрокову роботу наведеного методу (рис. 1). На першому кроці вводиться необхідна інформація про багатошарову оптичну систему. Це N – кількість шарів, n_j та d_j – значення показника залом-

лення та геометричної товщини j -го шару, а також k – кількість проведених обчислювальних експериментів.

Спектральні характеристики будемо знаходити за допомогою методу Абеле [1]. Функцією якості покриття було вибрано середньозважене відхилення за сумою модулів

$$F(\vec{n}, \vec{d}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |1 - T(\vec{n}, \vec{d}, \lambda_i)|, \quad (1)$$

де $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ та $\vec{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N)$ – вектори параметрів шарів, $[\lambda_1, \lambda_2]$ – розглядуваний спектральний діапазон, L – число точок сітки спектрального інтервалу від λ_1 до λ_2 .



Рисунок 1. Блок-схема роботи методу Монте-Карло при дослідженні чутливості параметрів шарів оптичних структур до похибок

На другому кроці встановлюється, що розглядається перший шар і номер дослідів рівний 1.

На третьому кроці відбувається генерація випадкового числа. Випадкові числа, які розподілені за нормальним законом можна отримати на основі центральної граничної теореми. Сума n незалежних однако-

во розподілених випадкових величин з математичним сподіванням M і дисперсією σ розподілена асимптотично нормально при $n \rightarrow \infty$ з математичним сподіванням nM та дисперсією $n\sigma$. На практиці n береться рівним 12.

На четвертому кроці значення параметру шару виражається через отримане за нормальним розподілом випадкове число. Воно змасштабоване таким чином, що для показника заломлення буде знаходитись у межах $[n_j - 0.05, n_j + 0.05]$, а для геометричної товщини – у межах $[d_j - 2, d_j + 2]$.

На п'ятому кроці розраховуються коефіцієнти пропускання при новому значенні зміненого параметру в кожній точці сітки спектрального інтервалу й обчислюється відповідне значення функції якості покриття $F_i(x)$, де i – номер дослідів.

На шостому кроці додаємо до сум обчислені значення $F_i(x)$

$$\sum_i F_i, \sum_i F_i^2. \quad (2)$$

які в кінці використаємо для знаходження математичного сподівання та дисперсії.

На сьомому кроці перевіряється умова виконання запланованого числа дослідів. Якщо ця умова виконується, то обчислюються числові характеристики розподілу функції якості:

$$M = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k F_i(x); \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{k-1} \left(\sum_{i=1}^k F_i^2(x) - kM^2 \right)}, \quad (4)$$

де M і σ – математичне очікування і дисперсія випадкової величини $F_i(x)$.

На восьмому кроці здійснюється перехід до наступного параметру.

На дев'ятому кроці перевіряється умова закінчення обчислювального процесу.

Визначимо найбільш чутливі параметри для широкопasmових просвітлюючих покриттів типу S-2ВН2В...2ВН2В при робочій довжині хвилі $\lambda_0=580$ нм. Розглядався спектральний діапазон від 480 до 720 нм, на якому саме при цій довжині хвилі значення коефіцієнтів пропускання є максимально високим [13].

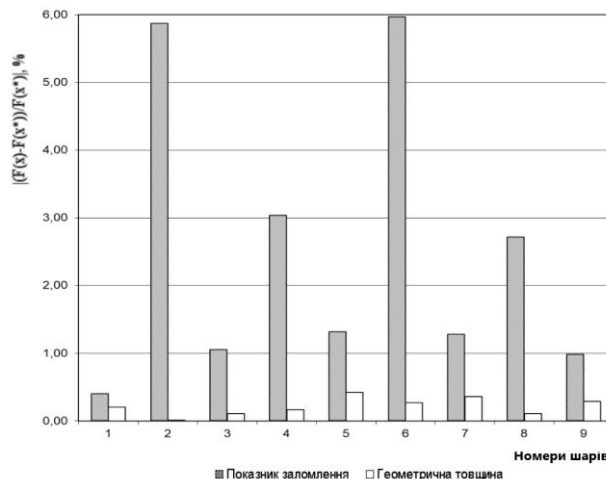


Рисунок 2. Діаграма розсіювання функції якості покриття для 9-шарового широкопasmового фільтра

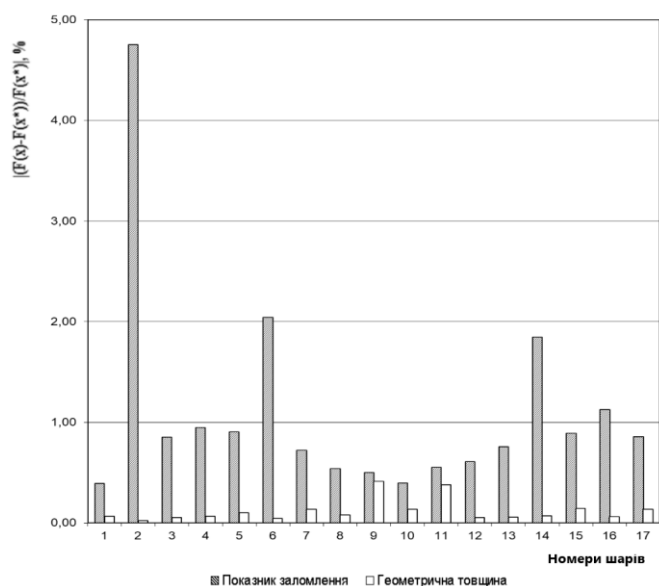


Рисунок 3. Діаграма розсіювання функції якості покриття для 17-шарового ширококутового фільтра

На рисунку 2 показана діаграма розсіювання функції якості покриття для 9-шарового ширококутового просвітлюючого покриття типу S-2ВН2В...2ВН2В. Як бачимо, найбільш чутливими виявились показники заломлення парних шарів, які рівні 1.35. Особливо виділяються другий та шостий, діапазон розсіювання функції якості покриття для яких сягає практично 6%. Натомість вплив технологічних похибок товщин шарів на спектральні характеристики є досить несуттєвим щодо впливу можливих похибок показників заломлення.

На рисунку 3 розглянуто вже 17-шарову структуру [14]. І знову бачимо, що чутливість спектральних характеристик до похибок показників заломлення є вищою, ніж до геометричних товщин шарів. Але варто відзначити дев'ятий та одинадцятий шари, діапазон

розсіювання функції якості покриття для яких при варіації товщин плівки має суттєво вищі значення, ніж для інших шарів. Знову ж дуже чутливим до похибок є показник заломлення другого шару.

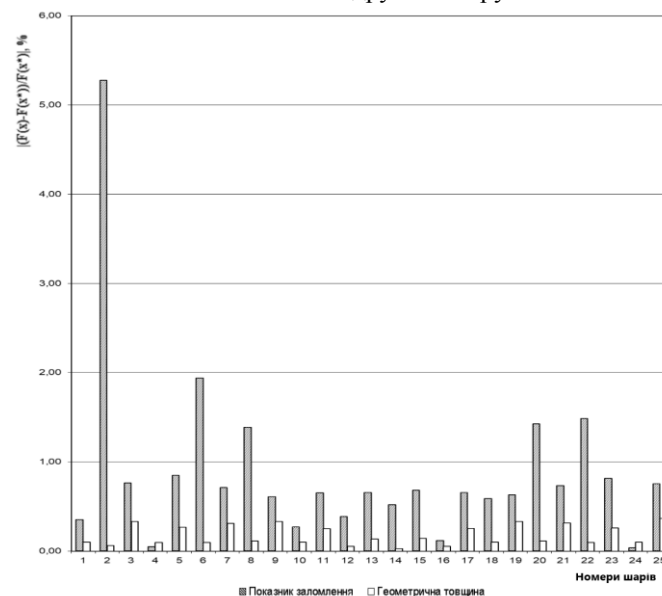


Рисунок 4. Діаграма розсіювання функції якості покриття для 25-шарового ширококутового фільтра

Збільшуючи кількість шарів для ширококутового фільтра типу S-2ВН2В...2ВН2В до двадцяти п'яти, можна прослідкувати подальшу тенденцію [15]. Знову ж діапазон розсіювання функції якості покриття суттєво є більшим для того ж параметру, що й для 9- і 17-шарових ширококутових фільтрів, – показника заломлення другого шару (рис. 4). Це значення більше за 5%, що у два і більше разів перевищує відповідні показники інших параметрів.

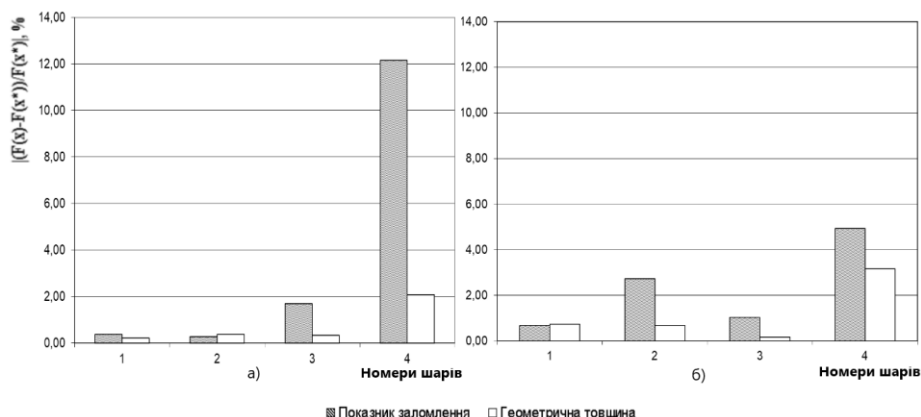


Рисунок 5. Діаграми розсіювання функції якості покриття для ширококутового фільтра при просвітленні підкладки з показником заломлення $n_s=1.51$: 1 – з параметрами $6.58 \cdot n_1 d_1 = 4.06 \cdot n_2 d_2 = 0.441 \cdot n_3 d_3 = 0.944 \cdot n_4 d_4 = 0.25 \cdot \lambda_0$, $n_1=2.1$, $n_2=1.35$, $n_3=1.9$, $n_4=1.35$; 2 – з параметрами $3.76 \cdot n_1 d_1 = 3.76 \cdot n_2 d_2 = 0.455 \cdot n_3 d_3 = n_4 d_4 = 0.25 \cdot \lambda_0$, $n_1=2.0$, $n_2=1.37$, $n_3=2.0$, $n_4=1.37$.

Проведемо дослідження впливу технологічних похибок на спектральні характеристики спроектованих оптичних структур за допомогою методу Монте-Карло. Порівняємо ці значення з відомими аналогами.

На рисунку 5 наведено діаграми розсіювання функції якості покриття для двох оптичних структур – спроектованої в роботі (рис. 5а) та взятої з [16] (рис.

5б). Як бачимо, у спроектованій оптичній структурі дуже чутливим до похибок є верхній – 4-й шар, показник заломлення якого рівний 1.35. Діапазон розсіювання функції якості покриття для показника заломлення перевищує 12%. Відповідно, якщо не можна забезпечити високу якість осадження останнього ша-

ру, то для промислового виробництва він може бути непридатним.

Зауважимо, що значення діапазон розсіювання функції якості покриття для розглянутих чотиришарових структур є суттєво більшими, ніж у попередньо досліджених ширококутових фільтрів типу S-2ВН2В...2ВН2В. Це пояснюється тим, що попри те, що спектральний діапазон останніх є вузьким, значення функції якості покриття (1) на ній є суттєво більшим. Відповідно, однакова зміна значення функції якості покриття по-різному впливає діапазон розсіювання. Значення функції якості покриття (1) для 9-шарового ширококутового фільтра рівне $F = 0.040708$, для 17-шарового – $F = 0.046302$, а для 25-шарового – $F = 0.049401$. Значення функції якості покриття (1) для спроектованого в роботі оптичного покриття рівне $F = 0.002389$, а для взятого з [32] – $F = 0.004002$.

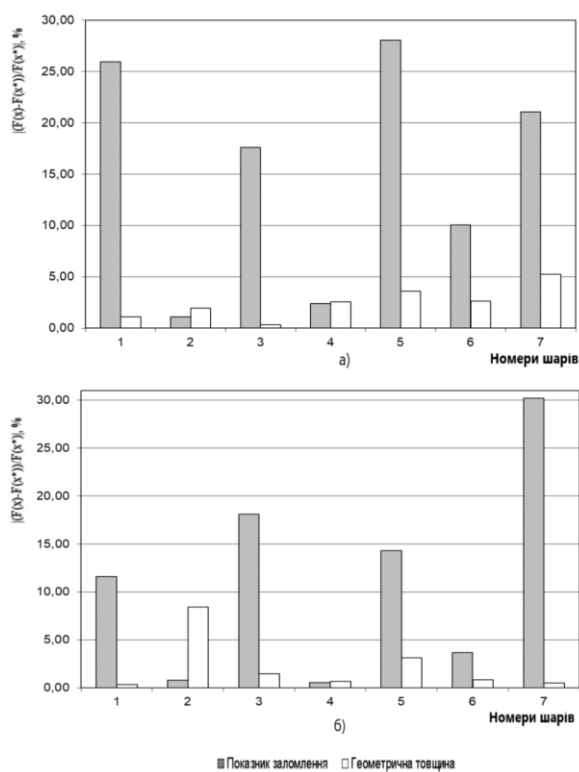


Рисунок 6. Діаграми розсіювання функції якості покриття для 7-шаровою структурою з шарами, що чергуються, (1.35 та 2.1) при просвітленні підкладки з показником заломлення $n_s=1.52$: 1 – оптичні товщини шарів відносно λ_0 становлять 0.087 : 0.03 : 0.315 : 0.043 : 0.113 : 0.48 : 0.22; 2 – оптичні товщини шарів відносно λ_0 становлять 0.064 : 0.038 : 0.401 : 0.032 : 0.084 : 0.459 : 0.229.

Діаграми розсіювання функції якості покриття для двох оптичних структур – спроектованої в роботі (рис. 6а) та взятої з [17] (рис. 6б). Значення функції якості покриття (1) для спроектованого в роботі оптичного покриття рівне $F = 0.001077$, а для взятого з [17] – $F = 0.002209$. Коефіцієнт пропускання обох оптичних структур на всьому спектральному діапазоні є близьким до 1. Відповідно, функція якості покриття дуже чутлива до незначних змін у значеннях параметрів. Тому діапазон розсіювання цільової функції показників заломлення першого та п'ятого шарів

першого оптичного покриття перевищує 25%, а показника заломлення сьомого шару другого оптичного покриття – перевищує 30%. Зауважимо, що спектральні характеристики є найбільш чутливими до похибок показників заломлення низькозаломлюючих шарів, якими є шари з непарними номерами (рис. 6).

Розглянемо діаграми розсіювання функції якості покриття ще двох оптичних структур – спроектованої в роботі (рис. 7а) та взятої з [18] (рис. 7б). Значення функції якості покриття (1) для спроектованого в роботі оптичного покриття рівне $F = 0.001589$, а для взятого з [18] – $F = 0.003168$. Вони також просвітлюють видимий спектральний діапазон від 450 до 750 нм. Функція якості покриття для них приймає більше значення, ніж для попередніх розглянутих оптичних покриттів. Тому значення діапазону розсіювання для них є меншим. Спектральні характеристики найбільш чутливими виявилися до похибок показника заломлення сьомого шару першого покриття (діапазон розсіювання цільової функції практично рівний 6 %) та до похибок показника заломлення п'ятого шару другого покриття (діапазон розсіювання цільової функції практично рівний 7 %). Зауважимо, що значення показників заломлення обох шарів є рівним 1.35.

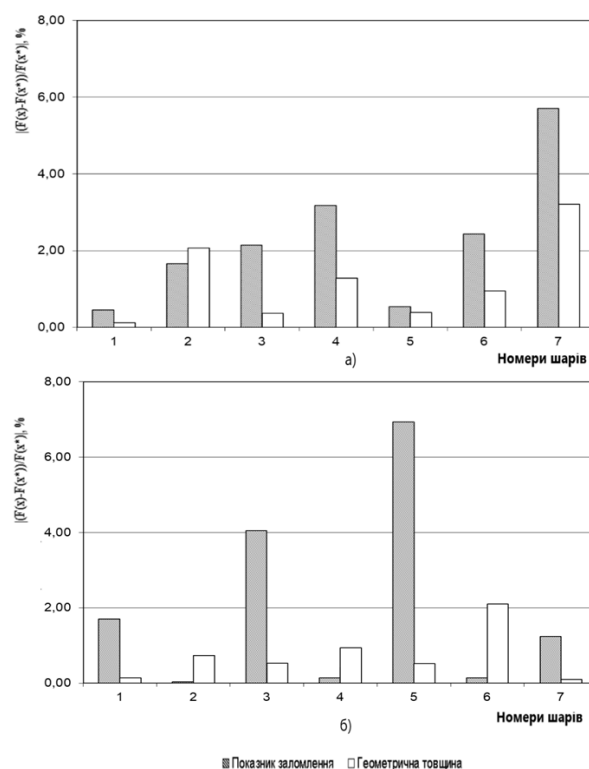


Рисунок 7. Діаграми розсіювання функції якості покриття для 7-шаровою структурою з шарами, що чергуються, (1.35 та 2.1) при просвітленні підкладки з показником заломлення $n_s=1.52$: 1 – оптичні товщини шарів відносно λ_0 становлять 0.05 : 0.071 : 0.062 : 0.257 : 0.018 : 0.12 : 0.2; 2 – оптичні товщини шарів відносно λ_0 становлять 0.06 : 0.02 : 0.35 : 0.02 : 0.07 : 0.42 : 0.21.

Підсумовуючи, можна сказати, що чутливість спектральних характеристик до похибок геометричної товщини є, як правило, меншою, ніж до похибок показників заломлення. Для всіх розглянутих оптичних

фільтрів найбільший діапазон розсіювання цільової функції був для низькозаломлюючих показників заломлення. Для 9-, 17- та 25-шарових ширококутових фільтрів особливо чутливим до похибок виявився низькозаломлюючий показник заломлення другого шару.

Виділимо дві проблеми, які пов'язані з методом Монте-Карло. Перша – те, що статистична похибка оцінок M і σ зменшується дуже повільно, обернено пропорційно до квадратного кореня із кількості дослідів. Тому потрібно проводити велику кількість дос-

лідів. Друга проблема пов'язана із законом розподілу похибок. У роботі був вибраний нормальний закон. Але він може бути неоднаковим для різних виробництв. Передусім це стосується показників заломлення шарів, значення яких залежать від багатьох технологічних параметрів, таких як температура нагріву–підігріву підкладинок, швидкість випаровування й конденсації, залишковий тиск газу в напилувальній камері, наявність або відсутність окислювального середовища, чистота використовуваної сировини та інших, між якими є кореляційний зв'язок.

REFERENCE

1. Яковлев П.П., Мешков Б.Б. Проектирование интерференционных покрытий. М.: Машиностроение, 1987. 192 с.
2. Батищев Д. И. Методы проектирования. М.: Сов. Радио, 1975. 216 с.
3. Kochikov I. V., Lagutin Yu. S., Lagutina A.A., Lukanenko D.V., Tikhonravov A.V., Yagola A.G. "Raising the accuracy of monitoring the optical coating deposition by application of a nonlocal algorithm of data analysis", J. Appl. Industr. Math., 14:2 (2020), p. 329–33.
4. Тихонравов А.В., Кочиков И.В., Матвиенко И.А., Исаев Т.Ф., Лукьяненко Д.В., Шарипова С.А., Ягола А.Г. "Корреляция ошибок при напылении оптических покрытий с широкополосным оптическим контролем", Выч. мет. программирование, 19:4 (2018), С. 439–448.
5. Binder K. Monte Carlo methods in statistical physics. Berlin, 1986. 411 P.
6. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1971. 372 С.
7. Замалин В.М., Норман Г.Э., Филинов В.С. Метод Монте-Карло в статистической термодинамике. М.: Наука, 1977. 228 С.
8. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1972. 64 С.
9. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 311 С.
10. Міца О.В., Матяшовська Б.О., Шумило Н.Я. Дослідження чутливості спектральних характеристик до технологічних похибок за допомогою методу Монте-Карло на прикладі відрізаючих інтерференційних фільтрів типу S-ВНВ...ВНВ // Міжнародна школа-семинар "Теорія прийняття рішень". Ужгород, 2008. С. 89.
11. Міца О.В., Матяшовська Б.О., Шумило Н.Я. Дослідження чутливості спектральних характеристик одно-, дво-, три- та чотиришарових однорідних оптичних структур до технологічних похибок за допомогою методу Монте-Карло // Міжнародна школа-семинар "Теорія прийняття рішень". Ужгород, 2012. С. 142-143.
12. Міца О. В., Матяшовська Б.О., Шумило Н.Я. Дослідження чутливості спектральних характеристик неоднорідної плівки з різними розподілами показника заломлення до технологічних похибок за допомогою методу Монте-Карло // Матеріали VII міжнародної школи-семинару «Теорія прийняття рішень». Ужгород, УжНУ 2014. С. 195.
13. Міца О.В., Матяшовська Б.О., Шумило Н.Я. Дослідження стійкості спектральних характеристик за допомогою методу Монте-Карло на прикладі різних інтерференційних фільтрів // Міжнародна школа-семинар "Теорія прийняття рішень". Ужгород, 2006. С. 74.
14. Міца О.В., Матяшовська Б.О., Шумило Н.Я. Дослідження чутливості спектральних характеристик ширококутових інтерференційних фільтрів типу S-2ВН2В...2ВН2В до технологічних похибок за допомогою методу Монте-Карло // Міжнародна школа-семинар "Теорія прийняття рішень". Ужгород, 2010. С. 154-155.
15. Mitsa O., Holovacs J., Holomb R., Levchuk O. Investigation of the influence of errors the parameters of the layers of optical filters on the stability of their spectral characteristics // The 11th International Conference on Applied Informatics, Eger, Hungary, January 28-29, 2020. P.242-249.
16. Просветляющее интерференционное покрытие: А.с. 1083144 СССР, МКИ G 02 В 5/28; G 02 В 1/10. // Б.И. Агафонов, М.Ф. Васильева, А.С. Герчиков, Е.А. Федин, П.П. Яковлев (СССР). – № 3420182/18–10; Заявлено 12.04.82; Опубл. 30.03.84, Бюл. №12. – 3 с.
17. Широкополосное просветляющее покрытие: А.с. 934429 СССР, МКИ G 02 В 5/28. // В.Д. Веденский и Е.Г. Столов (СССР). – № 2809841/18–10; Заявлено 09.07.79; Опубл. 07.06.82, Бюл. №21. – 3 с.
18. Интерференционное ахроматическое просветляющее покрытие: А.с. 838629 СССР, МКИ G 02 В 5/28. // В.Д. Веденский, Е.Г. Столов, А.А. Метельников, Ш.А. Фурман и Е.Г. Семин (СССР). – № 2822915/18–10; Заявлено 15.10.79; Опубл. 15.06.81, Бюл. №22. – 3 с.

Investigation of the influence of the error of the parameters of the layers of illuminating optical filters on the stability of their spectral characteristics

O. Mitsa, J. Holovacs, S. Beregszaszi, N. Barkáts, G. Kopcha-Goryachkina, M. Sychov

Abstract. In the article it describes the application of the Monte Carlo method to study the stability of the spectral characteristics of different types of anti-reflective filters based on films with low (L) and high (H) refractive indexes. For description of an error during deposition of films was accepted a normal distribution law. For broadband filters S-2L2H..2HL2H type it was shown that the spectral characteristics are the most sensitive to errors in the refractive index of components with low refractive index.

Keywords: multilayer optical coatings, Monte Carlo method, transmittance, broadband filters, stability of spectral characteristics.

Physical bases of fiber-optic temperature sensors development with chalcogenide vitreous semiconductors sensors

Ig. Iv. Chychura¹, S. V. Kutchak¹, Iv. Iv. Chychura²

¹National University of Uzhhorod, Uzhhorod, Ukraine,

²Institute of Electron Physics, Ukrainian National Academy of Sciences, Uzhhorod, Ukraine,

*Corresponding author. E-mail: igor.chychura@uzhnu.edu.ua

Paper received 04.09.21; Accepted for publication 29.09.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-262IX33-04>

Abstract. A method of manufacturing sensitive elements for fiber-optic temperature sensors from chalcogenide semiconductor has been developed. Temperature dependences of the Urbach edge of such elements were measured in the temperature range from 246 to 443 K. Based on the analysis of experimental results, a clear functional dependence of the absorption coefficient of the Urbach region as function of two arguments (photon energy and temperature) for sensitive elements made from $As_{45}Se_{55}$ glass were proposed.

Keywords: fiber-optic temperature sensors, Optical transmission, Chalcogenide vitreous semiconductors.

Introduction. The widespread implementation of fiber-optic communication lines as a modern and highly efficient way of transmitting information creates favorable conditions for the development of alternative ways of using fiber-optic technologies, among which a variety of sensors based on fiber-optic technology. In such devices, the optical fiber can serve as an element of information transmission or perform the function of a sensitive element. Among modern fiber-optic sensors, amplitude type fiber-optic temperature sensors have reached a certain level of distribution [1-4]. Sensors of this type can be used to monitor the temperature at distances up to several kilometers in explosive environment, because the information parameter in them is optical radiation as opposed to the traditional ones, which use electric signals. At present time, semiconductor crystals (GaAs, GaP, etc.) are a sensitive element which used in the vast majority of such sensors [5]. These crystals are also widely used in modern optoelectronics: in the basic elements of infrared optics, television technology and fiber optic communications. An alternative to the use of crystalline materials as temperature sensitive elements of fiber-optic temperature are chalcogenide vitreous semiconductors (CVS). Despite the narrower operating temperature range due to low crystallization temperatures of (CVS), such sensors can be successfully used for a long time in the zone of strong electromagnetic fields and intense radiation background without significant decrease of their metrological characteristics.

In this paper, we studied the methods of manufacturing high-quality temperature sensitive elements from (CVS) and investigated their spectra of the optical absorption edge in a wide temperature range to create a mathematical model for modeling of parameters in fiber-optic temperature sensors.

Methods. Our experimental studies show that the optimal thickness of temperature sensitive elements for FOTS should be in the range from 0.3 mm to 0.5 mm. Production of such samples from (ChS) by traditional methods of grinding and polishing is an extremely difficult task, due to the peculiarities of the behavior of these materials during machining. There is a high probability of microcracks and even complete destruction of the samples during the manufacturing process.

It is well known that as the temperature of (CVS) increases above the glass transition temperature, their viscosity decreases sharply. This allows us to make thin plates for sensitive elements in a completely different way, which we studied.

The basis of this technology is the grains from the source material with calibrated mass and dimensions. Such a grain can be placed between two quartz plates and compressed while heating to a temperature close to the softening temper-

ature T_g of the corresponding glass. To ensure the required thickness of the sensing element, the grain was placed in the middle of a steel washer with calibrated diameter and thickness, in accordance with the required shape and size of the sensing element.

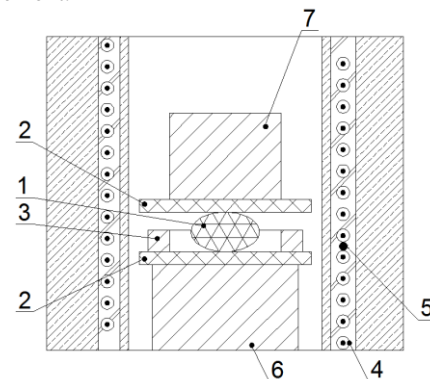


Fig. 1. The design scheme of the thermal press for the manufacturing of sensitive elements for FOTS from (CVS): 1 - calibrated grain of glass; 2 - a plate from quartz glass; 3 - steel ring; 4 - electric furnace; 5 - thermocouple; 6 - base, 7 - load.

The technological process of making samples was carried out in a specially designed sealed chamber, the design of which is shown in Fig.1. The main technological parameters in this process are:

- the amount of mechanical load (≈ 103 N);
- heating rate (about 0.5 ± 0.1 K per minute);
- the temperature of formation of the sensitive element is close to ($T_g \pm 10$ K).

To complete the process, the heated glass grain was kept in a softened state for 10 ÷ 15 minutes. Under the action of the applied load heated to the softening temperature (CVS) slowly changes shape into a plate of the sensitive element (Fig. 2).

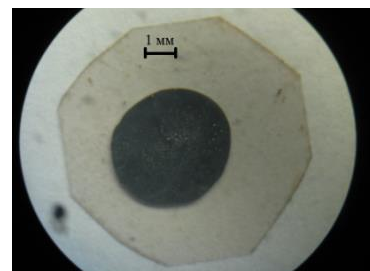


Fig. 2. View of the formed sensitive element from $As_{45}Se_{55}$ after completion of the manufacturing process.

Results and discussion. The absorption spectra for $As_{45}Se_{55}$ plates, which were made according to the methods

described above, are shown in Fig. 3. The resulting spectra provide workspace of transmission changes for sensitive elements of temperature sensors at variations in the photon energy radiation and measured by temperature sensors.

It was found that for As-Se glasses temperature dependence of the optical absorption spectrum $\alpha(h\nu, T)$, in the edge region, is well described by the Urbah expression [6]:

$$\alpha(h\nu, T) = A(T) \exp\left(\frac{h\nu - E_g(T)}{E_0(T)}\right), \quad (1)$$

where $E_0(T)$ is the characteristic energy of the Urbach edge, $E_g(T)$ is the extrapolated optical band-gap energy, and $A(T)$ is the optical absorption coefficient. It is clearly that all these parameters are temperature dependent. This mathematical function was used to analyze the absorption of doped GaAs crystals in our previous work [7]. It is also assumed that the band gap in (1) is equal to the extrapolated optical gap. Although this may not give precisely the same values as other definitions of the band gap.

$$\ln[\alpha(h\nu, T)] = \ln[A(T)] + \left(\frac{h\nu - E_g(T)}{E_0(T)}\right) = \ln[A(T)] + B(T) \cdot h\nu - \frac{E_g(T)}{E_0(T)} = A''(T) + B(T) \cdot h\nu \quad (2)$$

In this case, we obtain for each temperature a linear dependence of the natural logarithm of the absorption coefficient from photon energy. Parameters of this linear dependence:

$$A''(T) = \ln[A(T)] - E_g(T)/E_0(T) \quad \text{and} \quad B(T) = 1/E_0(T) \quad (3)$$

are functions of temperature.

The maximum deviation of the interpolation process of edge at all temperatures does not exceed the value 0.1276 for $A''(T)$ and 0.0511 for $B(T)$. Values of the obtained parameters of interpolation of the absorption edge at different temperatures are shown in table 1.

The temperature dependences of the parameters E_0 , E_g and A (Urbach region) edge are shown in Fig. 4-6. The char-

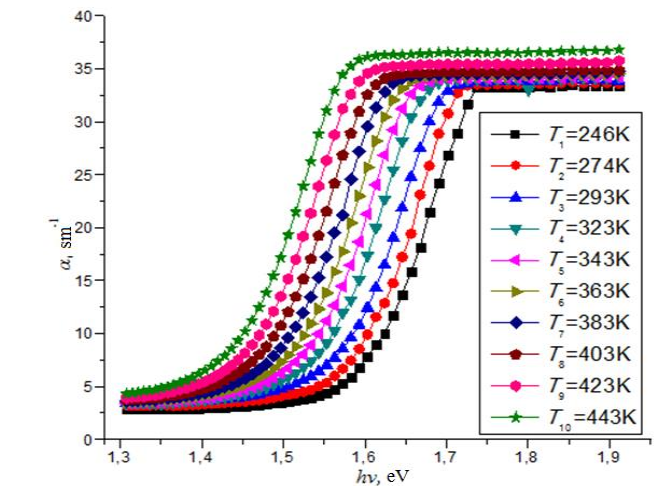


Fig. 3. Spectral dependences of the optical absorption coefficient of As₄₅Se₅₅ sample at different temperatures.

Ratio (1) is more convenient to use in converted form:

acteristic energy E_0 shows some growth with temperature increasing.

A similar temperature behavior was observed by us and other authors [7,8] for both undoped and doped with various impurities GaAs crystals. The value of the parameter E_0 for our glasses is several times larger compared to these crystals. The temperature dependence of $E_0(T)$ obtained by us in the temperature range from 250 to 450 K is well described by the linear function $E_0(T) = e_0 + e_a \cdot T$, which is typical for most (CVS)'s. As a result of mathematical processing of experimental data, the coefficients e_0 and e_a were obtained, quantitative values of which are given in table 2.

Table 1. Parameters of interpolation of the absorption edge of As₄₅Se₅₅ plates by linear function (3) and defined from them parameters of Urbach region (2).

T, K	A''(T), a.u.	B(T), eV ⁻¹	E ₀ (T), eV	E _g (T), eV	E _g (T)/E ₀ , a.u.	A(T), cm ⁻¹
246,00	-18,75	12,98	0,077	1,630	21,17	11,2
274,00	-18,16	12,79	0,0785	1,610	20,51	11,5
293,00	-17,54	12,54	0,0795	1,595	20,06	11,6
323,00	-16,89	12,33	0,081	1,575	19,44	11,8
343,00	-16,61	12,21	0,082	1,560	19,02	12,1
363,00	-16,21	12,04	0,083	1,545	18,61	12,3
383,00	-15,63	11,85	0,084	1,530	18,21	12,6
403,00	-15,32	11,69	0,085	1,510	17,75	12,7
423,00	-14,83	11,55	0,086	1,490	17,33	13,2
443,00	-14,31	11,45	0,087	1,470	16,90	13,3

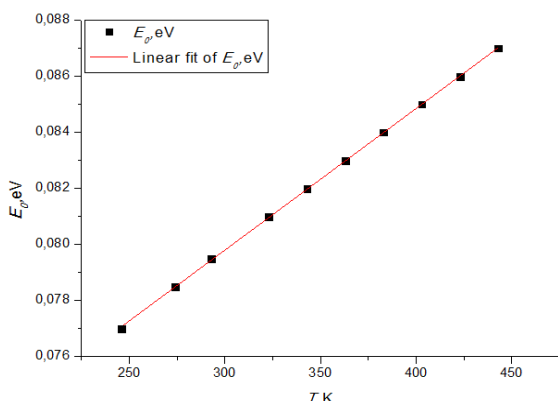


Fig. 4. Temperature dependence of E_0 for As₄₅Se₅₅ sample.

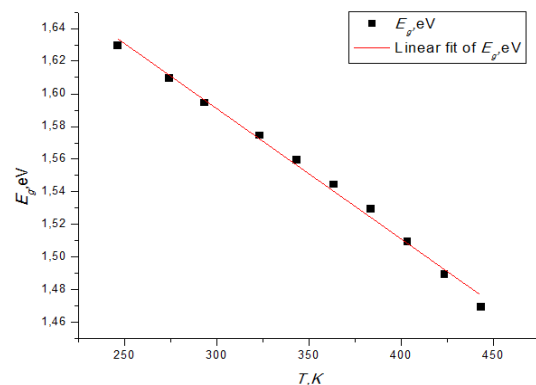


Fig. 5. Temperature dependence of E_g for As₄₅Se₅₅ sample

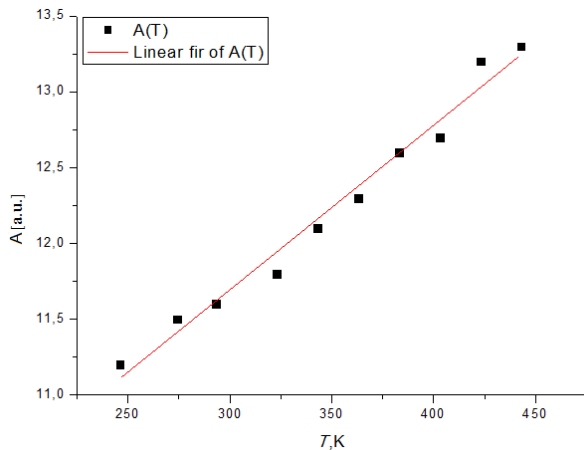


Fig. 6. Temperature dependence of A parameter for linearization of the absorption edge of As₄₅Se₅₅ sample..

The magnitude of the optical width of the band gap of the glasses we studied at room temperature is close to 1,6 eV. With temperature increasing, the value of E_g naturally decreases Fig.5. The average coefficient of temperature changes is approximately $-5 \cdot 10^{-4}$ eV/K. Comparing this value with the corresponding parameters obtained by us for GaAs crystals, it can be concluded that the temperature coefficient of As₄₅Se₅₅ glasses is almost twice higher. According to the Fig. 5 the temperature dependence of E_g can be well described by a linear function. In our previous studies [7] and in work [8],

$$\alpha(h\nu, T) = (0,01 \cdot T + 8,44) \exp\left(\frac{h\nu + 9,89 \cdot 10^{-7} \cdot T^2 + 1,15 \cdot 10^{-4} \cdot T - 1,72}{5,05 \cdot 10^{-5} \cdot T + 0,065}\right) \quad (4)$$

In the obtained expression, the energy of photons should be given in eV, the temperature in Kelvin degrees, and the coefficient of optical absorption is obtained in cm^{-1} . This ratio allows for reliable theoretical analysis, modeling and optimization of operational parameters of FOTS's based on As₄₅Se₅₅ glasses. Using our approach, we can prepare a theoretical basis for the development of FOT on the basis of temperature sensitive elements from a variety of both crystalline and (CVS) optical materials.

Conclusions. The behavior of the optical absorption edge of As₄₅Se₅₅ChS at temperature changes from 240 to 450 K was investigated. Near-parallel shift of the absorption edge into the region of lower photon energies of optical radiation with increasing temperature was obtained. It is shown that in the absorption region up to 35 cm^{-1} , the spectrum has the character of the Urbach edge. The temperature shift of the edge may be explained by the increase in the dynamic structural disorder of the lattice of doped crystals with temperature increasing. The temperature dependences of the Urbach edge parameters are determined. It is shown that these dependencies are well described by linear functions. Determined temperature patterns are much simpler in comparison with doped GaAs crystals, for which the temperature dependences of optical parameters are described by polynomials of the second degree. It was offered a correct view of the absorption coefficient in Urbach edge of As₄₅Se₅₅ ChS as a function of two arguments (photon energy and temperature) which simplifies parameters modeling and optimization of this material.

REFERENCES

1. D. A. Krohn, Fiber Optic Sensors: Fundamentals and Applications, Instrument Society of America (Pub.), Research Triangle Park, NC, USA, 2nd ed., ISBN 0-55617-010-6, 1992
2. J. M. López-Higuera, Handbook of Optical Fibre Sensing Technology, John Wiley & Sons (Pub.), Chichester, West Sussex, England, ISBN 0-471-82053-9, 2002
3. W. J. Bock, I. Gannot and S. Tanev, Optical Waveguide Sensing and Imaging, Springer (Pub.), Dordrecht, The Netherlands, ISBN 978-1-4020-6951-2, 2006
4. S. Yin, P. B. Ruffin and F. T. S. Yu, Fiber Optic Sensors, CRC Press (Pub.), Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, USA, 2nd ed., ISBN 978-1-4200-5365-4, 2008
5. Igor Chychura, Fiber-Optic Temperature Sensors with Chalcogenide Glass and Crystalline Sensing Element (2019) (DOI: 10.5772/intechopen.89207).
6. Taylor P.C., Theye M.L., Orenstein J., Elliott S.R., Golding B., Fox D.L. (1984) Optical Properties of the Chalcogenide Glasses. In: Fleury P.A., Golding B. (eds) Coherence and Energy Transfer in Glasses. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-4733-0_12
7. Chychura I. I., Turianytsia I. I., & Chychura I. I. (2020). Temperature dependence of the optical absorption edge of doped gallium arsenide. *Physics and Chemistry of Solid State*, 21(2), 288-293. <https://doi.org/10.15330/pcss.21.2.288-293>
8. Uesugi, Katsuhiko. Appl. Phys. Lett. 76, 1285 ~ 2000. <https://doi.org/10.1063/1.126010>

we used a second-degree polynomial to represent the band gap of GaAs crystals doped with various impurities. In this case, the use of the linear function led to much larger absolute errors. In case of using As₄₅Se₅₅ glasses, we presented $E_g(T)$ as a linear function, the explicit form of which is written in table 2.

Table 2. Representation of the parameters of the Urbach region of the absorption edge of As₄₅Se₅₅ glasses by the corresponding polynomials and errors of this representation.

Parameter	Relative processing errors
$E_g(T) = 5,05 \cdot 10^{-5} \cdot T + 0,065$	2 %
$E_g(T) = -9,89 \cdot 10^{-7} \cdot T^2 - 1,15 \cdot 10^{-4} \cdot T + 1,72$	7 %
$A(T) = 0,01 \cdot T + 8,44$	9 %

According to relation (3), the parameter A (T) determines the value of the optical absorption coefficient at temperature T for the photons energy of $h\nu = E_g(T)$. Its behavior with increasing temperature is illustrated by the graph of Fig.6. According to Fig.6, despite a fairly significant scatter of experimental points, there is a linear dependence of the parameter A on temperature. The explicit form of linear function obtained by us is given in Table 2.

Using all the obtained results of the theoretical analysis of experimental data, we can write an explicit form of the mathematical relation for the coefficient of optical absorption of As₄₅Se₅₅ glasses, which serve as materials for temperature sensitive elements for FOTS'S:

The F^ω -covering Subgroups of Finite Groups

M. M. Sorokina, D. G. Novikova

Bryansk State University named after Acadimition I.G. Petrovsky, Bryansk, Russia

*Corresponding author. E-mail: mmsorokina@yandex.ru

Paper received 01.12.21; Accepted for publication 16.12.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-262IX33-05>

Abstract. Only finite groups and classes of finite groups are considered. Let ω be a non-empty set of primes and \mathbf{F} be a non-empty class of finite groups. A subgroup H of a group G is called an F^ω -covering subgroup if $H \in \mathbf{F}$ and the property that $H \leq U \leq G$, V is a normal ω -subgroup of U with $U/V \in \mathbf{F}$ implies that $U = HV$. A class of groups is called a formation if it is closed under homomorph images and under subdirect products. In the article we have obtained properties of F^ω -covering subgroups of a finite group G where \mathbf{F} is an ω -local formation of finite groups.

Keywords: finite group, F^ω -covering subgroup, F^ω -projector, class of groups, ω -local formation.

Introduction. We deal only with finite groups. A set of groups is called a class of groups if with its group G this class contains every group which is isomorphic to the group G . For the class of groups \mathbf{F} Gaschutz defined an \mathbf{F} -covering subgroup of the solvable group G [5] and an \mathbf{F} -projector of G [6]. These concepts were the natural extension of the concepts of Hall and Carter subgroups, namely, in a solvable group G the set of all \mathbf{E}_π -covering (\mathbf{N} -covering) subgroups coincide with the set of all its π -Hall (nilpotent) subgroups where \mathbf{E}_π (\mathbf{N}) is the class of all π -groups (the class of all nilpotent groups). We note that in the universe \mathbf{S} of all solvable groups the concepts of an \mathbf{F} -covering subgroup and of an \mathbf{F} -projector coincide.

Among classes of finite groups the central place belongs to formations which was introduced by Gaschutz in [5]. A class of groups is called a formation if it is closed under homomorph images and under subdirect products. Gaschutz using function methods formed local formations and proved the existence and conjugacy of \mathbf{F} -covering subgroups in a solvable group G for the class \mathbf{F} which is a local formation [5]. Another important properties of \mathbf{F} -covering subgroups and \mathbf{F} -projectors of groups for the local formation \mathbf{F} were obtained by Carter, Hawkes, Doerk, Huppert, L.A. Shemetkov, A.F. Shmigirev, Schmid, V.A. Vedernikov, S.F. Kamornikov and others (see [2, 7-9, 12, 14, 16, 18], for instance). Schunck in [13] proved that every local (saturated) formation is a primitively closed homomorph. Properties of \mathbf{F} -covering subgroups and \mathbf{F} -projectors of groups for the primitively closed homomorph \mathbf{F} are studied in [3, 4, 13] and others.

The natural generalization of the concept of a local formation is the concept of an ω -local formation introduced by L.A. Shemetkov in [15] where ω is a non-empty set of primes. In the article [20] F^ω -covering subgroups and F^ω -projectors of groups were introduced for a non-empty class of groups \mathbf{F} and their crucial properties were obtained (existence, conjugacy, embedding and others) for the class \mathbf{F} which is an ω -local formation or an ω -primitively closed homomorph. This work continues the investigations in this direction. For an ω -local formation \mathbf{F} we have established the conditions under which an \mathbf{F} -subgroup of a group G is contained only in one its F^ω -covering subgroup (Theorem 1). As corollaries these theorems imply the result of Carter, Hawkes on \mathbf{F} -covering subgroups and \mathbf{F} -projectors. Theorem proofs use classical

methods of the theory of groups, as well as methods of the theory of classes of finite groups.

Preliminary Information. Used definitions and notations for groups are standard (see [2, 10, 11], for instance). Let us give only some notations and definitions. A note $A := B$ means that the equality $A=B$ is true by the definition.

Denote characterization of the class \mathbf{F} by $\chi(\mathbf{F})$, i.e. $\chi(\mathbf{F})$ is a set of all primes p such that there exists a non-identity p -group in \mathbf{F} (see [11], for instance); $\pi(\mathbf{F}) = \bigcup_{G \in \mathbf{F}} \pi(G)$. A class \mathbf{F} is called *closed under homomorph images*, or briefly, *homomorph* if $G \in \mathbf{F}$ and $N \triangleleft G$ imply that $G/N \in \mathbf{F}$. A homomorph \mathbf{F} is called a *formation*, if \mathbf{F} is closed under subdirect products, i.e. $G/A \in \mathbf{F}$ and $G/B \in \mathbf{F}$ imply that $G/(A \cap B) \in \mathbf{F}$. A class \mathbf{F} is called *closed under normal subgroups*, or briefly, *normal hereditary* if $G \in \mathbf{F}$ and $N \triangleleft G$ imply that $N \in \mathbf{F}$. A normal hereditary class \mathbf{F} is called a *Fitting class* if \mathbf{F} is closed under products of normal \mathbf{F} -subgroups, i.e. $G = AB$ where $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A, B \in \mathbf{F}$ imply that $G \in \mathbf{F}$. A class \mathbf{F} is called a *Fitting formation* if \mathbf{F} is a formation and \mathbf{F} is a Fitting class.

Let \mathbf{F} be a non-empty Fitting formation. Then $G^{\mathbf{F}}$ and $G_{\mathbf{F}}$ are respectively an \mathbf{F} -coradical of the group G (i.e. it is the smallest normal subgroup of G quotient on which belongs to \mathbf{F}) and an \mathbf{F} -radical of G (i.e. the largest normal subgroup of G belonging to \mathbf{F}) (see [2, 14], for instance). Henceforth ω stands for a non-empty subset of the set \mathbf{P} of all primes; \mathbf{F}_ω is a set of all ω -groups belonging to a class \mathbf{F} ; $O_\omega(G)$ is an \mathbf{E}_ω -radical of a group G where \mathbf{E} is a class of all finite groups. Let $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$ where $f(\omega') \neq \emptyset$, $h: \mathbf{P} \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$, $\delta: \mathbf{P} \rightarrow \{\text{non-empty Fitting formations}\}$ are functions which are called respectively an $\omega\mathbf{F}$ -function, an \mathbf{PF} -function and an \mathbf{PFR} -function. A formation $\mathbf{F} = (G: G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ and } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ for any } p \in \omega \cap \pi(G))$ is called ω -fibered with the ω -satellite f and with the direction δ ; a formation $\mathbf{H} = (G: G/G_{\delta(p)} \in h(p) \text{ for any } p \in \pi(G))$ is called fibered with the satellite h and with the direction δ [19]. A fibered (ω -fibered) formation with the direction δ is called *local* (ω -local) if $\delta(p) = \mathbf{E}_p, \mathbf{N}_p$ for

every $p \in \mathbf{P}$, where $\mathbf{E}_p, \mathbf{N}_p$ is the class of all finite p -nilpotent groups.

Remark 1. Every local formation is ω -local for any ω . If $\pi(\mathbf{F}) \subseteq \omega$ then an ω -local formation \mathbf{F} is local (see corollaries 3.2 and 4.2 [19], for instance). A class \mathbf{F} is called *saturated* (ω -saturated) if for any $N \triangleleft G$ such that $N \leq \Phi(G)$ (respectively $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$) the following property is fulfilled: $G/N \in \mathbf{F}$ implies that $G \in \mathbf{F}$ (see [2, 17], for instance).

Remark 2. According to Gaschutz-Lubezeder-Shmidt Theorem, a non-empty formation is saturated if and only if it is local (see Theorem IV, 4.6 [2]). A.N. Skiba and L.A. Shemetkov established equivalency of the concepts of an ω -saturated and an ω -local formations (Theorem 1 [17]).

Let \mathbf{F} and \mathbf{X} are non-empty classes of groups, $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}$. The class \mathbf{F} is called *primitively closed in \mathbf{X}* , or briefly, *P-closed in \mathbf{X}* if for any group $G \in \mathbf{X}$: $G/Core_G(M) \in \mathbf{F}$ for every $M < G$ implies that $G \in \mathbf{F}$ (see [2], for instance). A class \mathbf{F} is called *ω -primitively closed in \mathbf{X}* , or briefly, *ω P-closed in \mathbf{X}* if for any group $G \in \mathbf{X}$: $G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathbf{F}$ for every $M < G$ implies that $G \in \mathbf{F}$ (Definition 2.5 [20]). A class \mathbf{F} is called *P-closed* (ω P-closed) if \mathbf{F} is P-closed (ω P-closed) in \mathbf{E} .

Remark 3. According to Lemma 2.2 [20], every P-closed in \mathbf{X} homomorph is ω P-closed in \mathbf{X} for any ω . If $\omega = \pi(\mathbf{F})$ then ω P-closed in \mathbf{X} class is P-closed in \mathbf{X} (Remark 2.3 [20]). In the article [20] it has been established that a non-empty formation \mathbf{F} is ω P-closed if and only if it is ω -saturated (see Lemma 2.4 [20]).

Let \mathbf{F} be a non-empty class of groups. A subgroup H of a group G is called an *\mathbf{F}^ω -covering subgroup* of G if $H \in \mathbf{F}$ and the property $H \leq U \leq G$, V is a normal ω -subgroup of U with $U/V \in \mathbf{F}$ implies that $U = HV$ (Definition 3.2 [20]). A subgroup H of a group G is called an *\mathbf{F}^ω -projector* of G if for every normal ω -subgroup N of G a subgroup HN/N is an \mathbf{F} -maximal subgroup of G/N (Definition 3.1 [20]).

Remark 4. Every \mathbf{F} -covering subgroup (\mathbf{F} -projector) of the group G is its an \mathbf{F}^ω -covering subgroup (an \mathbf{F}^ω -projector) of G for any ω . If $\omega = \pi(G)$ then an \mathbf{F}^ω -covering subgroup (an \mathbf{F}^ω -projector) of G is an \mathbf{F} -covering subgroup (an \mathbf{F} -projector) of G (Remarks 3.1 and 3.2 [20]).

Let \mathbf{F} be a non-empty formation. A normal subgroup R of a group G is called an *\mathbf{F}^ω -limit subgroup* of G if $R \leq G^{\mathbf{F}}$ and $R/(R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G))$ is a chief factor of the group G . A maximal subgroup M of a group G is called *\mathbf{F}^ω -critical* in G if $G = MR$ for an \mathbf{F}^ω -limit subgroup R of G . An \mathbf{F} -subgroup H of a group G is called an *\mathbf{F}^ω -normalizer* of G if there exists a chain $H = H_1 \subset H_{t-1} \subset \dots \subset H_1 \subset H_0 = G$ where $t \geq 0$ such that H_i is an \mathbf{F}^ω -critical subgroup of H_{i-1} for every $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ (Definition 3.1 [21]).

Lemma 1 (Theorem 2 [22]). Assume that \mathbf{F} is an ω -local formation, an \mathbf{F} -coradical $G^{\mathbf{F}}$ of a group G is a $\pi(\mathbf{F})$ -

selected ω -group. Then the group G has at least one \mathbf{F}^ω -covering subgroup (\mathbf{F}^ω -projector) and any two \mathbf{F}^ω -covering subgroups (any two \mathbf{F}^ω -projectors) of G are conjugate in G .

Lemma 2 (Theorem 3.4 [20]). Assume that \mathbf{X} is a hereditary homomorph, \mathbf{F} is a non-empty ω P-closed in \mathbf{X} homomorph, $G \in \mathbf{X}$ and N is a nilpotent normal ω -subgroup of G . If H is an \mathbf{F} -subgroup of G such that $G = HN$ then H is contained into an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G . Particularly, if H is an \mathbf{F} -maximal subgroup of G then H is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G .

Lemma 3 (Lemma 3.4 [20]). Let \mathbf{F} be a homomorph and G be a group. Then the following statements are true:

- (1) If H is an \mathbf{F}^ω -projector of the group G and $H < G$ then H is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G ;
- (2) If H is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G and $H \leq K \leq G$ then H is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of K ;
- (3) If H is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G and N is a normal ω -subgroup of G then HN/N is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G/N ;
- (4) If N is a normal ω -subgroup of G and H/N is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G/N then every \mathbf{F}^ω -covering subgroup of H is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G .

3. The Main Result

In Theorem 3.4 [20] it has been established conditions under which an \mathbf{F} -subgroup H of a group G is contained into some its \mathbf{F}^ω -covering subgroup. In the following theorem we obtain conditions under which H is contained only into one \mathbf{F}^ω -covering subgroup of the group G .

Theorem 1. Assume that \mathbf{F} is an ω -local formation, G is a group, N is a nilpotent normal ω -subgroup of the group G , H is an \mathbf{F} -subgroup of G such that $G = HN$. If $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{F}$ then the following statements are true:

- (1) A normalizer $N_G(H)$ is contained into a \mathbf{F}^ω -covering subgroup of the group G ;
- (2) H is contained only into one \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G .

Proof. Assume that $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{F}$. Prove the statement (1). Induct on the order of the group G . If $G \in \mathbf{F}$ then G is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G and the statement (1) is true. Suppose that $G \notin \mathbf{F}$. Then from $G = HN$ we infer that $N \neq 1$. Assume that K is a minimal normal subgroup of the group G contained into N . Then K is a nilpotent ω -group. Show that a quotient G/K satisfies the hypotheses of the theorem. Indeed since \mathbf{F} is a formation and $H \in \mathbf{F}$ then $HK/K \in \mathbf{F}$. Moreover, $G/K = HK/K \cdot N/K$ and N/K is a nilpotent normal ω -subgroup of G/K . Since $|G/K| < |G|$ then by induction $N_{G/K}(HK/K) \subseteq L/K$ where L/K is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of the group G/K . From $N_G(H)K/K \subseteq N_{G/K}(HK/K)$ it follows that $N_G(H) \subseteq L$.

Since, according to Remarks 2 and 3, the formation \mathbf{F} is an ω P-closed homomorph in \mathbf{E} then by Lemma 2 we infer that $H \subseteq T$ where T is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of the group G . Then by Lemma 3 (3) a quotient TK/K is an

\mathbf{F}^ω -covering subgroup of G/K . From $G/N = HN/N \cong H/H \cap N \in \mathbf{F}$ we infer that $G^\mathbf{F} \subseteq N$ and, hence, $G^\mathbf{F}$ is a nilpotent ω -group. Since Lemma 1.2 (1) [14] implies that $(G/K)^\mathbf{F} = G^\mathbf{F}K/K$. Consequently, $(G/K)^\mathbf{F}$ is nilpotent and, so, $(G/K)^\mathbf{F}$ is a $\pi(\mathbf{F})$ -selected ω -group. Then by Lemma 1 L/K and TK/K are conjugate in G/K . Therefore, there exists an element $x \in G$ such that $L/K = (TK/K)^{xK}$. From this we conclude that $L = T_1K$ where $T_1 := T^x$. Lemma 1 yields that a subgroup T_1 is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G and by Lemma 3 (2) T_1 is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of the group L .

1. Consider the case $L \neq G$. Since $H \subseteq N_{\{G\}}(H) \subseteq L$ then $L = L \cap G = L \cap HN = H(L \cap N)$. Since $L \cap N$ is a nilpotent normal ω -subgroup of the group L then by induction we infer that $N_L(H) \subseteq R$ where R is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of the group L . Since $L/K = T_1K/K \cong T_1/T_1 \cap K \in \mathbf{F}$ then $L^\mathbf{F} \subseteq K$ and, therefore, $L^\mathbf{F}$ is a nilpotent ω -group. According to Lemma 1, R and T_1 are conjugate in L . Thus, $R = T_1^y$ for some $y \in L$. Since T_1 is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G then by Lemma 1 R is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G . The inclusion $N_G(H) \subseteq L$ implies that $N_G(H) = N_G(H) \cap L = N_L(H)$ and, hence, $N_G(H) \subseteq R$. Thus, if $L \neq G$ then $N_G(H)$ is contained into the \mathbf{F}^ω -covering subgroup R of G .

2. Suppose that $L = G$. Verify that $N_1 \triangleleft G$ where $N_1 := T_1 \cap N$. Indeed, since N is a nilpotent normal subgroup of G and $K \cong K/1$ is a chief factor of G then Corollary 4.1.1 [14] yields $N \subseteq F(G) \subseteq C_G(K)$ and, therefore, $K \subseteq N_G(N_1)$. Since $N_1 \triangleleft T_1$ then $G = T_1K \subseteq N_G(N_1)$ and, hence, $N_1 \triangleleft G$.

2.1. Assume that $N_1 \neq 1$. Since $G/N_1 = HN_1/N_1 \cdot N/N_1$ and N/N_1 is a nilpotent normal ω -subgroup of the group G/N_1 then by induction we infer that $N_{G/N_1}(HN_1/N_1) \subseteq S/N_1$ where S/N_1 is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G/N_1 . Since $N_G(H)N_1/N_1 \subseteq N_{G/N_1}(HN_1/N_1)$ then it follows that $N_G(H) \subseteq S$. Lemma 3 (3) implies that the subgroup T_1/N_1 is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G/N_1 . By Lemma 1.2 (1) [14] $(G/N_1)^\mathbf{F}$ is a nilpotent ω -group. Then, according Lemma 1, we infer that T_1/N_1 and S/N_1 are conjugate in G/N_1 . Hence, $(T_1/N_1)^{aN_1} = S/N_1$ for some element $a \in G$. Consequently, $T_1^a = S$ and Lemma 1 implies

that S is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G . Apart from that, as we have shown above, $N_G(H)$ is contained into S .

2.2. Suppose that $N_1 = 1$. In this case prove that $N = K$. Indeed, since $K \subseteq N$ and $T_1 \cap N = 1$ then $T_1 \cap K = 1$. Therefore, $G = L = T_1[K]$. On the other hand, $G = T_1[N]$. Thus, $N = K$ and from $G = HN$ we infer that $G = HK$. Then $G = H^xK$. The equalities $H^x \subseteq T^x = T_1$ and $T_1 \cap K = 1$ imply that $G = H^x[K]$. Then $H^x < \cdot G$ and by Lemma 3.17 (2) [11] we infer that $H < \cdot G$. Since $G \notin \mathbf{F}$ then H is an \mathbf{F} -maximal subgroup of G and, according Lemma 2, it follows that H is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G . If $N_G(H) \neq H$ then $N_G(H) = G$. Consequently, $N_G(H^x) = (N_G(H))^x = G$ and, hence, $H^x \triangleleft G$. From this we conclude that $G = H^x \times K$. Since $H^x \in \mathbf{F}$, $K \in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{F}$ and \mathbf{F} is a formation then $G \in \mathbf{F}$ which is contradiction. Thus, $N_G(H) = H$. The statement (1) is proved.

Prove the statement (2). Induct by the order of G . As above, we can assume that $G \notin \mathbf{F}$ and $N \neq 1$. Suppose that K is a minimal normal subgroup of the group G such that $K \subseteq N$. By Lemma 2 H is contained into an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G . Put $M := \{T_1, \dots, T_m\}$ is a set of all \mathbf{F}^ω -covering subgroups of the group G containing H . Show that $|M| = 1$.

Assume that $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j$. Since T_i and T_j are \mathbf{F}^ω -covering subgroups of the group G containing H , and K is a normal ω -subgroup of G , Lemma 3 (3) implies that T_iK/K and T_jK/K are \mathbf{F}^ω -covering subgroups of the group G/K , and, furthermore, $HK/K \subseteq T_iK/K$ and $HK/K \subseteq T_jK/K$. Since the group G/K satisfies the hypotheses then by induction we infer that $T_iK/K = T_jK/K$ and, hence, $T_iK = T_jK := D$.

a) Consider the case $D \neq G$. By Lemma 3 (2) subgroups T_i and T_j are \mathbf{F}^ω -covering subgroups of the group D containing H . Moreover, $D = G \cap D = HN \cap D = H(N \cap D)$ and $N \cap D$ is a nilpotent normal ω -subgroup of the group D . Then by induction we have $T_i = T_j$ and, therefore, in this case we conclude that $|M| = 1$.

b) Assume that $D = G$. If $T_i \cap K \neq 1$ then from that a subgroup $T_i \cap K$ is normal in G and K is a minimal normal subgroup of G it follows that $T_i \cap K = K$. Then $K \subseteq T_i$ and $G = T_iK = T_i$. Thus, in this case we have $T_i = G = T_j$. If $T_j \cap K \neq 1$ then we obtain the same conclusion.

Suppose that $T_i \cap K = 1 = T_j \cap K$. Then $G = T_i[K] = T_j[K]$ and, hence, $T_i < \cdot G$, $T_j < \cdot G$. By Lemma 1

subgroups T_i and T_j are conjugate in G . Therefore, $T_i^k = T_j$ for some $k \in K$. Since $HK \cap T_i = H(K \cap T_i) = H$ and $HK \cap T_j = H(K \cap T_j) = H$ then $H^k = (HK \cap T_i)^k \subseteq (HK)^k \cap T_i^k = HK \cap T_j = H$. Consequently, $k \in N_G(H)$. By the statement (1) of this theorem we infer that $N_G(H) \subseteq T$ where T is an \mathbf{F}^ω -covering subgroup of G . Hence, $k \in T$. Thus, we have established that for any $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ the following equality is true $T_i^k = T_j$ where $k \in T$. Since $H \subseteq N_G(H)$ then $T \in M$ and, therefore, $T = T_s$ for some s where $1 \leq s \leq m$. Assume that $r \in \{1, 2, \dots, m\}$. Since $T_r, T_s \in M$ then, by proved above,

we infer that $(T_s)^1 = T_r$ where $1 \in T = T_s$. Consequently, $T_r = T$ for any $r \in \{1, 2, \dots, m\}$. Thus, we conclude that $|M| = 1$. The statement (2) is proved. The theorem is proved.

Conclusion. In view of Remarks 1 and 4, Theorem 1 directly implies the following well-known result for local formations.

Corollary 1.1 (Carter, Hawkes, Theorems 5.8 and 5.9 [1], see also Theorem 15.9 [14]). *Assume that \mathbf{F} is a local formation, G is a group with the nilpotent \mathbf{F} -coradical. Let H be an \mathbf{F} -subgroup of G such that $G = HF(G)$. If $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{F}$ then the following statements are true:*

- (1) $N_G(H)$ is contained into an \mathbf{F} -covering subgroup of G ;
- (2) H is contained only into one \mathbf{F} -covering subgroup of G .

REFERENCES

1. Carter R., Hawkes T. The \mathbf{F} -normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. V. 5. N 2. P. 175–201.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1992. 891 p.
3. Erickson R. Projectors of finite groups // Comm. Algebra. 1982. V. 10. P. 1919–1938.
4. Forster P. Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck- und Gaschutz Klassen // Math. Z. 1984. V. 186. P. 249–278.
5. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80. N 4. P. 300–305.
6. Gaschutz W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups. – Canberra: Notes on Pure Mathematics 11, Austr. Nat. Univ., 1979. 98 p.
7. Hawkes T. On formation subgroups of finite soluble group // J. London Math. Soc. 1968. V. 44. N 2. P. 243–250.
8. Huppert B. Zur Theorie der Formationen // Arch. Math. 1969. V. 19. N 6. P. 561–574.
9. Kamornikov S.F. On formation products of finite groups // Arithmetic and subgroup structure of finite groups. – Minsk: Science and Technology, 1986. P. 69–74.
10. Kurosh A.G. The theory of groups. – M.: Nauka, 1967. 648 p.
11. Monakhov V.S. Introduction to the theory of finite groups and their classes. – Minsk: Vys. shk., 2006. 207p.
12. Schmid P. Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math. Z. 1974. V. 137. N 1. P. 31–48.
13. Schunck H. \mathbf{H} -Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1967. V. 97. N 4. P. 326–330.
14. Shemetkov L.A. Formations of finite groups. – M.: Nauka, 1978. 272 p.
15. Shemetkov L.A. On products of formations // Dokl. AN BSSR. 1984. V. 28. N 2. P. 101–103.
16. Shmigirev E.F. On some questions of the theory of formations // In: Finite groups. – Minsk: Science and Technology, 1975. P. 213–225.
17. Skiba A.N., Shemetkov L.A. Multiply ω -local formations and Fitting classes of finite groups // Mat. Works. 1999. V. 2. N 2. P. 114–147.
18. Vedernikov V.A. On \mathbf{F} -projectors of groups // Voprosy Algebry. – Gomel, 1985. V. 1. – P. 9–22.
19. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. The ω -fibered formations and Fitting classes of finite groups // Math. Notes. 2002. V. 71. N 1. P. 43–60.
20. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. The \mathbf{F} -projectors and \mathbf{F} -covering subgroups of finite groups // Sib. Math. J. 2016. V. 57. N 6. P. 1224–1239.
21. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. The \mathbf{F}^ω -normalizers of finite groups // Sib. Math. J. 2017. V. 58. N 1. P. 64–82.
22. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. On properties of \mathbf{F}^ω -projectors and \mathbf{F}^ω -covering subgroups of finite groups // Actual problems of applied mathematics and physics: international scientific conference: Tez. doc. – Nalchik: IPMA KBSC RAS, 2017. P. 262–263.

TECHNICAL SCIENCES

Використання техноценологічного підходу для формування ієрархії заходів енергетичної ефективності на підприємствах харчової промисловості України

Я. Д. Онищенко*, А. І. Замулко

Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
HERZ Україна, Київ, Україна

*Corresponding author. E-mail: yaroslav_onyshchenko@ukr.net

Paper received 30.08.21; Accepted for publication 22.09.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-262IX33-06>

Анотація: переглянуті характерні риси виконання рангового аналізу з метою моніторингу енергоспоживання підприємств харчової промисловості України. Для спрощення відбору з подальшим проведенням рангування в межах окремих груп пропонується використати техноценологічний підхід. Перевагами використаного методу, для формування переліку заходів за ступенем впливу на показники енергоспоживання підприємств харчової промисловості України, є оптимальний опис прогнозованих процесів роботи об'єктів техноценозу, з урахуванням змін які можуть відбутися у процесі виробництва, споживання чи перехід на інший вид виробленої продукції.

Ключові слова: харчова промисловість, енергетична ефективність, техноценоз, заходи впливу.

Вступ. Енергозбереження є складним процесом, який впливає як на проміжні, так і на кінцеві результати виробничо-господарської діяльності, та займає перше місце серед пріоритетів державної політики енергетичної стратегії України до 2035 року. Зменшення витрат енергетичних ресурсів призводить до покращення економічного становища об'єкта виробництва, що в свою чергу дозволяє підвищити економічну привабливість підприємства для залучення інвестицій, які будуть задіяні для розширення виробництва та утворенню нових робочих місць, що позитивно відобразиться на економіці країни. Енергетична стратегія України [1] передбачає завершення реформування енергетичного комплексу до 2025 року, та досягнення першочергового завдання – енергетичної безпеки країни, шляхом інноваційного оновлення енергосистеми та об'єднання її з енергетичними мережами ЄС. Потенціал енергозбереження України становить 35%, однак рівень використання цього потенціалу залишається низьким, не дивлячись на прийняті законодавчі та нормативно правові акти, які спрямовані на зниження витрат енергетичних ресурсів.

Одним з методів підвищення енергетичної ефективності є енергозбереження. Об'єктами енергозбереження та збільшення енергоефективності можуть бути промислові виробництва переробної промисловості України.

Аналіз стану проблеми. Останні роки на підприємствах переробної галузі актуальності набирають енергоощадні технології. Це пов'язано з підвищенням цін на енергетичні носії, що призводить до підвищення собівартості продукції що виробляється. Запровадження енергоефективних технологій передбачає собою модернізацію, у деяких випадках, реконструкцію технологічних ліній, інженерних систем. Керівництво підприємств харчової промисловості визнає, що впровадження енергоощадних технологій – це необхідний крок, задля забезпечення конкурентно спроможності підприємства в теперішньому економі-

чному становищі та отримання прибутку в майбутньому. Швидкий розвиток енергоощадних технологій вже зараз може запропонувати ряд заходів які позитивним чином можуть вплинути на вирішення таких питань як технічних, економічних, так і екологічних. Серед таких заходів можуть бути: реконструкція, модернізація інженерних мереж, перехід на альтернативні джерела енергії.

Із-за великої кількості можливих заходів спрямованих на енергозбереження в сфері переробної промисловості, та їх ефективність в кожному окремому випадку є важливим та складним рішенням. Запровадження таких заходів може мати як позитивний так і негативний ефект. Разом з тим, вимоги до енергоефективності підприємств харчової промисловості формуються на підставі розрахункових даних еталонних підприємств, у рахуванням вимог до обладнання що використовується в технологічних операціях та для підтримки інфраструктури підприємства в цілому, відповідно до економічно доцільний рівень, що враховує рівень дисконтованих витрат на енергоефективність щодо розрахункового терміну корисного використання кожного еталону підприємства і диференційований залежно від функціонального призначення, об'ємів виробництва і типу переробляючої сировини.

Основні результати роботи. Об'єкти харчової та переробної промисловості України характеризуються великими об'ємами споживання теплової та електричної енергії, великими об'ємами споживання води та в деяких випадках палива. В Україні, частка спожитих паливно-енергетичних ресурсів, які споживає переробна промисловість складає 3-5% від кінцевого споживання. Однак незважаючи на це, ми не можемо не звертати уваги на ці показники. Поступово спостерігається тенденція до зменшення споживання паливно-енергетичних ресурсів галуззю, скажімо за 2020 рік переробна та харчова промисловості, за різними оцінками, скоротили своє споживання на 3,3% у порівнянні з попереднім роком [2]. Відслідкувавши зміни

тенденції споживання електричної енергії харчовою та переробною промисловістю (рис.1 таб.1), видно не стабільну ситуацію. Спостерігається значне зниження споживання в 2015 році аж до 4066,17 млн. кВт·год. Аналізуючи графік можна припустити, що значення споживання електричної енергії буде зменшуватись і надалі, та на кінець 2021 року може становити ~4150 млн. кВт·год. Водночас яскраво виражена позитивну динаміку зменшення енергоємності виробництва продукції переробної промисловості, що призводить до збільшення бумів виробництва продуктів харчування та напоїв.

Структура споживання енергоресурсів підприємствами і об'єктами в значній мірі визначається специфікою і профілем їх діяльності. Звичайно не кожне під-

приємства орієнтована на виробництво продуктів харчування та напоїв має цілорічну завантаженість, більшість підприємств займаються сезонним виробництвом та вимушені спеціалізуватися на виробленні допоміжних (побічних) продуктів, що потребує зміни технологічних процесів та переліку технологічного обладнання яке необхідно задіяти. До складу підприємства входять різні класи споруд - функціональні та допоміжні. До функціональних будівель можна віднести: виробничі будівлі та власні системи життєзабезпечення (котельні, холодильники, насосні станції, компресорні установки, системи підготовки води, та ін.; до допоміжних – адміністративні будови, та складські приміщення (останніх може не бути).

Таблиця 1. Зміна обсягів споживання енергії харчовою та переробною промисловістю за 2010-2020 роки

Рік	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
обсяги споживання (млн. кВт·год)	4623,24	4648,61	4713,78	4682,16	4492,47	4066,17	4214,3	4407,1	4536,29	4486,1	4341,4
енерго емність (тис.т.н.е/млн грн)	-	-	0,028	0,04	0,02	0,015	0,012	0,01	0,012	-	-

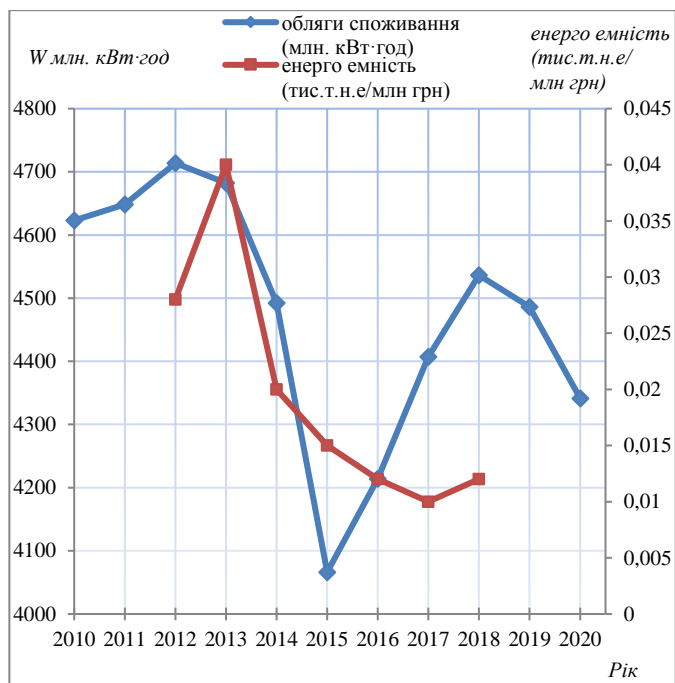


Рис. 1. – Структура споживання електричної енергії підприємствами харчової та переробної промисловості України за період з 2010 по 2020 роки та показника енергоємності галузі. Джерело [2].

Режими роботи, та сфера застосування паливно-енергетичних ресурсів на кожному з підприємств переробної промисловості є дещо схожими, зокрема в частині підготовки та зберіганні сировини. Це дозволяє сформуванню досить загальний перелік заходів які дозволять зменшити показники споживання паливно-енергетичних ресурсів. Утворений перелік заходів направлених на енергозбереження можна розділити на групи. За капіталовкладеннями їх можна поділити на: такі що не потребують капіталовкладень (організаційні), потребують незначних капіталовкладень (ті які мають швидкі терміни окупності 4-5 років) та ті які потребують значних капіталовкладень з боку підприємства.

За функціональними особливостями заходи по енергозбереженню можна було б поділити на «пасивні»

та «активні» [3].

При цьому в переліку необхідних енергозберігаючих заходів можуть зустрічатись найрізноманітніші за локалізацією заходи: організаційні, технічні, стимулюючі заходи.

Потреба в розробці системного підходу – напрям методології досліджень, який полягає в дослідженні об'єкта як цілісної множини елементів в сукупності відношень і зв'язків між ними, тобто розгляд об'єкта як моделі системи. Необхідність створення моделі системи зумовлена значним ускладнення структурної організації та управління споживанням енергоресурсів та без посередньо в енергетиці в умовах перебудови, в період коли спостерігається тенденція збільшення попиту на енергетичні послуги, в умовах реформування енергетичного ринку, коли кожен споживач, без посередників, виходить на арену великого ринку електричної енергії, і стає активним суб'єктом економічно-організаційних відносин.

Тому, разом із сформованими системними дослідженнями технічних систем доцільно їх вивчення як спільнот виробів – техноценозів, що передбачає застосування ряду понять, які використовуються об'єктивною закономірністю, що має загальний характер [4].

Поняття «техноценоз» і фенологічний підхід який застосовують для дослідження складних систем позиціонується як штучна система, певна структура об'єктів зі нестійкими зв'язками, але єдиною ціллю, обмежена в часі та просторі. Універсальність ценологічного підходу і сформульованого на його основі закону оптимальної побудови техноценозу дозволяє застосовувати їх для бюджетних організацій та установ [4] Дослідження техноценоз - це дослідження цілого, конкретного об'єкта, що володіє інтегративними властивостями, дослідження, що припускає рух від цілого до частин (див. [5]) при вивченні дуже складних імовірнісних технічних систем [5]. До таких систем можна віднести, електричне господарство сучасного харчового підприємств або саме підприємство.

Основною метою проведення такого плану досліджень є проведення статистичного аналізу існуючих

даних та подальша їх оптимізація. Проведення рангового аналізу передбачає виконання таких операцій як: параметричного нормування, інтервальне оцінювання, прогнозування, нормування споживаних ресурсів. Проведення поглибленого аналізу рангового параметричного розподілу значною мірою впливає на покращення ефективності рангового аналізу.

Проте, варта звернути у вагу на те, що створена система має техногенне походження, а для виконання оптимізації техноценозу та для побудови графічних відображень з формованої системи, необхідно визначити оптимальний розподіл. Проаналізувавши досвід використання техноценозів в різних сферах досліджень, було визначено, що оптимально може називатись така конфігурація системи яка може бути аналітично описана двопараметричним апроксимуючим виразом рангового розподілу. Показник енергоспоживання об'єкта $\Lambda(r)$ для побудови рангового Н-розподілу визначається за наступною формулою:

$$\Lambda(r) = B_1 / r^\beta \quad (1)$$

де r – ранг об'єкту; β – коефіцієнт корекції крутизни кривої розподілу; $B_1 = B_{max}$ – стале максимальне значення найбільшого споживача.

$$\beta = \log_r(B_1 / \Lambda(r)) \quad (2)$$

Техноценоз вважається найкращим коли виконується умова $0,5 \leq \beta \leq 1,5$. Відповідно до вище вказаного виразу можна визначити оптимальний стан системи і графічно відобразити його у вигляді кривої на графіку рангового розподілу.

Саму оптимізаційну задачу всередині ценозів можна формалізувати наступним чином:

$$Z(R_i, PSQ_i, ENV_i, PI_i) \rightarrow \text{extr} \quad (3)$$

Де R_i – індекс надійності функціонування технічних систем об'єкту, PSQ_i – індекс якості електропостачання об'єкту, ENV_i – індекс «екологічності» об'єкту, PI_i – індекс рентабельності об'єкту.

Створена задача оптимізації у такому вигляді буде знаходитись у наступних межах:

$$0 \leq f_i(R_i, ENV_i) < 1 \\ f_i(PSQ_i, PI_i) \geq 1$$

Наведений на **рис.2** ранговий параметричний розподіл техноценозу по споживанню електричної енергії підприємств харчової промисловості України за споживання м електричної енергії по областям за 2015 рік.

Проведення досліджень ценозів єдиної структури зводять до системного опису системою з вираженою ієрархією показників та до структурного фенологічного опису.

Проводячи статистичний аналіз та побудову емпіричної моделі, процесу споживання електричної енергії, виконується детальна обробка статистичних даних за обраними показниками, яка передбачає інтервальне оцінювання з обов'язковим виконанням рангового та кластерного аналізів. Використання рангового аналізу слугує для упорядкування зібраних даних, з подальшим прогнозуванням показників споживання електричної енергії окремими об'єктами та системою в цілому. Інтервальне оцінювання дозволяє виявити об'єкти енергоспоживання яких не вкладається в загальні показники аналогічних об'єктів. За допомогою кластерного оцінювання досліджувані об'єкти можна розбити по групам з подальшим нормуванням показ-

ників енергоспоживання досліджуваних об'єктів харчової промисловості, з попередньо створеним статистичним описом отриманих норм [4].

Найкраще ранговий аналіз зображати в графічній формі. Відображення даних в такій формі дає змогу відразу наочно побачити, у вигляді упорядкованих точок, значення з енергоспоживання досліджуваних об'єктів. У таких графіках, зазвичай, вісь абсцис слугує для відображення рангу виду, а вісь ординат – кількості об'єктів, які входять до складу цього виду.

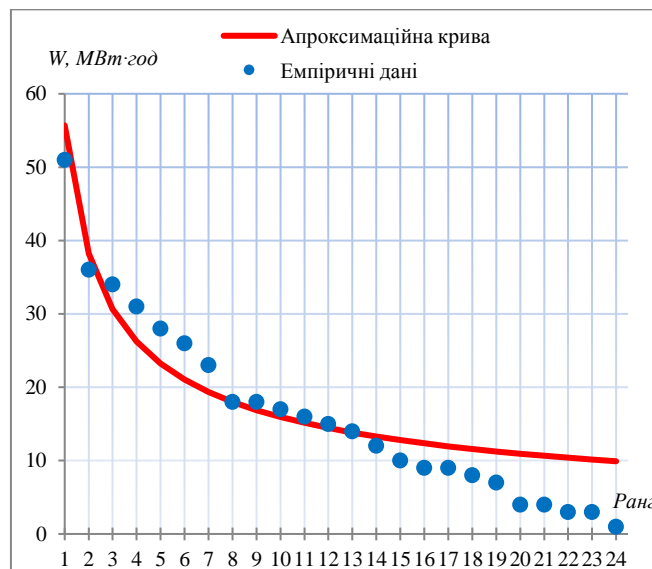


Рис. 2. – Рангове параметричне розподілення техноценозу за споживанням електричної енергії підприємствами харчової промисловості України по областям.

Сенсом такого рангового аналізу прийнято вважати метод побудови рангового розподілу для подальшої його оптимізації. Для вирішення задачі по оптимізації, проводиться зіставлення умовно ідеальної кривої з реальними даними, після їх вивчення можна зробити висновок, чи потребує ценоз внесення змін для наближення реальної кривої до умовно ідеальної. Для цього розглядаються способи, методи та механізми які дозволять виконати покращення показників реальних об'єктів які не входять в норми споживання, та відповідно підвищити стійкість системи.

Висновки. До переваг методу запропонованого для вибору управлінських рішень спрямованих на підвищення енергетичної ефективності на підприємствах харчової промисловості України можна віднести оптимальний опис процесу роботи об'єкту техноценозу з взяттям до уваги внесення можливих змін у роботі підприємства. Підчас використання даного методу, рахунок факторів виконується, урахуванням в алгоритмі моделі управляючих впливів на першому етапі, та подальшу реалізацією стохастичних зворотних зв'язків в робочій з моделі. До недоліків даного методу можна віднести не можливість довго строкового прогнозування (більше двох років), адже підчас спроби виконання подібних розрахунків спостерігається різке збільшення вірогідність виникнення помилки прогнозу. Однак цей недолік можна нівелювати, як що створити динамічну адаптивну модель, яка відображає процес енергоспоживання строком рівним або більшим ніж 6 років.

ЛІТЕРАТУРА

1. «Нова Енергетична стратегія України до 2035 року: безпека, енергоефективність, конкурентоспроможність» Режим доступу: <http://mpe.kmu.gov.ua/minugol/doccatalog/document?id=245213112>
2. «Укренерго» національна енергетична компанія Режим доступу: <https://ua.energy/peredacha-i-dyspetcheryzatsiya/dyspetcherska-informatsiya/elektrospozhyvannya/>
3. Denysiuk S. The use of technocological approach in decision making for energy efficiency measures implementation in buildings and structures / Denysiuk S., Derevianko D., Vasylenko V. // Sciences of Europe (Prague, Czech Republic), - VOL 1, № 69 (2021), - pp.65-69. ISSN 3162-2364
4. Гнатюк В. И. Закон оптимального построения техноценозов. Ценологические исследования. Вып. 29-М.; Томский гос. ун-т: Центр системных исследований, 2005. – 384 с.
5. Бевз В. В. Энергозбереження – ефективний шлях до зниження витрат виробництва, Харчова промисловість № 9. 2010 – 194 с.
6. Офіційний сайт державного комітету статистики України Режим доступу: <http://www.ukrstat.gov.ua/>

REFERENCES

1. «Nova Enerhetychna stratehiia Ukrainy do 2035 roku: bezpeka, enerhoefektyvnist, konkurentospromozhnist» Rezhym dostupu: <http://mpe.kmu.gov.ua/minugol/doccatalog/document?id=245213112>
2. «Ukrenergo» national power company Rezhym dostupu: <https://ua.energy/peredacha-i-dyspetcheryzatsiya/dyspetcherska-informatsiya/elektrospozhyvannya/>
3. Denysiuk, S. Optimisation features of energy processes in energy systems with Distributed Generation / Denysiuk, S., Derevianko, D. // 2020 IEEE 7th International Conference on Energy Smart Systems, ESS 2020 - Proceedings, 2020, pp. 211–214, 9160212.
4. Hnatiuk V. Y. Zakon optimalnoho postroeniya tekhnotsenozov. Tsenolohycheskye yssledovaniya. Vyp. 29-М.; Tomskiyi hos. un-t: Tsentr systemnykh yssledovanyi, 2005. – 384 s.
5. Bevez, V. Energy saving - an effective way to reduce production costs, Food industry, №9.2010-194 s.
6. Official site of the State Statistics Committee of Ukraine Rezhym dostupu: <http://www.ukrstat.gov.ua/>

Using a technocological approach to form a hierarchy of energy efficiency measures in the food industry of Ukraine Y. Onyshchenko, A. Zamulko

Abstract: the characteristic features of performing a rank analysis in order to monitor the energy consumption of food industry enterprises in Ukraine are revised. To simplify the selection with subsequent ranking within individual groups, it is proposed to use a technocological approach. The advantages of the used method, for forming a list of measures on the degree of influence on the energy consumption indicators of food industry enterprises of Ukraine, is an optimal description of the predicted processes of operation of technocogenesis facilities, taking into account changes that may occur in the process of production, consumption or transition to another type of product.

Keywords: food industry, energy efficiency, technocogenesis, measures of influence.

Best approximation of periodic functions in the Lebesgue spaces

V. Shkapa*, I. Zamrii, H. Vlasyk

State University of Telecommunications, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author. E-mail: vshkapa@ukr.net

Paper received 17.12.21; Accepted for publication 27.12.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-262IX33-07>

Abstract. We obtain the exact order estimates of the best approximations of periodic functions that are analogues of the Bernoulli kernels in the Lebesgue spaces.

Keywords: Fourier series, Bernoulli kernel, the best approximations, (ψ, β) -derivative, (ψ, β) -differentiable functions.

Introduction. Let L_q be the space of 2π -periodic functions f summable to a power $q, 1 \leq q < \infty$ (resp., essentially bounded for $q = \infty$), on the segment $[-\pi, \pi]$. The norm in this space is defined as follows:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname{esssup}_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|, & q = \infty. \end{cases}$$

For a function $f \in L_1$, we consider its Fourier series

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

where

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

are the Fourier coefficients of the function f . In what follows, we always assume that the function $f \in L_1$ satisfies the condition

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Further, let $\psi \neq 0$, be an arbitrary function of natural argument and let β be an arbitrary fixed real number. If a series

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k}}{\psi(|k|)} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

is the Fourier series of a summable function, then, following Stepanets [1, p. 25] we can introduce the (ψ, β) -derivative of the function f and denote it by f_{β}^{ψ} .

By L_{β}^{ψ} we denote the set of functions f satisfying this condition. In what follows we assume that the function f belongs to the class $L_{\beta, p}^{\psi}$ if $f \in L_p$ and

$$f_{\beta}^{\psi} \in U_p = \{ \varphi: \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1 \},$$

$$1 \leq p \leq \infty.$$

If

$$\psi(|k|) = |k|^{-r}, \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

then the (ψ, β) -derivative of the function f coincides with its (r, β) -derivative (denoted by f_{β}^r) in the Weyl-Nagy sense.

Let, for a fixed function of a natural argument ψ and a number $\beta \in \mathbb{R}$, the series

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx}$$

is a Fourier series of some sum function $F_{\psi}(x, \beta)$ on

$[-\pi, \pi]$. Then each function $f \in L_{\beta, p}^{\psi}$ can be represented as a convolution

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) F_{\psi}(t, \beta) dt,$$

where $\|\varphi\|_p \leq 1, 1 \leq p \leq \infty$ (see, e.g., [2]).

Note that the functions $F_{\psi}(x, \beta)$ are naturally called analogs of the Bernoulli kernel, since for $\psi(|k|) = |k|^{-r}, r > 0$ the function $F_{\psi}(x, \beta)$ is the Bernoulli kernel.

By B we denote the set of functions ψ , satisfying the following conditions:

- 1) ψ — are positive and nonincreasing;
- 2) there exists a constant $C > 0$ such that

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \leq C, \quad \tau \in \mathbb{N}.$$

Thus, the functions $\frac{1}{\tau^r}, r > 0; \frac{\ln^{\gamma}(\tau+1)}{\tau^r}, \gamma \in \mathbb{R}, r > 0, \tau \in \mathbb{N}$, and some other functions belong to the set B .

For the quantities A and B , the notation $A \approx B$ means that there exist positive constants C_1 and C_2 such that $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. If $B \leq C_2 A (B \geq C_1 A)$, then we can write $B \ll A (B \gg A)$. All $C_i, i = 1, 2, \dots$, encountered in our paper may depend only on the parameters appearing in the definitions of the class and metric in which we determine the error of approximation.

We now give definitions of the approximating characteristic under investigation.

Let

$$T_m = \left\{ t: t(x) \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx} \right\}.$$

For $f \in L_q, 1 \leq q \leq \infty$, we set

$$E_m(f)_q = \inf_{t \in T_m} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_q. \quad (1)$$

The quantity given by relation (1) is called the best approximation of the function f in the space L_q .

In the case where $c_k = \hat{f}(k)$, by $\mathcal{E}_m(F_{\psi})_q$ we denote the quantities

$$\mathcal{E}_m(f)_q = \|f(\cdot) - \sum_{k=-m}^m \hat{f}(k) e^{ikx}\|_q.$$

For the quantities $E_m(f)_q$ and $\mathcal{E}_m(f)_q$ there is the relations

$$E_m(f)_q \leq \mathcal{E}_m(f)_q.$$

At present, there are many works devoted to the investigation of quantity $E_m(f)_q$ and $\mathcal{E}_m(f)_q$. For details and the corresponding references, see, e.g., [3, 4].

Main result. The following assertion is true:

Theorem. Let $1 < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ and let, in addition, there exist $\varepsilon > 0$ such that the sequence $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, does not increase. Then the following order estimate is true:

$$E_m(F_\psi)_q = E_m(F_\psi)_q = \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Proof. We now establish the upper bound. Let l and m be such that $2^l < m \leq 2^{l+1}$. First, we consider the case $1 < q \leq 2$. Applying Littlewood–Paley Theorem (see, e.g., [5])

$$C_3(q) \|f\|_q \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \leq C_4(q) \|f\|_q,$$

where

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

$$\rho(s) = \{k: 2^{s-1} \leq |k| < 2^s\}, s \in \mathbb{N},$$

we obtain

$$E_m(F_\psi)_q \ll \left\| F_\psi - \sum_{s < l} \delta_s(F_\psi) \right\|_q = \left\| \sum_{s \geq l} \delta_s(F_\psi) \right\|_q \ll \left\| \left(\sum_{s \geq l} |\delta_s(F_\psi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q = I_1.$$

Then, using the inequality $|a + b|^\alpha \leq |a|^\alpha + |b|^\alpha$ for $0 \leq \alpha \leq 1$, we can write

$$I_1^q \ll \int_\pi^\pi \sum_{s \geq l} |\delta_s(F_\psi)|^q dx \ll \sum_{s \geq l} \|\delta_s(F_\psi)\|_q^q,$$

and.

$$I_1 \ll \left(\sum_{s \geq l} \|\delta_s(F_\psi)\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

To continue (2), estimate the value

$$\|\delta_s(F_\psi)\|_q = \left\| \sum_{k \in \rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \text{sign} k} e^{ikx} \right\|_q.$$

First, we show that the following estimate is true

$$\left\| \sum_{k \in \rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \text{sign} k} e^{ikx} \right\|_q \ll \psi(2^s) \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} \right\|_q, 1 < q < \infty.$$

For this purpose, for $s \geq l$ we consider the sequence

$$\{\lambda_k\} = \left\{ \frac{\psi(|k|)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \text{sign} k}, 2^{s-1} \leq |k| < 2^s \right\}.$$

We make sure that the sequence $\{\lambda_k\}$ satisfies the conditions of the Marcinkiewicz theorem (see, e.g., [5]).

Obviously, it is enough to check the fulfillment of conditions 1), 2) of this theorem for positive k such that

$$2^{s-1} \leq k < 2^s.$$

By $\psi \in B$ and $2^{s-1} \leq k < 2^s$ then

$$1) |\lambda_k| = \left| \frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right| = \frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} \leq \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \leq M,$$

$$2) \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| =$$

$$= \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} \left| \frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} - \frac{\psi(k+1)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right| \leq \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} (\psi(k) - \psi(k+1)) = \frac{1}{\psi(2^s)} (\psi(2^{s-1}) - \psi(2^s)) \leq \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \leq M.$$

Therefore,

$$\Lambda_s \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} = \sum_{k \in \rho(s)} \frac{\psi(|k|)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \text{sign} k} e^{ikx} = \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{k \in \rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \text{sign} k} e^{ikx}.$$

So we can write

$$\left\| \Lambda_s \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} \right\|_q = \frac{1}{\psi(2^s)} \left\| \sum_{k \in \rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \text{sign} k} e^{ikx} \right\|_q.$$

On the other hand, by Littlewood–Paley Theorem, there is an estimate

$$\left\| \Lambda_s \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} \right\|_q \leq C_5(q) M \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} \right\|_q.$$

So, in the end we get

$$\|\delta_s(F_\psi)\|_q = \left\| \sum_{k \in \rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \text{sign} k} e^{ikx} \right\|_q \ll \psi(2^s) \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} \right\|_q.$$

Further, by using the last estimate and the well-known relation (see, e.g., [4])

$$\left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} \right\|_q = 2^{s(1-\frac{1}{q})}, 1 < q < \infty,$$

we get

$$\|\delta_s(F_\psi)\|_q \ll \psi(2^s) 2^{s(1-\frac{1}{q})}. \quad (3)$$

Combining relations (2) and (3), we can write

$$I_1 = \left\| \sum_{s \geq l} \delta_s(F_\psi) \right\|_q \ll \left(\sum_{s \geq l} \psi^q(2^s) 2^{qs(1-\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

By the condition of the theorem, there exists $\varepsilon > 0$ such that the sequence $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ does not increase. Hence, we can write

$$\begin{aligned} E_m(F_\psi)_q &\ll I_1 \ll \\ &\ll \psi(2^l) 2^{l(1-\frac{1}{q}+\varepsilon)} \left(\sum_{s \geq l} 2^{-s\varepsilon q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\ &\ll \psi(2^l) 2^{l(1-\frac{1}{q})} = \psi(m) m^{1-\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Now consider the case $2 < q < \infty$. Applying Littlewood–Paley Theorem and the Minkowski inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \left\| F_\psi - \sum_{s < l} \delta_s(F_\psi) \right\|_q &= \left\| \sum_{s \geq l} \delta_s(F_\psi) \right\|_q \ll \\ &\ll \left\| \left(\sum_{s \geq l} |\delta_s(F_\psi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q = \\ &= \left(\left\| \sum_{s \geq l} |\delta_s(F_\psi)|^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ &\ll \left(\sum_{s \geq l} \|\delta_s(F_\psi)\|_{\frac{q}{2}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{s \geq l} \|\delta_s(F_\psi)\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Next, using (3) and repeating the considerations made for the case $1 < q \leq 2$, we obtain the required estimate

$$E_m(F_\psi)_q \ll \psi(m) m^{1-\frac{1}{q}}, \quad 2 < q < \infty.$$

Thus, the required upper bound is established.

We now determine the lower bounds. Let $t^* \in T_m$ be the polynomial of the best approximation of the function $F_\psi(x, \beta)$ in the space L_q , $1 < q < \infty$, that is

$$E_m(F_\psi)_q = \inf_{t \in T_m} \|F_\psi - t\|_q = \|F_\psi - t^*\|_q,$$

and

$$F_2(x, \beta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k|^{-2} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \text{sign} k} e^{ikx}.$$

Consider the quantity

$$J = (F_\psi - t^*, F_2 - S_m(F_2)) = (F_\psi, F_2 - S_m(F_2)) - (t^*, F_2 - S_m(F_2)) = (F_\psi, F_2 - S_m(F_2)).$$

On the one hand, by Hölder's inequality, we can write

$$\begin{aligned} J &\leq \|F_\psi - t^*\|_q \|F_2 - S_m(F_2)\|_{q'} = \\ &= E_m(F_\psi)_q \|F_2 - S_m(F_2)\|_{q'}, \end{aligned}$$

where $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Since (see, e.g., [3]),

$$\|F_2 - S_m(F_2)\|_{q'} \ll 2^{-m(2-\frac{1}{q})},$$

then

$$J \ll E_m(F_\psi)_q 2^{-m(2-\frac{1}{q})}. \quad (4)$$

On the other hand, for the value of J we can write

$$\begin{aligned} J &\gg \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \psi(|k|) |k|^{-2} \gg \\ &\gg \sum_{s \geq m} \sum_{k \in \rho^+(s)} \psi(k) k^{-2} = \\ &= \sum_{s \geq m} \sum_{k=2^{s-1}}^q \psi(k) k^{-2} \gg \\ &\gg \sum_{s \geq m} \psi(2^s) 2^{-s} \gg \psi(m) 2^{-m}, \quad (5) \end{aligned}$$

where $\rho^+(l) = \{k: 2^{l-1} \leq k < 2^l\}$.

Taking into account relations (4) and (5), we obtain

$$\psi(m) 2^{-m} \ll J \ll E_m(F_\psi)_q 2^{-m(2-\frac{1}{q})},$$

thus

$$E_m(F_\psi)_q \gg \psi(m) m^{1-\frac{1}{q}}.$$

The required lower bound is established, which proves the theorem.

Conclusions. We establish the exact order estimates of the best approximations of periodic functions that are analogues of the Bernoulli kernels in the space L_q , $1 < q < \infty$.

The assertion of Theorem for $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 1 - \frac{1}{q}$, $1 \leq q \leq \infty$ were established by Temlyakov V. N. [3]

REFERENCES

1. Stepanets, A. I. Classification and Approximation of Periodic Functions // Kluwer Academic Publishers, London, 1995.
2. Stepanets, A. I. Methods of Approximation Theory, Vols. 1, 2 // Proc. of the Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, Kiev, 2002.
3. Temlyakov, V. N. Approximation of functions with bounded mixed derivative// Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, 1986, Is.178.
4. Temlyakov, V. N. Approximation of Periodic Functions // Nova Science Publ., New York, 1993.
5. Zygmund, A. Trigonometric Series, Vols. 1, 2 // Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

Editor-in-chief: Dr. Xénia Vámos

The journal is published by the support of
Society for Cultural and Scientific Progress in Central and Eastern Europe

Készült a Rózsadomb Contact Kft nyomdájában.
1022 Budapest, Balogvár u. 1.
www.rcontact.hu