

Место и значение методики решения задачи для формирования умений математического моделирования при обучении учащихся

Г. Д. Катеринюк

Винницкий государственный педагогический университет имени Михаила Коцюбинского
Corresponding author. E-mail: galina-zk@ukr.net

Paper received 14.02.20; Accepted for publication 25.02.20.

<https://doi.org/10.31174/SEND-PP2020-222VIII90-03>

Аннотация. Наше исследование показывает, что проблема формирования умений математического моделирования в учащихся актуальна во многих странах. Ключевую роль в процессе формирования умений математического моделирования в учащихся мы отводим специальной системе задач. В статье предлагаются конкретные примеры прикладных задач, взятых из специально созданного банка авторских задач. Сделан вывод, что формирование компетентности выпускников школы в математическом моделировании является одной из основных задач учителя математики.

Ключевые слова: математическое моделирование, умение моделирования, прикладная задача, формирование компетентности, методика решения задачи.

Введение. В 2006 году в Рекомендациях 2006/962/ЕС Европейского Парламента от 18 декабря 2006 года «Об основных компетенциях на протяжении всей жизни» [14] указано восемь основных компетентностей, которые необходимы каждому человеку для самореализации и личностного развития. В этом списке математическая компетентность указана третьей. Ученые по-разному раскрывают содержание математической компетентности. Могенс Нисс [13] определил восемь компонентов для математической компетентности: математическое мышление (умение мыслить с помощью математики); постановка и решение математических задач; математическое моделирование; математическое доказательство; изображение математических объектов; использование математической символики; использование различных средств и инструментов (включая информационные технологии) в процессе решения математических задач. В школе, в соответствии с определенными в программах по математике результатами, учителя должны обеспечить условия для формирования математической компетентности, в частности, для развития у учащихся умений математического моделирования. Ключевую роль в процессе формирования умений математического моделирования в учащихся мы отводим специальной системе задач, подобранных учителем на конкретный урок математики. Выстраивая такую систему задач на урок, учитель математики должен учесть ряд важных аспектов: уровень необходимых знаний и умений у учащихся конкретного класса, возможности содержания задачи для возбуждения интереса учащихся к ее решению и тому подобное. Методика решения каждой задачи должна восприниматься учителем как необходимая составляющая целостного процесса развития мышления учащихся, формирования их практической компетентности, развития их личности.

Краткий обзор публикаций по теме. Кипрские ученые в статье «Математика через 5E «Инструктивная модель» и математическое моделирование: Геометрические объекты» [16], анализируют результаты исследований по влиянию на математические достижения, навыки решения задач и взгляды учеников с помощью учебной модели 5E и метода математического моделирования в процессе изучения темы

«Геометрические объекты». В результате статистического анализа сделан вывод, что обучение с помощью 5E «Инструктивная модель» в экспериментальной группе 1 и метода математического моделирования в экспериментальной группе 2, улучшило академические достижения учащихся; однако метод математического моделирования был более результативным для математических достижений и навыков решения задач.

Роли математического моделирования в обучении математике уделяют все большее внимание в Турции. В статье «Математическое моделирование в математическом образовании: Основные понятия и подходы» [8] авторы утверждают, что растущий объем литературы на эту тему выявляет различные подходы к математическому моделированию и связанных с ними понятий, наряду с различными перспективами использования математического моделирования в обучении и изучении математики с точки зрения определений моделей и моделирования, теоретической основы моделирования и тому подобное. В статье анализируются и обсуждаются два подхода к использованию моделирования в математическом образовании, а именно моделирование как средство обучения математике и моделирование как цель обучения математике.

Влияние метода математического моделирования на уровень творческого мышления учащихся исследовалось в Польше [7]. Было установлено, что метод инструкции, который применялся в экспериментальной группе, положительно повлиял на уровень творческого мышления учащихся. Сделан вывод, что будет полезно учитывать метод математического моделирования при введении новых понятий в процессе обучения с учетом его положительного влияния на уровень творческого мышления учащихся.

Немецкие исследователи в статье «Использование стратегии обучения чтению для содействия компетентности математического моделирования учеников: результаты квази экспериментального контроля» [10], приводят результаты исследований уровня компетенций математического моделирования учащихся за 15-недельным обучением стратегии чтения. Результаты показали, что ученики, которые участвовали в обучении стратегии чтения, ощущают рост компетенций

математического моделирования, но это же увеличение также может наблюдаться и у учеников, которые не принимали участия в тренинге чтения. Сделан вывод, что вопрос о развитии компетенций математического моделирования с использованием обучения чтению является открытым для обсуждения.

В статье «Компетентность математического моделирования в будущих учителей математики» [15] авторы с Индонезии приводят результаты исследований, согласно которым - компетентность в математическом моделировании начинающих учителей математики в Индонезии имеет невысокий уровень. Наибольшие трудности при этом возникают в использовании графического представления, интерпретации и связи математического решения с контекстом реального мира.

Активно исследуются проблемы формирования у учащихся умений математического моделирования русскими учеными. В статье «Развитие мета предметных компетентностей учащихся 7-9 классов базовых школ путем внедрения междисциплинарных математических курсов» [9], описан один из возможных междисциплинарных курсов для учащихся 7-9 классов базовой школы, что связывает математику с естественными науками, и выяснена роль таких курсов в формировании и развитии мета предметных компетентностей учащихся. В статье «Интеграция математических и естественных знаний в проектную деятельность школьников» [12], авторы определяют возможности применения проектной деятельности в интеграции математических и естественно-научных дисциплин и формулируют методические рекомендации по их широкому применению в процессе обучения. Обосновывается необходимость применения технологии, базирующейся на проектах, в виде междисциплинарных проектов по математике; предложены основные модели интеграции школьных дисциплин в контексте реализации возможностей обучения на основе проекта; проектные темы интегрированных дисциплин, отличающихся по времени, объему и количеству; выявлены особенности их использования в процессе изучения математики. В статье «Преподавание элементов математического моделирования в курсе математики средней школы» [11], авторы стремятся определить элементы математического моделирования, которые могут и должны быть должным образом сформированы в школе. Авторы предлагают воспользоваться системой измененных задач, содержащихся в учебниках школьной математики. Статья доказывает необходимость ознакомления школьников со структурой процесса математического моделирования, особенностями моделей, целью их использования.

Значительное внимание проблеме формирования у учащихся умений математического моделирования уделено и в публикациях украинских ученых. В исследованиях украинских ученых установлено, что использование системы учебных задач с элементами математического моделирования способствует развитию творческих способностей и научного типа мышления старшеклассников, повышает уровень их теоретических знаний по математике и естественных предметов, стимулирует развитие логического мышления

и интеллектуальных умений. В. А. Швец [6] выделяет следующие этапы решения прикладных задач в школе методом математического моделирования: создание математической модели – перевод задачи с естественного языка той отрасли, где она возникла, на язык математики; исследование математической модели – решение полученной математической задачи; интерпретация решений, то есть перевод решения математической задачи с языка математики на язык той области, где она возникла.

Цель данной статьи – объяснить важность для формирования и развития умений математического моделирования в учащихся специальной методики решения каждой прикладной задачи, которая отображена учителем для урока математики.

Материалы и методы. Основная сложность для учащихся в процессе математизации текста прикладной задачи заключается в правильном построении математической модели, которой может быть уравнение, неравенство или их системы, функции и тому подобное. Для того, чтобы переформулировать содержание задачи языком математики, учащимся необходимо тщательно изучить и правильно толковать задачу, формализовать вопрос в ней, выразив искомые величины с помощью известных и введенных переменных. На этом этапе в учащихся возникают различные по характеру проблемы. Иногда они связаны с непониманием физических, химических, экономических терминов, законов, зависимостей. В частности, далеко не все ученики четко осознают соотношения между расстоянием, скоростью и временем в условиях равномерного и неравномерного движения, между концентрацией вещества и его долей в смесях, между объемом выполненной работы и производительностью труда и тому подобное. Ученики испытывают трудности в определении скорости сближения объектов при движении навстречу или в одном направлении, плохо ориентируются в движении по кругу, испытывают трудности в выборе единиц измерения при решении задач на совместную работу. Также в процессе составления математической модели учащиеся отвлекаются на несущественные для конкретной задачи свойства объектов, на второстепенные условия, которые не влияют на решение задачи. Здесь могут помочь вспомогательные модели: рисунки, таблицы и т. п.

Результаты наших исследований, опрос учителей математики дают основания утверждать, что наиболее сложным для учащихся является первый этап моделирования. Построение математической модели является достаточно серьезной проблемой для учащихся, поскольку они в недостаточной степени умеют: декодировать информацию, заложенную в условии прикладной задачи; абстрагироваться от несущественных свойств исследуемых объектов в задаче; выявлять и правильно интерпретировать взаимосвязи между объектами, которые рассматриваются в условии задачи; формализовать вопрос задачи, выразив искомые величины через известные и введенные переменные.

Чтобы обеспечить надлежащие условия для формирования умений математического моделирования в учащихся необходимо иметь достаточное количество задач. Такие задачи в современных школьных учеб-

никах математики, конечно, есть. Однако, по нашему мнению, потребность в расширении списка актуальных по содержанию прикладных задач, для эффективного использования на уроках математики, все-таки существует. В процессе поиска и обоснования приемов и средств улучшения условий формирования умений математического моделирования у учащихся мы создали банк авторских задач. Основная цель предлагаемых нами задач – помочь учителям математики подбирать на урок задачи, которые, с одной стороны, удобны для формирования умений математического моделирования, а с другой, способны пробудить интерес учеников к обучению математике, поскольку отражают реальные современные потребности человека, дают ответы на актуальные жизненные вопросы.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим конкретные примеры методики решения созданных нами прикладных задач, основной целью которых является формирование у учащихся умений математического моделирования.

Задача 1. В связи с подорожанием бензина в таксиста возник вопрос: стоит ли продолжать заниматься этим делом? Для расчета таксист взял последний месяц, за который он проехал 4000 км. Стоимость 1 литра бензина - 32 грн. Расход бензина на 100 км в среднем - 9 литров. Кроме этих сумм, таксист потратил 400 гривен на горюче-смазочные материалы и 1800 гривен на амортизацию. При каком тарифе на проезд чистая прибыль таксиста составит не менее 18000 гривен?

Решение.

- 1) $4000:100 \times 9 = 360$ (л) – потрачено бензина за месяц;
- 2) $360 \times 32 = 11520$ (грн) – потрачено средств на горючее;
- 3) Пусть x грн / км – тариф за проезд в такси, тогда $4000 \cdot x$ – возможная прибыль таксиста.

Вся прибыль состоит из всех расходов и чистой прибыли. Рассмотрим математическую модель задачи:

$$\begin{aligned} 4000 \cdot x &\geq 11520 + 400 + 1800 + 18000 \\ x &\geq 31720:4000 \\ x &\geq 7,93. \end{aligned}$$

Округлив результат получим, что для получения не менее 18 000 гривен чистой прибыли, тариф такси должен составлять 8 грн / км.

Ответ. Желаемый тариф – 8 грн / км, при котором чистая прибыль составит 18 280 гривен.

Обсуждение методики решения задачи 1. Указанная задача может быть использована учителем математики при изучении учащимися неравенств в 9 классе. Как показывает анализ подборки задач к теме «Неравенства» в современных украинских школьных учебниках алгебры для 9 класса, прикладных задач, в процессе решения которых есть возможность развивать умение математического моделирования у учеников, недостаточное количество. Решение указанной задачи может положительно повлиять на мотивацию учеников к изучению математики, ведь они могут понять, что математически компетентный таксист может критически оценить новую ситуацию, самостоятельно принять обоснованное решение. В этой зада-

че относительно большое количество данных величин и это важно с методической точки зрения, ведь мышление учеников может развиваться в условиях необходимости анализировать, выбирать, объяснять, обосновывать. Если есть возможность повысить уровень сложности задачи (например, в работе со способными к математике учениками), то можно ввести в условие этой задачи избыточные данные, которые не являются необходимыми для ее решения. В таком случае задача будет способствовать формированию в учащихся нелинейного мышления. Сейчас наметился поворот в человеческой деятельности и науке от одномерного, линейного мышления, характерного для повседневной жизни и классической науки, к мышлению многомерному и вероятностному. Нелинейность мышления предполагает признание многовариантности решений и вероятностного развития событий. Формирование нелинейного стиля мышления должно стать одной из важнейших задач школьного математического образования. Решение указанной задачи позволяет создать условия для свободного выражения учащимися различных дискуссионных мнений, поставить учеников в ситуацию, когда нужно аргументировать свою точку зрения. Появляется возможность формировать умение учащихся грамотно задавать вопросы и отвечать на них. Например:

- При каких условиях указанный тариф может быть ниже?
- Может ли таксист быть заинтересованным в снижении тарифа на проезд?
- Есть ли полученное значение тарифа проезда в такси экономически обоснованным для других владельцев такси?

Задача 2. Существует мнение, что покупать товары в интернет магазине дешевле. В магазине «Кочевник» термос Tramp стоит 720 грн. Для того чтобы приобрести термос в магазине покупателю нужно воспользоваться маршруткой, стоимость поездки в которой составляет 6 грн. Отделение транспортной компании «Новая почта» находится у дома покупателя. Этот же Термос в интернет магазине стоит 685 грн. Стоимость доставки Новой почтой составляет от 20 до 50 грн. Кроме того, при получении товара на почте нужно оплатить 2% от суммы + 20 грн. Если же объявленная стоимость товара составляет более 200 грн, то еще нужно оплатить 0,5% от объявленной стоимости. Где выгоднее покупателю совершить покупку: в магазине или интернет магазине?

Решение.

Минимальная стоимость покупки в интернете: цена товара + минимальная стоимость доставки + уплата при получении + дополнительная оплата (0,5%).

- 1) $685 \times 0,02 = 13,7$ (грн) – 2% от стоимости термоса;
- 2) $685 + 20 + 13,7 + 20 + 3,425 = 742,125$ (грн) – стоимость термоса в интернет магазине;
- 3) $720 + 12 = 732$ (грн) – стоимость термоса в магазине «Кочевник»;

Ответ. Покупка указанного термоса в магазине выгоднее, как минимум на 10 гривен.

Обсуждение методики решения задачи 2. Данная задача является задачей бытового содержания. На

первый взгляд, в школьных учебниках встречаются подобные задачи. Однако, эта задача, по замыслу авторов, значительно приближена к современной реальной жизненной ситуации. Относительно большое количество данных в условии задачи рассматриваем как положительный аспект. Формулировка задачи начинается с констатации распространенной точки зрения. Важно, что математическое решение задачи позволяет обосновать ошибочность этой точки зрения. При грамотно выстроенной методике решения указанной задачи можем формировать не только математическую компетентность учащихся, но и определенным образом формировать экономическую грамотность учащихся на бытовом уровне. Это дает возможность обеспечить условия таких важных составляющих математической компетентности как положительное личностное отношение к обучению математике, а также жизненный опыт применения приобретенных математических знаний и умений. Под методически грамотной деятельностью учителя в процессе решения таких задач имеем в виду, в частности, организованный учителем математики стиль исследовательской деятельности учащихся конкретной возрастной категории, с активизацией компонентов критического мышления, с возможностью активной дискуссии относительно учета различных аспектов ситуации, которая исследуется. Главное, что важнейшими аргументами в таких дискуссиях должны выступать математические расчеты.

Задача 3. Изюм получают в процессе сушки винограда. Сколько килограммов изюма можно получить с 16 кг винограда, если виноград содержит 90% воды, а изюм - 5% воды. Рассчитайте, что выгоднее: приобрести готовый изюм на рынке, если его стоимость составляет 70 грн за килограмм, или изготовить его в домашних условиях, используя сушилку. Сколько можно сэкономить денег?

Важно: номинальная потребляемая мощность сушилки 0,6 кВт, тариф за электроэнергию составляет 0,9 грн / кВт до 100 кВт, и 1,68 грн / кВт этаж 100 кВт. Для высушивания указанного количества винограда нужно двое суток. Стоимость винограда составляет 35 грн / кг.

Решение.

	вода	сухое вещество
Виноград	90%	10%
Изюм	5%	95%

1) $16:100 \times 10 = 1,6$ (кг) – сухого вещества в 16 кг винограда;

2) $1,6: 95 \times 100 = 1,684$ (кг) – количество изюма з 16 кг винограда;

- 3) $0,6 \times 24 \times 2 = 28,8$ (кВт) – количество электроэнергии затраченной на сушку;
- 4) $28,8 \times 0,9 = 25,9$ (грн) – стоимость израсходованной электроэнергии;
- 5) $1,684 \times 70 = 117,88$ (грн) – рыночная цена изюма, полученного из винограда;
- 6) $35 \times 16 = 560$ (грн) – стоимость 16 кг винограда;
- 7) $560 + 25,9 = 585,9$ (грн) – цена 1,684 кг домашнего изюма.

Ответ. Стоимость домашнего изюма почти в 5 раз выше стоимости изюма приобретенного на рынке, поэтому сэкономить не удастся.

Обсуждение методики решения задачи 3. Учителю математики важно добиться от учеников четкого понимания значения и содержания каждого из выше описанных этапов процесса решения задачи с помощью математического моделирования. Это нужно для того, чтобы ученики хорошо поняли, что они решают не просто математическую задачу, а конкретную жизненную ситуацию математическими методами. Большое значение, в процессе формирования умений математического моделирования, мы предоставляем различным способам решения задач.

Выводы. Формирование компетентности выпускников школы в математическом моделировании мы рассматриваем как одну из основных задач учителя математики. Широкое и системное применение метода математического моделирования в течение изучения всего курса математики должно стать мощным средством формирования в учащихся навыков повседневного использования математики при изучении естественных предметов. Специально созданные условия для формирования умений математического моделирования в учащихся являются эффективным средством реализации профессиональной направленности обучения математике в школе. Методическое мастерство учителя математики в подборе задач на урок математики, с учетом различных аспектов организации учебно-познавательной деятельности учащихся, имеет определяющее значение для эффективности процесса обучения учащихся математическому моделированию. Таким образом, основным средством развития умений математического моделирования в учащихся профильной школы мы считаем специальную систему задач сконструированную учителем математики, с учетом требований целостности, интегративности, методической целесообразности и методического соответствия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підручник для 11-го класу закл. заг. серед. освіти. К.: Генеза, 2019. 304 с.
 2. Прокопенко Н.С., Захарійченко Ю.О., Кінашук Н.Л. Алгебра: підручник для 9 класу загальноосвітніх навч. закл. Харків. Вид-во «Ранок», 2017. 288 с.
 3. Катеринюк Г.Д. Розвиток математичних компетентностей учнів у процесі формування здатності до математичного моделювання. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Зб. наук. пр. Випуск 47. Київ-

Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016. С. 63-67
 4. Матяш О.І., Катеринюк Г.Д. Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2019. 270 с.
 5. Матяш О.І., Катеринюк Г.Д. Методические особенности системы задач для развития умений математического моделирования в учащихся профильной школы. Curriculumul școlar: provocări și oportunități de dezvoltare. MATERIALELE CONFERINȚEI ȘTIINȚIFICE INTERNAȚIONALE 7-8 decembrie 2018, Chișinău P. 84-89
 6. Швець В. Математичне моделювання як змістова лінія

- шкільного курсу математики. Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип.32. Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2009. С. 16-23.
7. Alper Ciltas. The Effect of the Mathematical Modelling Method on the Level of Creative Thinking. The New Educational Review. Toruń 2012. P. 103-113.
 8. Ayhan Kürşat ERBAŞ, Mahmut KERTİL, Bülent ÇETİNKAYA, Erdiç ÇAKIROĞLU. Mathematical Modeling in Mathematics Education: Basic Concepts and Approaches. EDUCATIONAL SCIENCES: THEORY & PRACTICE, 2014. 14(4). P. 1621-1627
 9. Gorev P. M., Masalimova A. R. Development of Meta-subject Competencies of the 7-9 Grades Basic School Students through the Implementation of Interdisciplinary Mathematical Courses. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2017. 13(7), P. 3919-3933.
 10. Hagen M., Leiss D., Schwippert K. Using Reading Strategy Training to Foster Students' Mathematical Modelling Competencies: Results of a Quasi-Experimental Control Trial. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2017. 13(7b), P. 4057-4085.
 11. Krutikhina M. V., Vlasova V. K., Galushkin A. A., Pavlush-

- in A. A. Teaching of Mathematical Modeling Elements in the Mathematics Course of the Secondary School. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2018. 14(4), P. 1305-1315
12. Luneeva O. L., Zakirova V. G. Integration of Mathematical and Natural-Science Knowledge in School Students' Project-Based Activity. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2017. 13(7), P. 2821-2840.
13. Niss M. Investigations into Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993. 270 p.
14. Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning. (2006/962/EC) Official Journal of the European Union L 394. P. 10-12
15. Riyan Hidayat, Zanaton H. Iksan. Mathematical Modelling Competency for Indonesian Students in Mathematics Education Programmes. Creative Education, 2018, 9, P. 2483-2490.
16. Tezer M., Cumhur M. Mathematics through the 5E Instructional Model and Mathematical Modelling: The Geometrical Objects. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2017. 13(8), P. 4789-4804.

REFERENCES

1. Ister O.S. Mathematics: (algebra and the beginnings of analysis and geometry, standard level): a textbook for 11th grade general education institutions. Kiev.: Heneza, 2019. 304 p.
2. Prokopenko N.S., Zakhariichenko Yu.O., Kinashchuk N.L. Algebra: a textbook for 9th grade general education institutions. Kharkiv. Publisher «Ranok», 2017. 288 p.
3. Kateryniuk H.D. The development of mathematical competences of students in the process of forming the ability to mathematical modeling. Scientific papers "Modern information technologies and innovative teaching methods in training: methodology, theory and experience problems" Issue 47. Kyiv-Vinnytsia: TOV firma «Planer», 2016. C. 63-67
4. Matiash O.I, Kateryniuk H.D. Methodical toolkit for forming students' ability to mathematical modeling. Vinnitsa: TOV «TVORY», 2019. 270 p.
5. Matiash O., Kateryniuk H. Methodical peculiarities of the system of math tasks for the development of skills of mathematical modeling in students of the profile school. The school curriculum: challenges and opportunities for development. Materials of the international scientific conference. December 7-8, 2018, Chisinau P. 84-89
6. Shvets V. Mathematical modeling as profound line of the school math course. Didactics of mathematics: Problems and Investigations: International Collection of Scientific Works. Issue # 32. Donetsk: DonNU, 2009. P. 16-23.

The place and significance of the methodology for solving the problem for the formation of mathematical modeling skills in the process of teaching students

H. D. Kateryniuk

Abstract. Our research shows that the problem of the formation of mathematical modeling skills in teaching students is relevant in many countries. A key role in the process of formation of mathematical modeling skills in teaching students is assigned to a special task system. The article offers specific examples of applied problems taken from a specially created bank of copyright problems. It is concluded that the formation of the competence of school graduates in mathematical modeling is one of the main tasks a teacher of mathematics.

Keywords: *mathematical modeling, modeling skill, applied problem, competence formation, problem solving technique.*