Когнитивните процеси осмисляне и обобщаване на знанията по математика

Д. В. Милушева-Бойкина

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски", гр. Пловдив, България
Corresponding author. E-mail: boikina@uni-plovdiv.bg

Paper received 08.05.21; Accepted for publication 22.05.21.

https://doi.org/10.31174/SEND-PP2021-252IX99-06

Резюме. В тстатията се разглеждат оследните два основни психични процеса – осмисляне на учебното съдържание по математика от учениците и неговото обобщаване. Чрез тези процеси се постига по-нататъшно овладяване на учебното съдържание и превръщането му в придобити от ученика знания. Усвояването на всяко понятие включва усвояване на: обема и съдържанието му, неговите връзки с по-рано изучении понятия, умения да се оперира с понятия и логическата обработка на понятието – получаване на следствия от определението и установяване на нови характеристични свойства. Представят се илюстриращи примери от учебната практика, с които се цели постигане на по-задълбочени, осъзнати и обобщени знания и умения от обучаемите.

Разработката е предназначена за действащите учители и студенти, подготвящи се за учители по математика.

Ключови думи: *обучение, мататематически понятия, осмисляне, обобщаване, знания.*

Въведение. Тази статия е част от общата тема „Когнитивни компоненти на самоорганизацията на учебния процес по математика". Самоорганизацията, като основна съставка на рефлексивния подход, съотнесен специално към обучението по математика и насочен основно към формиране на праксиологическа рефлексия у учещите (ученици, студенти, докторанти, учители), както и с оглед реализиране на идеалната цел на обучението – постигане на самоактуализация на субектите (и обучавани, и обучаващи), включва психичните процеси възприемане, разбиране, запомняне, осмисляне и обобщаване. Първите от тях сме разгледали в други статии ([3] и [6]). Предмет на изследване в настоящата статия са последните компоненти – осмислянето и обобщаването, които са важна част от мисловните компетентности на всеки съвременен човек. Разбира се, както мисленето и ученето, така и осмислянето, и обобщаването, особено при обучението по математика, са свързани с усилена волева дейност на субектите, участващи в учебния процес.

Целта на статията е да се представи систематизирано изложение на същността на психичните процеси осмисляне и обобщаване, които осигуряват овладяване на изучаваното учебно съдържание в училище и превръщането му в трайно придобити знания от учещите, а също да се покажат някои начини за тяхното осъществяване и илюстриране чрез примери върху конкретно учебно съдържание.

Изложение на основния материал. В пряка връзка с психичните процеси, разгледани в указаните статии, е понятието ***осмисляне.*** Терминът „*осмисляне*" идва от българския глагол „осмислям", който означава преработвам конкретна информация. Негови синоними са: придавам смисъл, придавам значение, давам съдържание, оживявам, одухотворявам. Следователно осмислянето е свързано със съзнателно усилие на собствения мозък на учещият субект да възприеме по-задълбочено не само разглеждания обект или изучаваната информация за него, но и нейната *преработка*, с оглед откриване и обосноваване на нови свойства или зависимости така, че в крайна сметка той да придобие обобщени знания, тъй като те по-лесно се запомнят и прилагат. Така например, при изясняване на методиката на изучаване на математически понятия, в нашия лекционен курс отбелязваме, че методиката е правилна, ако осигурява трайно и *съзнателно* усвояване на обема и съдържанието на понятията, връзките между понятията и умението да се оперира с понятия.

За да се формира съзнателно дадено понятие (особено при по-малки ученици, а също и при по-абстрактни понятия), за предпочитане е да се използва конкретно-индуктивният подход, понеже той повече спомага да се осмисли новото понятие, както и определящите го свойства, в сравнение с абстрактно-дедуктивния.

Пример 1. Реализацията на конкретно-индуктивния подход при формиране на ново математическо понятие включва провеждане на следната система от дейности, обособени в подетапи:

1. Разглежда се множество от представители от обема на родовото понятие, измежду които се включват и няколко представителя на родовото понятие, които не притежават видовия признак на понятието, което ще се дефинира. При тези представители се варират несъществени свойства.

2. Поставят се познавателни задачи и въпроси, чрез които в резултат на провеждане на мисловни операции (анализиране, сравняване, синтезиране, абстрахиране, обобщаване) над разглежданите представители се разкрива видовият признак на новото понятие.

3.Учителят дава наименованието на понятието и записва термина и символа (ако има такъв) на класната дъска.

4. Изисква се от учениците да опитат сами да изкажат определението, а ако не успеят, учителят го формулира.

5. Затвърдява се определението чрез няколкократно повторение. Иска се от учениците да дадат собствени примери, т.е. да посочат обекти от обема на новото понятие.

Последното дори трябва да стане методическо правило, защото то спомага да се намали формализма в обучението и да се осигури по-съзнателно, по-пълно и трайно усвояване на понятията.

При осъществяването на тези дейности учещите участват активно, проявяват в по-голяма степен самостоятелност, включвайки повече рецептори: зрение, слух, двигателни дейности – като чертане, писане, изчисляване и пр., което съществено допринася за задълбочено осмисляне на изучаваното понятие.

При реализиране на втория етап от методиката на изучаване на математически понятия – „усвояване на понятието", при това става въпрос за пълноценно, осмислено усвояване, обикновено се осъществяват следните дейности:

- Усвояване на обема и съдържанието на понятието – това започва още в урока, когато се дефинира понятието, но продължава и в следващите уроци чрез повторение на определението, чрез използването му в съждения. При осмисляне и заучаване на дадено определение е нужно да се изисква не само точна формулировка, но и разбиране на неговата структура. По такъв начин ние се стремим да научим учениците сами да конструират определения.
- Разкриване на връзките на новото понятие с порано изучените понятия. Това се реализира чрез деление и класифициране на понятията. Целта е да се осмисли и усвои не отделното понятие, а цялата система от понятия.
- Логическа обработка на понятието – тя включва получаване на следствия от определението му и установяване на нови характеристични свойства, с което се получават тъй нар. „разширени" определения или, както ги нарича проф. И. Ганчев, „дидактическа система от признаци" [5, с. 78]. Такива разширени определения са особено полезни при търсене и откриване на идеи за решаване на задачи и при съставяне на план за решение.

При формулиране на хипотези и конструиране на нови (за учещите се) теореми И. Вутова използва евристиката. Според нея „хипотезата е резултат от евристични конструкции, а в повечето случаи хипотезата е целта на евристиката. От друга страна, значителен дял в евристичните разсъждения се пада на обобщението. С други думи, обикновено до формулировка на хипотеза се достига след изминаване пътя на обобщението" [4, с. 31].

М. Андреев обръща внимание, че „пълноценно осмисляне и обобщаване в процеса на обучението се постига върху основата на достатъчно научни знания, които позволяват широко да се използват сравнението, аналогията и доказателството" [2, с. 82]. Към тях ще добавим още методите анализиране и синтезиране.

Пример 2. Имайки предвид, че когато знанията са осмислени и обобщени, те не само по-лесно се запомнят, но и по-целенасочено се прилагат, тук ще посочим, в качеството на илюстриращ пример, как е целесъобразно да се обобщят формулите, представящи теоремата за кофункциите и някои нейни вариации.

Така, вместо ученикът да помни поотделно всяка от четирите формули, изразяващи теоремата за кофункциите, а именно: $\sin(90^o-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90^o-\alpha)=\sin\alpha$, $\mathrm{tg}(90^o-\alpha)=\mathrm{cotg}\,\alpha$ и $\mathrm{cotg}(90^o-\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$, достатъчно е той да запомни нейната словесна формулировка: „Ако сборът на два ъгъла α и β е равен на 90^o, то всяка функция от единия ъгъл е равна на съответната ѝ кофункция от другия ъгъл", която символично може да се запише по следния начин: $\boldsymbol{f(90^o-\alpha)=cof(\alpha)}$. Записана така, тази формула представлява едно ***обобщение*** на горните четири конкретни формули и по-лесно се запомня.

По аналогичен начин могат да се обобщят и останалите четворки формули, които изразяват различни вариации на горната теорема.

а) Ако разликата на два ъгъла β и α (където α е остър[1] положителен ъгъл) е равна на 90^o, т.е. $\beta=90^o+\alpha$, то са изпълнени следните равенства: $\sin(90^o+\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90^o+\alpha)=-\sin\alpha$, $\mathrm{tg}(90^o+\alpha)=-\mathrm{cotg}\,\alpha$ и $\mathrm{cotg}(90^o+\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$. Тук и при четирите формули става въпрос за изразяване на коя да е от тригонометричните функции от ъгъл $(90^o+\alpha)$ чрез съответната нейна кофункция, но тук знакът на дясната страна е положителен (+) само при първата формула, а при останалите той е отрицателен (–). За да може да се запише тяхното обобщение само чрез една формула, е целесъобразно да се използва понятието модул (абсолютна стойност). Тогава формулата, която се явява *обобщение* и на четирите формули от случай а), ще има следния вид:

$\boldsymbol{|f(90^o+\alpha)|=|cof(\alpha)|}$.

Тази обща формула лесно се конкретизира, когато е нужно да бъде изразена коя да е от тригонометричните функции от даден тъп ъгъл β чрез съответната ѝ кофункция от остър ъгъл α (който е равен на $\beta-90^o$). За целта трябва само да се отчете знака на изразяваната функция във II квадрант (защото крайното рамо на тъпия ъгъл β е във II квадрант). Това отчитане може да се подпомогне, ако се използва табло с тригонометричната окръжност и построените към нея оси (тангенсова и котангенсова), от което нагледно се вижда, че в разглеждания случай само $\sin\beta>0$, а останалите тригонометрични функции имат отрицателен знак. Така например, $\mathrm{tg}135^o=\mathrm{tg}(90^o+45^o)=-\mathrm{cotg}45^o=-1$, $\mathrm{cotg}\,150^\circ=\mathrm{cotg}(90^o+60^o)=-\mathrm{tg}60^o=-\sqrt{3}$, а $\cos 108^\circ=-\sin 18^o$, чиято стойност също е ирационално число. Последното може да се установи по различни начини, като се използват знания или по планиметрия, или само по тригонометрия, но това не е предмет на тази статия.

б) Ако сборът на два ъгъла α и β е равен на 270^o, т.е. $\beta=270^o-\alpha$, то $\sin(270^o-\alpha)=-\cos\alpha$, $\cos(270^o-\alpha)=-\sin\alpha$, $\mathrm{tg}(270^o-\alpha)=\mathrm{cotg}\,\alpha$ и $\mathrm{cotg}(270^o-\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$. Тук се има пред вид, че ако α е остър положителен ъгъл, то β е изпъкнал ъгъл с второ рамо в III квадрант, откъдето следва, че знаците на $\sin\beta$ и $\cos\beta$ са отрицателни, а на $\mathrm{tg}\beta$ и $\mathrm{cotg}\,\beta$ са положителни. В този случай *обобщената формула* на тези четири тригонометрични формули е: $\boldsymbol{|f(270^o-\alpha)|=|cof(\alpha)|}$. И тук могат да се правят конкретизации, като се използва казаното за знаците на изразяваната функция в III квадрант. Например $\cos 240^o=\cos(270^o-30^o)=-\sin 30^o=-\frac{1}{2}$,

$$\sin 225^o=\sin(270^o-45^o)=-\cos 45^o=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

[1] Това ограничение се налага поради факта, че в четиризначните таблици по математика за тригонометричните функции се разглеждат стойностите им само за остри положителни ъгли.

в) Ако разликата на два ъгъла β и α (α е остър положителен ъгъл) е 270^o, т.е. $\beta = 270^o + \alpha$, то $\sin(270^o + \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(270^o + \alpha) = \sin\alpha$, $\operatorname{tg}(270^o + \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$ и $\operatorname{cotg}(270^o + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Ясно е, че в разглеждания случай второто рамо на ъгъла β е в IV квадрант, а там само $\cos\beta > 0$.

Обобщената формула сега ще бъде $|\boldsymbol{f(270^o + \alpha)}| = |\boldsymbol{cof(\alpha)}|$. От нея също могат да се правят конкретизации по посочения по-горе начин, като се отчита, че сега $\cos\beta > 0$. Например $\sin 330^o = \sin(270^o + 60^o) = -\cos 60^o = -\frac{1}{2}$.

Ако разгледаме обособените по-горе четири обобщения (на теоремата за кофункциите и получените от нея вариации), бихме могли да си поставим за цел да съставим нова формула, която да обобщава и четирите разгледани обобщения. Какво е общото за всички тях? Първо, дясната им страна е една и съща. Второ, в лявата страна на тези обобщения стои модул на коя да е тригонометрична функция от ъгъл, за чието второ рамо (независимо в кой квадрант се намира то), може да се счита, че то, това рамо на ъгъла, е като че ли „около” ординатната ос Oy. Ъглите в лявата страна на четирите формули са $(90^o \pm \alpha)$, $(270^o \pm \alpha)$. Освен това тези ъгли също могат по-общо да се запишат само чрез един запис така: $\left((2n-1)90^o \pm \alpha\right)$ или, ако се използва радианната мярка, $\left((2n-1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$. Тогава търсеното ***обобщение*** на всички разгледани по-горе обобщения ще изглежда съответно така: $\left|\boldsymbol{f}\left((\boldsymbol{2n-1})\boldsymbol{90^o} \pm \boldsymbol{\alpha}\right)\right| = |\boldsymbol{cof(\alpha)}|$ или $\left|\boldsymbol{f}\left((\boldsymbol{2n-1})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} \pm \boldsymbol{\alpha}\right)\right| = |\boldsymbol{cof(\alpha)}|$.

Пример 3. Да разгледаме формулата за степенуване на сбора или разликата от две числа или от два израза в квадрат, а именно: $(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$, която се изучава от учениците в 7. клас. За да се постигне по-задълбочено и пълно *осмисляне* от учениците и евентуално *обобщение* на същата, е уместно тя да се анализира. Това анализиране може да се осъществи от различни гледни точки. Една от тях се отнася до нейните приложения. Тази формула може да се използва за:

а) повдигане на произволен двучлен в квадрат;

б) разлагане на множители такива изрази, които имат вида $u^2 \pm 2uv + v^2$, където $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ са произволни изрази или числа;

в) повдигане на многочлен в квадрат – достатъчно е да се замени израза $\boldsymbol{v}$ с $(x \pm y)$, за да се получи правило за повдигане в квадрат на тричлена $u + x \pm y$ (което се явява едно обобщение);

г) за изразяване сбора от квадратите на два израза чрез квадрата на техния сбор (или разлика) и произведението им: $u^2 + v^2 = (u \pm v)^2 \mp 2uv$;

д) за приближено коренуване на числа, които са близки до точни квадрати – например при достатъчно малки стойности на числото v от равенството $(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$ се получава $(u \pm v)^2 \approx u^2 \pm 2uv$ (с абсолютна грешка, равна на v^2), откъдето пък $\sqrt{u^2 \pm 2uv} \approx u \pm v$. [7, с. 67-68]. Така например $\sqrt{15{,}2} = \sqrt{16 - 0{,}8} = \sqrt{4^2 - 2.4.0{,}1} \approx 4 - 0{,}1 = 3{,}9$.

Друга гледна точка на анализа на формулата $(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$, с оглед нейното по-пълно *осмисляне*, е следната. Както в лявата, така и в дясната страна на това тъждество изразите са от една и съща степен (втора) относно u и/или v. Но докато в лявата страна имаме само едно събираемо, наричано още „точен квадрат”, то в дясната страна имаме три събираеми, всяко от които е от втора степен. Затова изрази, като този в дясната страна на горната формула, се наричат понякога „хомогенни квадратни тричлени” относно u и v.

За да се *осмислят*, *обобщят* и *систематизират* знанията на учениците относно формулите за съкратено умножение, е целесъобразно да се проведат аналогични разсъждения и върху формулата за степенуване на трета степен изрази от вида $u \pm v$, където u и/или v са числа или изрази:

$(u \pm v)^3 = u^3 \pm 3u^2v + 3uv^2 \pm v^3$.

В това тъждество отново двете страни са изрази от една и съща степен (трета), но докато в лявата страна имаме само едно събираемо, наричано още „точен куб”, то в дясната страна имаме четири събираеми, всяко от които е от трета степен, като постепенно намаляват степените на израза (променливата, числото) $\boldsymbol{u}$, а се увеличават степените на израза (променливата, числото) $\boldsymbol{v}$.

С цел постигане на още по-задълбочено осмисляне, систематизиране и *обобщаване* на знанията на учениците относно формулите за съкратено умножение от по-висока степен (поне в неурочните форми на обучение) можем да ги запознаем с тъй нар. „триъгълник на Паскал” за определяне коефициентите в дясната страна на разглежданите тъждества.

В своя *„Трактат за аритметическия триъгълник“* Блез Паскал дава определение на т.н. „триъгълник на Паскал“ (наричан още *„характеристичен триъгълник“*) – таблицата по-долу, в която числата, показващи коефициентите на представянето на израза $(u \pm v)^n$, където $n \in \mathbb{N}$, са разположени във вид на триъгълник (фиг. 1).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
. . . .
. . . .

Фиг. 1. Триъгълник на Паскал

Какво представляват числата в този „триъгълник” и как се получават те? За да получим подходящи отговори на тези въпроси от учениците, първо е целесъобразно да анализираме с тях тъждеството $(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$. От него се вижда, че коефициентите в дясната страна на това равенство са съответно 1, ± 2, 1. Това са числата в третия ред от Триъгълника на Паскал, взети по абсолютна стойност (модул). На следващия ред са числата (също взети по модул), които се получават като коефициенти, когато се повдига на трета степен изразът $(u \pm v)$. Както е известно, за степенуването в трета степен на този израз също има готова формула в справочника, който могат да ползват учениците и студентите, а именно: $(u \pm v)^3 = u^3 \pm 3u^2v + 3uv^2 + v^3$.

За степенуване в степени, по-високи от трета, обаче в справочника няма готови формули. Затова Триъгълникът на Паскал е много удобен за намиране коефициентите при повдигането в произволна степен на въпросните сбор или разлика от числата (или изразите) u и v. При това знак минус се поставя само на коефициентите пред нечетните степени на v и то само тогава, когато се степенува разликата $(u - v)$ на нечетен степенен показател.

За някои ученици може да представляват интерес фактите, че числото 1 от първия ред е резултатът от повдигането на въпросните сбор или разлика на нулева степен: $(u \pm v)^0 = 1$, а на втория ред са самите коефициенти пред u и v, т.е. при „степенуване” този израз на първа степен: $(u \pm v)^1 = u \pm v$.

Числата в следващите редове на Триъгълника на Паскал не се помнят наизуст, а е важно да се *разбере* само *алгоритъмът*, т.е. начинът на тяхното получаване. За достигане до него, е целесъобразно отново да се анализират, съвместно с учениците, числата от Триъгълника на Паскал, като се започне от втория ред надолу, а именно: първото число на всеки ред е винаги 1, последното число пък е 1 или –1 в зависимост от това дали изразът $\boldsymbol{v}$ е повдигнат на четен или на нечетен степенен показател (когато се степенува разликата $u - v$), а останалите числа се получават от предходния ред, като се съберат по двойки съседните числа от предишния ред и резултатът се записва под/между тях. Например числото 7 от последния изписан ред на тази таблица показва, че въпросният сбор (или разлика) се повдига на 7-ма степен. Този коефициент е получен от 1+6 (от горния ред), а следващият коефициент 21 е получен от 6+15, коефициентът 35 – от 15+20, следващият 35 – от 20+15 и т.н. Тук важи горната забележка, че ако повдигаме разликата $(u - v)$ на 7-ма степен (която е нечетна), то знаците на тези коефициенти ще се сменят през един, а именно те ще бъдат:

1, –7, 21, –35, 35, –21, 7, –1.

Ще отбележим още, че разгледаната по-горе таблица, представяща Триъгълника на Паскал, може да бъде продължавана надолу неограничено, но на практика се продължава до онзи ред, в който второто число е именно степенният показател, на който трябва да се повдигне разглежданият израз $(u \pm v)$ и да се намерят нужните коефициенти съгласно описания по-горе алгоритъм.

И тъй, Триъгълникът на Паскал ни дава коефициентите при повдигането на израза $(u \pm v)$ на конкретен степенен показател. Тук ще отбележим още, че при това степенуване всички събираеми са едночлени от една и съща степен – степента, в която се повдига изразът $(u \pm v)$. Така, в общия случай, ако се повдига този израз в степен $\boldsymbol{n}$-та, където $\boldsymbol{n}$ е четно число, т.е. имаме степента $(u \pm v)^n$, то при записване на резултата от степенуването първото събираемо ще съдържа само u^n, последното – само v^n, а при второто събираемо имаме $u^{n-1}v$, т.е. то пак е от степен n-та, като пред него е коефициентът, изчислен по описания погоре алгоритъм (получават се от числата на предходния ред в Триъгълника на Паскал, стоящи непосредствено над търсения коефициент вляво и вдясно от него) според конкретния степенен показател $\boldsymbol{n}$ в разглежданата степен $(u \pm v)^n$; предпоследното събираемо ще бъде $u.v^{n-1}$, като пред него е коефициентът, който е пресметнат и за събираемото $u^{n-1}v$. За третото събираемо имаме $u^{n-2}v^2$, а предпредпоследното събираемо е u^2v^{n-2}, като и двете са от n-та степен и имат един и същ коефициент, пресметнат по същия алгоритъм, и така нататък, докато се стигне до средата на реда. Освен това при всяко следващо събираемо постепенно намаляват степенните показатели на множителя, който съдържа числото (израза) $\boldsymbol{u}$, но същевременно постепенно се увеличават степенните показатели на множителя, съдържащ числото (израза) $\boldsymbol{v}$. За изчисляването на коефициентите и на тези събираеми важи казаното вече по-горе.

Ако ли степеният показател $\boldsymbol{n}$ е нечетно число $(2k - 1)$, където $k \in \mathbb{N}$, то знаците на коефициентите ще се сменят през един (както бе посочено по-горе за случая $n = 7$ от фиг. 1).

Чрез математическа индукция Блез Паскал доказва как биномните коефициенти се получават от тази таблица, а също показва и приложението им в комбинаториката и теорията на вероятностите. Самият термин „комбинаторика“ е въведен именно първо от Блез Паскал [1, с. 56].

Опитът от използване в учебната практика на описаните по-горе разяснения и коментарии с учениците показва, че чрез тях те действително осмислят в значителна степен разгледания учебен материал и го прилагат самостоятелно при конкретни задачи. Освен това учениците се обучават и придобиват умения да извършват съответни обобщения на разглежданите формули, което има съществена образователна и практическа стойност.

Изводи. В заключение ще отбележим още веднъж, а също и практиката го потвърждава, че *осмислянето* на учебното съдържание е немислимо без да положи учещият субект сериозно умствено усилие и съзнателно да извлече нова, допълнителна информация за изучаваните математически обекти, да разкрие нови връзки или закономерности, които спомагат да се придобият обобщени знания. А за да се постигне това, е необходимо той да проявява висока степен на активност и самостоятелност в познавателната си дейност.

По-общо казано, за да се пробуди съзнанието на човека в съвременния живот, е необходимо всички процеси и действия да се извършват съзнателно, като се влага и ново съдържание в тях. Този е пътят към осмислянето на нещата, осмислянето на живота. Затова процесите *осмисляне* и *обобщаване* на учебния материал имат непосредствена връзка с неговото трайно овладяване.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова, Н. В. Математически термини. София: Наука и изкуство, 1984. 178 с.
2. Андреев, М. Дидактика. София: Народна просвета, 1981. 374 с.
3. Бойкина, Д. Относно разбирането в обучението по математика. // Математика и математическо образование, СМБ, 2021, с. 222-230.
4. Вутова, И. Теореми, аналогия, евристика. София: УИ Св. Климент Охридски, 2020. 159 с. ISBN 978-954-07-4914-3
5. Ганчев, И., Нинова, Ю., Никова, В. Методика на обучението по математика (Обща част), Благоевград: УИ Неофит Рилски, 2002. 148 с. ISBN 954-680-233-6
6. Милушева-Бойкина, Д. В. Когнитивният процес запомняне при обучението по математика. // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, IX (97), Issue: 246, 2021 Feb. p. 21-24.
7. Славов, К. (1978). Подготовка на учениците за самостоятелна работа по математика. София: Народна просвета, 111 с.

REFERENCES

1. Alexandrova, N. V. (1984). Mathematical Terms. Sofia: Nauka i Izkustvo, 178 p.
2. Andreev, M. (1981). Didactics. Sofia: Narodna prosveta, 374 p.
3. Boykina, D. About Understanding in Mathematics Education. // Mathematics and mathematics education, UBM, 2021, p. 222-230. ISSN 1313-3330
4. Vutova, I. (2020). Theorems, Analogy, Heuristics. Sofia: University Press St. Kliment Ohriddski, 159 p. ISBN 978-954-07-4914-3
5. Ganchev, I., Ninova, Y., Nikova, V. (2002). Methodology of Mathematical Education (General part), Blagoevgrad: University Press Neofit Rilski, 148 p. ISBN 954-680-233-6
6. Millousheva-Boykina, D. V. The Cognitive Process of Memorization in Mathematics Education // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, IX (97), Issue: 246, 2021 Feb. p. 21-24.
7. Slavov, K. Preparing Students for Individual Work in Mathematics. Sofia: Narodna prosveta, 1978. 111 p.

The Cognitive Processes of Understanding and Generalization of Mathematical Knowledge

D. V. Millousheva-Boykina

Abstract. This article discusses the following two main mental processes – understanding the content of mathematics by students and its generalization. Through these processes, further mastering of the learning content and its transformation into knowledge acquired by the student is achieved. The assimilation of each concept includes the assimilation of: its volume and content, its connections with previously studied concepts, skills to operate with concepts and the logical processing of the concept – obtaining consequences from the definition and establishing new characteristic properties. Illustrative examples from the teaching practice are presented, which aim to achieve more in-depth, aware and generalized knowledge and skills of the learners. The paper is intended for current teachers and students who are preparing for mathematics teachers.

Keywords: *education, mathematical concepts, reasoning, generalization, knowledge.*