

Аналіз результатів закордонних досліджень щодо формування логічної компетентності учнів у процесі навчання математики

Р. С. Мілян

Вінницький державний педагогічний університет імені М. Коцюбинського, Вінниця, Україна
Corresponding author. E-mail: roksolana.milian@gmail.com

Paper received 24.09.20; Accepted for publication 12.10.20.

<https://doi.org/10.31174/SEND-PP2020-239VIII95-08>

Анотація. У статті здійснено аналіз закордонних досліджень щодо формування логічної компетентності учнів на уроках математики. У проаналізованих дослідженнях науковці виділяють засоби та прийоми, з допомогою яких учні вчать мислити, аналізувати та формувати висновки, що сприяє формуванню логічної компетентності. Якщо вчителі математики дбають про формування логічної компетентності учнів на уроках математики, то це стане потужним поштовхом для особистісного розвитку учнів та підвищення ефективності навчання в школі взагалі.

Ключові слова: логічна компетентність, навчання математики, розвиток мислення, математика.

Вступ. Навчання математики як логічна система окреслюється протягом багатьох десятиліть. Проте, останнім часом у навчанні математики можна спостерігати зниження акцентів на формуванні та доведенні гіпотез, використанні методів індуктивних та дедуктивних міркувань. Учні часто не розуміють, як обґрунтувати математичні результати, використовуючи означення, аксіоми або раніше доведені теореми. На сучасних уроках математики учні рідко знайомляться з основними положеннями логіки. Такі слова як міркування, дедукція, доведення та обґрунтування не входять до широко використовуваного словникового запасу учнів.

Професор Том Салле стверджував: «Багато учнів можуть пройти весь шлях середньої школи, навіть не усвідомлюючи, що математика - це не просто сукупність методів, які слід запам'ятати, а структура, яка дозволяє прокласти багато шляхів до успіху» [12]. Мислення - це основний вид діяльності під час навчання математики, який необхідний для низки цілей – для розуміння математичних понять, використання математичних ідей та гнучкості під час розв'язування математичних задач [1]. Kaur і Lam описують математичне мислення як сукупність компонентів, до яких входять базові знання та логічне мислення [15]. Roekel, президент Національної асоціації освіти США зауважує, що математичне мислення потрібно повністю інтегрувати в навчальні програми, щоб дати учням належну підготовку у XXI столітті [24]. Набувши логічної компетентності, учні можуть отримати потужний інструмент, який дозволить їм ефективніше використовувати математичні знання та вміння під час вивчення інших дисциплін.

Метою даної статті є аналіз результатів закордонних досліджень щодо формування логічної компетентності учнів у процесі навчання математики в школі.

Матеріали і методи. Ми проаналізували 31 публікацію, які надруковані у наукових журналах за межами України, автори яких не є українцями. У такому контексті наш аналіз є аналізом результатів досліджень, одержаних за кордоном. Наш науковий інтерес стосується методики формування логічної компетентності учнів у процесі навчання математики в школі.

У публікації [11] американських та китайських науковців представлено результати досліджень, які засвідчують, що мислення учнів базової школи не до-

статньо розвинене. Це означає, що уміння логічно мислити недостатньо розвинені. У публікації наведено приклади, які показують відсутність логічного мислення в учнів. В іншому дослідженні, проведеному грецькими науковцями, продемонстровано труднощі, які виникають в учнів під час вивчення геометрії. Pantziara M, Gagatsis A and Elia констатують, що низький рівень умінь учнів аналізувати геометричні рисунки свідчить про слабку сформованість логічного мислення [20].

Дослідження Poop & Leung демонструють, що учні з вищими навчальними досягненнями мали більш високі бали в тестах з геометрії. Крім того, виявлено високий показник кореляції між досягненнями учнів з геометрії та їх здатністю до логічного мислення [23].

Ball і Bass припускають, що математичне мислення передбачає математичне спілкування. Спілкування є невід'ємною частиною процесу мислення [1]. На думку Kaur і Lam, комунікація означає вміння використовувати математичну мову для висловлення математичних ідей та аргументів точно, стисло та логічно, використовувати математичні моделі інструменти (таблиці, діаграми, графіки тощо) стратегічно [15]. Ball і Bass вважають, що мислення – це основна навичка математики, яка необхідна для ряду цілей – для розуміння математичних понять, використання математичних ідей та гнучкості процедур та реконструкції [1]. Як заявляють Kaur і Lam про навчальний план Міністерства освіти Сінгапуру, математичне мислення стосується здатності аналізувати математичні ситуації та будувати логічні аргументи [15].

Рассел заявляє, що математичне мислення передбачає розробку, обґрунтування та використання математичних знань. Бачити математику як мережу взаємопов'язаних ідей є результатом математичного мислення [5]. Kaur і Lam вважають, що це стосується здатності бачити і пов'язувати математичні ідеї, математику та інші предмети, а також математику та повсякденне життя [15]. Таким чином, на думку авторів, математичне мислення можна описати трьома компонентами – спілкування, базові знання з математики та логічне мислення.

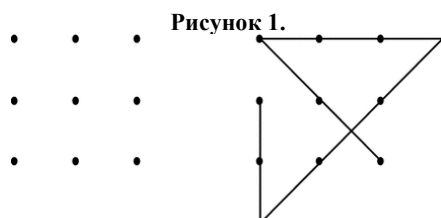
Дослідженнями Cragg L, Gilmore C. встановлено, що різноманітні загальнопізнавальні навички необхідні для успішності з математики [7]. Навички логічного міркування є важливими аспектом хороших

математичних здібностей. Також широко визнається, що вчителям нелегко перейти від «навчання на основі прикладів» до розв'язування задач, що спрямовані на розвиток мислення [17].

Основний підхід щодо розвитку логічної компетентності стосується розв'язування задач [17; 16; 22; 25; 26; 27]. Розв'язування задач, згідно опису Поля, розглядається як «пошук виходу з труднощів, досягнення мети, яка не була одразу досяжною» [22]. Задачі – це завдання, які не є стандартними для учнів і передбачають пошук можливої стратегії розв'язку [10]. Що не є стандартним, залежить від досвіду учнів, попередніх знань, таланту та навичок. Ми погоджуємось, що розв'язування задач є ключовою складовою формування логічної компетентності.

Perkins наполягає, щоб задачі були проблемними. Його книга «Ванна Архімеда: Мистецтво та логіка проривного мислення» [21] присвячена задачам, які не можна розв'язати за шаблоном згідно попереднього досвіду. Тобто він пропонує задачі, які учень повинен розв'язувати опираючись на процеси логічного мислення. Perkins розділяє задачі на 2 типи. Обидва типи задач розв'язуються, проте лише задачі першого типу сприяють формуванню логічної компетентності. Perkins також зауважує, що тип, до якого відноситься задача залежить від учня: для одного учня задача може бути задачею першого типу, а для іншого – другого типу.

Наприклад, задачею першого типу є задача з'єднання дев'яти крапок у масиві 3×3 чотирма прямими лініями без відривання олівця від паперу, розв'язання якого представлено на рисунку 1.



Щоб розв'язати цю задачу, Perkins зауважує, що учень повинен визнати, що обмеження перебування в квадраті, створеному масивом 3×3 , є обмеженням, яке накладається самостійно [21].

Японські вчителі вже багато років наголошують на необхідності учнів удосконалювати логічні уміння. Незалежно від причини, учням необхідно вдосконалювати навички логічного мислення та розв'язування математичних задач. Глибоке розуміння математики – це основна мета вивчення математики в японській спільноті вчителів математики. «Мета навчання математики для учнів, які запам'ятовують математичні факти та застосовують їх під час розв'язування математичних задач, буде простою «отримання вищої оцінки». Це не реальна мета навчання математики. Важливо допомогти учням вдосконалювати навички логічного мислення для глибокого розуміння математики». Японські вчителі математики підкреслюють важливість формування логічних умінь та досвіду їх використання [6].

Серед задач для формування логічної компетентності виділяють задачі що стосуються математичного моделювання. Моделювання передбачає поєднання

математики та навколишнього світу, застосування математики для розв'язування задач. Як такий, він є незамінним елементом в осмисленні математичної освіти. Математичні засоби використовуються, наприклад, для розуміння явищ, для прогнозування подій або для оптимізації процесів [2; 3; 13]. У таких країнах, як Нідерланди, а з недавніх пір – Австрія, математичне моделювання включається під час розробки навчальних програм [8].

Tajudin і Chinnappa зауважують, що важливими під час вивчення математики для формування логічної компетентності є задачі дослідження [30]. Ayele стверджує, що для вдосконалення логічного мислення учнів вчителі повинні використовувати творчість у класі, а також сприяти творчим роботам та реалізації ідеї учнів [31]. Відповідно до обширних дискусій у Комітеті з навчальних програм реформи Нідерландів [10], вважається, що важливими для формування логічних умінь є розв'язування задач на основі моделювання та дослідження.

Ключовим для учнів є обґрунтування протягом усього процесу розв'язування задач. Незалежно від того, чи учні вивчають алгебру чи геометрію, вони повинні обґрунтувати висновки, які вони роблять, працюючи над задачею. Це обґрунтування може бути письмовим або усним, числовим, алгебраїчним чи графічним; проте обґрунтування процесів є критичним як для успіху учнів, так і для розвитку логічних умінь та досвіду їх використання під час вивчення усіх дисциплін [4].

Основними будівельними блоками для формування логічної компетентності, на думку Bonnie M. Hodge, є визначення та сполучні слова «та» та «або». На жаль, учні приділяють менше уваги визначенням, ніж прикладам. Вони в основному вчать на прикладах, а не мислять дедуктивно. Кожна задача – це нова гора, на яку можна піднятися, не пов'язана з іншими задачами, які були представлені, продемонстровані чи обговорені. Що стосується дедуктивних міркувань, учні мало або зовсім не розуміють застосування визначення до конкретного прикладу. Зокрема, вони часто відмовляються (або ігнорують) частину визначення, що детально розглянуто у дослідженні Bonnie M. Hodge [32]. Важливе значення для розуміння визначень та наукових позначень є сполучні слова «та» та «або». Багато учнів часто ігнорують це слово і дотримуються лише першої частини визначення.

На думку Bonnie M. Hodge, логічно, як би учні підходили до розв'язування лінійних рівнянь, лише знайомившись із властивостями додавання / віднімання, множення / ділення чи рівності. Ідея полягає в тому, щоб учні логічно міркували упродовж усього процесу розв'язування задачі, а не просто запам'ятовували кроки, а потім застосовували їх. Якщо учнів навчати математиці виключно як процес запам'ятовування, вони рідко зможуть застосувати ці поняття до реальних даних. У процесі розв'язування, який використовує дедукцію, вони міркують від передумови до висновку, написавши ряд еквівалентних рівнянь. Як тільки вони обґрунтують основи пошуку алгебраїчного розв'язання рівняння, учні логічно перейдуть до розв'язування рівнянь, що містять змінну по обидві сторони від знака рівності, та до розв'язування тих,

що потребують спрощення, перед початком процесу перетворення. Ознайомивши учнів із поняттям дедуктивного міркування від даної передумови до висновку, вони можуть використовувати індукцію для формування висновків про рівняння, що є тотожностями чи суперечностями. Це замінює учням запам'ятовування того, що часто називають «особливими випадками» в підручниках з математики. Таким чином можна закласти основу для розв'язування рівнянь, яку можна розвивати, досліджуючи розв'язування рівнянь, які є квадратними, раціональними чи ірраціональними тощо [4].

Результати та їх обговорення. Аналіз вищевказаних досліджень закордонних авторів свідчить про те, що навички логічного міркування, насправді, часто взаємопов'язані з предметною областю математичних умінь. Наприклад, Nunes et al доводять причинно-наслідкові зв'язки між навичками логічного мислення та математичними здібностями у дітей. Однак, логічна компетентність іноді трактується як застосування логічних понять з математики, наприклад, їх розуміння, зворотні відношення (наприклад, між додаванням і відніманням), адитивність, взаємовідношення один до одного і один до багатьох тощо [19]. Рідко учень на уроках математики має можливість для відкриття та усвідомлення логіки. Використання сократичного методу навчання – використання цілеспрямованих запитань, щоб учні з'ясували сутність поняття – рідко використовується. Швидше демонструються готові розв'язання, поки учень не зрозуміє алгоритм або просто не запам'ятає процес.

Результати закордонних досліджень надають нам докази того, що математичні знання дітей ґрунтуються на розумінні основ логіки, що дозволяє припустити, що навички логічного міркування самі по собі необхідні для хорошого виконання математичних завдань. Кац [14] пояснив, що логічне мислення є важливим компонентом навчання математики. Ми погоджуємось, для прикладу, з думкою Bonnie M. Hodge, що спрямовуючи увагу учнів на аналіз частин визначення та сполучних слів, закладаються основи логічних умінь, які є важливими для розуміння математики.

Математична діяльність немислима без використання таких логічних прийомів, як порівняння, аналіз,

синтез, абстрагування, узагальнення. Як зауважив математик і філософ Б. Рассел, «математика і логіка розвивалися останнім часом паралельно; логіка стала математичнішою, а математика – логічнішою. Унаслідок цього тепер стало зовсім неможливо провести лінію поділу між ними; фактично вони стали одним цілим».

Нові державні стандарти включають вимоги до навчання математики, які чітко відносяться до логічної компетентності, наприклад, «визначає, описує та аналізує зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами реального світу, а також між математичними об'єктами», «виокремлює простіші проблеми у складі пропонованої проблемної ситуації», «зв'язує різні елементи математичних знань і вмінь, узагальнює їх, робить висновки» тощо. Уроки математики потрібно будувати таким чином, щоб підкреслити та проілюструвати відповідне використання логічних міркувань. Процес логічного мислення потрібно розглядати в основних рамках та принципах елементарної логіки. Це вимагає взаємодії між учнями та вчителями – як неформально в класі, так і під час оцінювання. Учні повинні наводити логічні аргументи, надаючи відповіді на математичні запитання та розв'язування задач.

Висновки. Логічна компетентність, на нашу думку, поєднує логічні вміння та досвід їх використання, необхідні для здійснення особистісно і соціально значущої продуктивної діяльності. Логічна грамотність і розвинене логічне мислення, а також здатність використовувати логічну грамотність і логічне мислення в навчальній діяльності та в житті є основою логічної компетентності.

Ціна відмови від спеціальної методичної системи формування та розвитку логічної компетентності учнів в школі є високою в математичній освіті. Це видно з великої кількості учнів, які рідко ставлять запитання «чому», а скоріше кажуть «продемонструйте приклад і дозвольте мені імітувати Ваш процес розв'язування». Якщо вчителі математики дбатимуть про формування логічної компетентності учнів на уроках математики, то це стане потужним поштовхом для особистісного розвитку учнів та підвищення ефективності навчання в школі взагалі.

ЛІТЕРАТУРА

- Ball D. L. and Bass H. Making mathematics reasonable in school (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics). 2003.
- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study. New ICMI Study Series Vol. 10. New York, NY: Springer. 2007.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). Applications and Modelling in Mathematics Education. New ICMI Studies Series no. 10, New York: Springer. 2006.
- Bonnie M. Hodge. Logical Thinking in Mathematics: From Oz to Awe! Source: Research and Teaching in Developmental Education, Spring 2003, Vol. 19, No. 2 (Spring 2003), pp. 41-46 Published by: New York College Learning Skills Association. URL: <http://www.jstor.com/stable/42802166>
- Brodie K. Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms (New York: Springer Science+Business Media). 2010.
- Corey D.L., Ninomiya H. Values of the Japanese Mathematics Teacher Community. In: Clarkson P., Seah W., Pang J. (eds) Values and Valuing in Mathematics Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. 2019.
- Cragg L, Gilmore C. Skills underlying mathematics: The role of executive function in the development of mathematics proficiency. Trends in Neuroscience and Education 2014.
- de Lange, J. Mathematics, insight and meaning. Doctoral thesis. Utrecht, the Netherlands: OW & OC. 1987.
- Del Moral Pérez, María Esther; Guzmán Duque, Alba Patricia; Fernández García, Laura Carlota. Game-Based Learning: Increasing the Logical-Mathematical, Naturalistic, and Linguistic Learning Levels of Primary School Students. Journal of New Approaches in Educational Research, [S.l.], v. 7, n. 1, p. 31-39, jan. 2018. ISSN 2254-7339.
- Drijvers P., Kodde-Buitenhuis H., Doorman M. Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the

- Netherlands. *Educ Stud Math* 102, 2019. P. 435–456.
11. Forgues H L, Tian J and Siegler R S. Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review ScienceDirect*. 2016
 12. Herr T., & Johnson K. *Problem solving strategies: Crossing the river with dogs*. Berkeley: Key Curriculum. 1994.
 13. Kaiser G., Blomhøj M., & Sriraman B. Towards a didactical theory for mathematical modelling. *Zentralblatt für Didactik der Mathematik*, 38(2), 2006. P. 82–85.
 14. Katz J. D. *Developing mathematical thinking. A guide to rethinking the mathematics classroom*. Lanham, MD: Rowman & Littlefield. 2014.
 15. Kaur B, Lam T. *Reasoning, Communication and Connections in Mathematics* (Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2012.
 16. Liljedahl P., Santos-Trigo M., Malaspina U., Bruder R. *Problem Solving in Mathematics Education*. In: *Problem Solving in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys. Springer, Cham. 2016.
 17. Mason J. Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1). 2000. P. 97–111.
 18. Mason J., Burton L., & Stacey K. (*Thinking mathematically*. First edition, 1982, New York: Addison Wesley. Second edition, 2010, Harlow, England: Prentice Hall. 1982, 2010.
 19. Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., Gardner, S., Gardner, A., & Carraher, J. N. The Contribution of Logical Reasoning to the Learning of Mathematics in Primary School. *British Journal of Developmental Psychology*, 25. 2007. P. 147–166
 20. Pantziara M., Gagatsis A. and Elia I. Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems Published online: 10 February 2009 Springer Science + Business Media. 2009
 21. Perkins D. *Archimedes' bathtub: The art of breakthrough thinking*. New York, NY: W.W. Norton and Company. 2000.
 22. Pólya G. *Mathematical discovery* (Volume 1, 1962; Volume 2, 1965). Princeton: Princeton University Press. Combined paperback edition, 1981. New York: Wiley.
 23. Poon K. K. and Leung C. K. A study of geometric understanding via logical reasoning in Hong Kong *International Journal for Mathematics Teaching and Learning (IJMT)*. 2016
 24. Roekel D. V. *Preparing 21 st century students for a global society an educator's guide to the "Four Cs" (USA: National Education Association)*. 2011.
 25. Schoenfeld A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York, NY: Simon and Schuster. (1992).
 26. Schoenfeld A. H. Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1–2), 2013. P.9–34.
 27. Schoenfeld A. H. What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? *Educational Researcher*, 43(8), 2014. P. 404–412.
 28. Schoenfeld A. H. Teaching mathematical thinking and problem solving. In L. B. Resnick and L. Klopfer (Eds.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research (1989 Yearbook of the Association for Supervision and Curriculum Development)*, pp. 83-103. Washington, DC: Association for Supervision and Curriculum Development. 1989.
 29. Törner, G., Schoenfeld, A. H., & Reiss, K. M. Problem solving around the world: Summing up the state of the art. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), P. 5–6. 2007.
 30. Tajudin N. M., Chinnappan M. Relationship between scientific reasoning skills and mathematics achievement among malaysian student *Geografia online TM Malaysian Journal of Society*. 2016. P.46-96.
 31. Ayele M. Mathematics teachers' perceptions on enhancing students' creativity in mathematics *IEJME Mathematics Education*. 2016.

Analysis of the foreign research results on the pupils' logical competence formation during learning mathematics

R. S. Milian

Abstract. The article analyzes foreign research of pupils' logical competence formation during mathematics lessons. In the analyzed research, scientists identify tools and techniques by which pupils learn to think, analyze and draw conclusions, which contributes to the logical competence formation. If mathematics teachers take care of the pupils' logical competence formation during mathematics lessons, it will be a powerful impetus to pupils' personal development and increase the effectiveness of school education in general.

Keywords: *logical competence, teaching mathematics, thinking development, mathematics.*