

p-ISSN 2308-5258

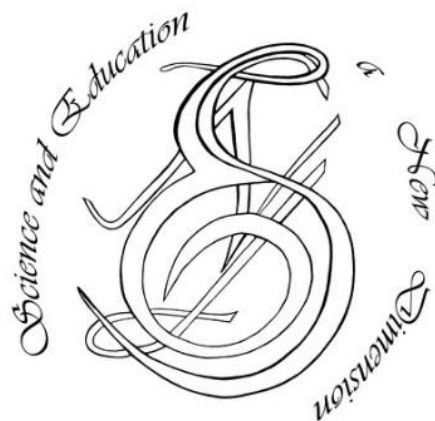
e-ISSN 2308-1996

Natural and Technical Sciences, IX(31), ISSUE 250, 2021 Feb.

SCIENCE AND EDUCATION A NEW DIMENSION

NATURAL
AND

TECHNICAL SCIENCES



www.seanewdim.com

p-ISSN 2308-5258

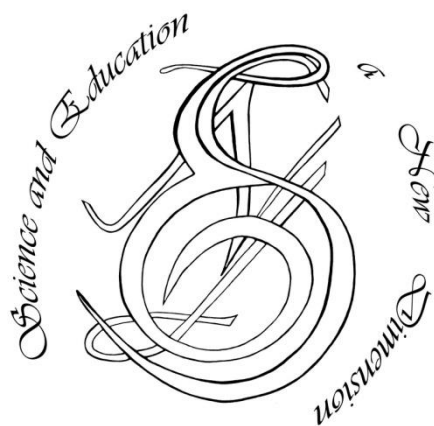
e-ISSN 2308-1996

IX(31), Issue 250, 2021 Feb.

SCIENCE AND EDUCATION A NEW DIMENSION

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31>

Natural and Technical Sciences



www.seanewdim.com

Editorial board

Editor-in-chief: Dr. Xénia Vámos

Honorary Senior Editor:

Jenő Barkáts, Dr. habil. Nina Tarasenkova, Dr. habil.

Andriy Myachykov, PhD in Psychology, Senior Lecturer, Department of Psychology, Faculty of Health and Life Sciences, Northumbria University, Northumberland Building, Newcastle upon Tyne, United Kingdom

Edvard Ayvazyan, Doctor of Science in Pedagogy, National Institute of Education, Yerevan, Armenia

Ferenc Ihász, PhD in Sport Science, Apáczai Csere János Faculty of the University of West Hungary

Ireneusz Pyrzyk, Doctor of Science in Pedagogy, Dean of Faculty of Pedagogical Sciences, University of Humanities and Economics in Wrocław, Poland

Irina Malova, Doctor of Science in Pedagogy, Head of Department of methodology of teaching mathematics and information technology, Bryansk State University named after Academician IG Petrovskii, Russia

Irina S. Shevchenko, Doctor of Science in Philology, Department of ESP and Translation, V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine
Department of Psychology, Faculty of Health and Life Sciences, Northumbria University, Northumberland Building, Newcastle upon Tyne, United Kingdom

Kosta Garow, PhD in Pedagogy, associated professor, Plovdiv University „Paisii Hilendarski”, Bulgaria

László Kótis, PhD in Physics, Research Centre for Natural Sciences, Hungary, Budapest

Larysa Klymanska, Doctor of Political Sciences, associated professor, Head of the Department of Sociology and Social Work, Lviv Polytechnic National University, Ukraine

Liudmyla Sokurianska, Doctor of Science in Sociology, Prof. habil., Head of Department of Sociology, V.N. Karazin Kharkiv National University

Marian Wloshinski, Doctor of Science in Pedagogy, Faculty of Pedagogical Sciences, University of Humanities and Economics in Wrocław, Poland

Melinda Nagy, PhD in Biology, associated professor, Department of Biology, J. Selye University in Komarno, Slovakia

Alexander Perekhrest, Doctor of Science in History, Prof. habil., Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Ukraine

Nikolai N. Boldyrev, Doctor of Science in Philology, Professor and Vice-Rector in Science, G.R. Derzhavin State University in Tambov, Russia

Oleksii Marchenko, Doctor of Science in Philosophy, Head of the Department of Philosophy and Religious Studies, Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Ukraine

Olga Sannikova, Doctor of Science in Psychology, professor, Head of the department of general and differential psychology, South Ukrainian National Pedagogical University named after K.D. Ushynsky, Odessa, Ukraine

Oleg Melnikov, Doctor of Science in Pedagogy, Belarusian State University, Belarus

Perekhrest Alexander, Doctor of Science in History, Prof. habil., Bohdan Khmelnytsky National University in Cherkasy, Ukraine

Riskeldy Turgunbayev, CSc in Physics and Mathematics, associated professor, head of the Department of Mathematical Analysis, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics of the Tashkent State Pedagogical University, Uzbekistan

Roza Uteeva, Doctor of Science in Pedagogy, Head of the Department of Algebra and Geometry, Togliatti State University, Russia

Seda K. Gasparyan, Doctor of Science in Philology, Department of English Philology, Professor and Chair, Yerevan State University, Armenia

Sokuriaynska Liudmyla, Doctor of sociological science. Prof. Head of Department of Sociology. V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Svitlana A. Zhabotynska, Doctor of Science in Philology, Department of English Philology of Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Ukraine

Tatyana Prokhorova, Doctor of Science in Pedagogy, Professor of Psychology, Department chair of pedagogics and subject technologies, Astrakhan state university, Russia

Tetiana Hranchak, Doctor of Science Social Communication, Head of department of political analysis of the Vernadsky National Library of Ukraine

Valentina Orlova, Doctor of Science in Economics, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ukraine

Millousheva-Boykina Dobrinka Vassileva, PhD, assoc. professor at the Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv University „Paisii Hilendarski”

Veselin Kostov Vasilev, Doctor of Psychology, Professor and Head of the department of Psychology Plovdiv University „Paisii Hilendarski”, Bulgaria

Vladimir I. Karasik, Doctor of Science in Philology, Department of English Philology, Professor and Chair, Volgograd State Pedagogical University, Russia

Volodimir Lizogub, Doctor of Science in Biology, Head of the department of anatomy and physiology of humans and animals, Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Ukraine

Zinaida A. Kharitonchik, Doctor of Science in Philology, Department of General Linguistics, Minsk State Linguistic University, Belarus

Zoltán Poór, CSc in Language Pedagogy, Head of Institute of Pedagogy, Apáczai Csere János Faculty of the University of West Hungary

Managing editor:

Barkáts N.

© EDITOR AND AUTHORS OF INDIVIDUAL ARTICLES

The journal is published by the support of Society for Cultural and Scientific Progress in Central and Eastern Europe

BUDAPEST, 2015

Statement:

By submitting a manuscript to this journal, each author explicitly confirms that the manuscript meets the highest ethical standards for authors and co-authors. Each author acknowledges that fabrication of data is an egregious departure from the expected norms of scientific conduct, as is the selective reporting of data with the intent to mislead or deceive, as well as the theft of data or research results from others. By acknowledging these facts, each author takes personal responsibility for the accuracy, credibility and authenticity of research results described in their manuscripts. All the articles are published in author's edition.

THE JOURNAL IS LISTED AND INDEXED IN:

INDEX COPERNICUS: ICV 2014: 70.95; ICV 2015: 80.87; ICV 2016: 73.35; ICV 2018: 90.25;
ICV 2019: 89.50

GOOGLE SCHOLAR

CROSSREF (DOI prefix:10.31174)

ULRICHS WEB GLOBAL SERIALS DIRECTORY

UNION OF INTERNATIONAL ASSOCIATIONS YEARBOOK

SCRIBD

ACADEMIA.EDU

CONTENT

BIOLOGY.....	7
The effect of streptozotocin-induced diabetes on the copper content in the cells of the immune system of rats	
<i>N. V. Hryhorova.....</i>	<i>7</i>
 PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES.....	 10
О влиянии свойств минимальных не F-групп на классы групп	
<i>A. A. Горепекина, М. М. Сорокина.....</i>	<i>10</i>
One variant of the collocation-iterative method of solving integro-functional equations	
<i>I. Konet, K. Heseleva.....</i>	<i>14</i>
Дослідження системи з лінійно перетвореними аргументами і нелінійними інтегральними умовами	
<i>I. Д. Скутар.....</i>	<i>18</i>
 MEDICAL SCIENCE.....	 23
Особенности клинической картины носовых кровотечений на фоне проведения антитромботической терапии	
<i>Н. С. Бычкова.....</i>	<i>23</i>
Тактика хирургического лечения синдрома Мириizzi	
<i>Е. Д. Хворостов, С. А. Бычков, В. В. Дериколенко, Р. Н. Гринёв.....</i>	<i>26</i>
 TECHNICAL SCIENCES.....	 29
Автоматическое определение параметров оптимальной стратегии расхождения судов при снижении их скоростей на постоянных курсах	
<i>Д. Б. Федоров, И. А. Бурмака.....</i>	<i>29</i>
Methods and algorithms of ensuring of functional persistence of subsystem of information exchange in the system of airspace control	
<i>V. V. Kireienko, O. V. Barabash, I. P. Salanda.....</i>	<i>35</i>
Probabilistic modeling of the training test subdivision of device production	
<i>A. L. Litvinov.....</i>	<i>38</i>
Оценка вероятности корректного определения типа взаимодействия судов в ситуации опасного сближения	
<i>А. В. Янцевский.....</i>	<i>42</i>
Model of dynamic tariffing Microgrid's electricity consumption in local energy markets	
<i>V. Y. Zhuikov, I. Y. Boiko, S. P. Denysiuk.....</i>	<i>46</i>

BIOLOGY

The effect of streptozotocin-induced diabetes on the copper content in the cells of the immune system of rats

N. V. Hryhorova

Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine
Corresponding author. E-mail: nvgrigorova@ukr.net

Paper received 06.02.21; Accepted for publication 18.02.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-01>

Abstract. In rats with streptozotocin-induced diabetes in the thymic epithelial cells, blood lymphocytes and white pulp of the spleen, the copper content was determined by the cytochemical reaction of lumocupferon. It was found that increasing the severity of diabetes in animals was accompanied by the accumulation of intracellular metal. Injections of insulin, adrenaline, and prednisolone corrected excess copper in the studied cells of the immune system of rats with streptozotocin-induced diabetes. Such changes were more pronounced in the case of the combined action of adaptive hormones.

Keywords: *immune system, copper, streptozotocin-induced diabetes.*

Introduction. Today, diabetes mellitus (DM) is one of the most common diseases. Given that this pathology is accompanied by a large number of complications, namely, the development of organ-specific lesions of many organs and systems, the issues of prevention, early diagnosis and treatment of diabetes are of particular importance [1-3]. According to the World Health Organization, 175 million people with diabetes are registered in the world, and in 2025 there will be 340 million [4-6]. Over the last decade, the number of patients with diabetes in Ukraine has grown rapidly – from 1,8 to 2,8%. However, studies show that their actual number is at least twice as high, as half of patients do not even know about their illness. Currently, 1,2 million people in Ukraine suffer from diabetes [7]. It is known that the cellular mechanisms of autoimmune aggression are the main cause of destruction of pancreatic β cells in the course of insulin-dependent diabetes mellitus (IDDM). Lymphocytes and macrophages are involved in the autoimmune cell chain of immunity [8-10]. In recent years, it has become known that one of the main pathogenetic factors in the development of IDDM is a violation of the formation of central tolerance to pancreatic antigens, which may be caused by changes in the morphofunctional state of antigen-presenting cells of the thyroid gland [11]. But many questions remain unresolved. Therefore, studies of blood lymphocytes, white pulp of the spleen and thymus in IDDM are relevant.

A brief overview of publications on the topic. Of particular interest, in our opinion, are studies of the copper content in these cells, given the role of metal in strengthening the immune system. Copper has a pronounced immunomodulatory effect, which is clearly evident in the study of primary and secondary immune responses. Copper compounds are able to increase the proliferation of the slowly sedimentary fraction of thymocytes; violation of the immunological status by thymectomy or imuran leads to a negative balance. Copper alleviates the manifestations of autoimmune diseases (rheumatoid arthritis) [12-14]. The participation of copper in the body's protective reactions, in which the copper content in the blood increases [15-17]. The amount of this metal in lymphocytes and thymus was not determined due

to the lack of cytochemical method of its detection. The development in our laboratory of the reaction of lumocupferon (LC) in the above cells allowed to conduct such studies. It was considered necessary to conduct comparative studies of the level of copper in blood lymphocytes, white pulp of the spleen and thymic epithelial cells (TEC) of diabetic animals.

Purpose of research. The aim of the study was to study the copper content in blood lymphocytes, white spleen pulp and TEC in different degrees of severity of streptozotocin-induced diabetes and in the conditions of action of adaptive hormones on the course of this disease in rats.

Materials and methods. The material of studies were blood smears, sections of white pulp of the spleen and thymus of 81 rats. In all experiments, intact animals served as controls (n=16), because after studying the control group of animals (animals injected with saline) and the intact group (animals without intervention), data were obtained that did not differ statistically. Other rats were intraperitoneally administered streptozotocin at a dose of 200 mg/kg. To compensate for the hypofunction of the insular apparatus, insulin was administered subcutaneously at a dose of 20 units of action/kg, diluted 2 times. The first injection was given 1 day after streptozotocin administration, the other injections were given daily for 4 days. Increased hypofunction of the insular apparatus was caused by the previous administration of adrenaline and prednisolone. Prednisolone was administered to animals intramuscularly, and adrenaline – subcutaneously in doses of 10 mg/kg and 0,05 mg/kg, respectively. Two hours after the administration of adrenaline, prednisolone, insulin, and 5 days after the injection of the diabetogenic substance in animals for life, blood was taken from the tail to prepare smears. Pieces of thymus and spleen were taken from slaughtered animals to make sections. Studies using laboratory animals were conducted in accordance with the requirements of Article 26 of the Law of Ukraine "On protection of animals from cruel treatment", "European Convention for the protection of vertebrate animals" (Strasbourg, 1986) and the principles of bioethics.

Blood smears and frozen sections of the spleen and

thymus 30-60 μm thick were fluorochromed for 1 hour with 0,1% aqueous solution of LC. Violet light filter (VLF-1) was used to excite luminescence, and yellow light filter (ELF-18) was used as a protective (ocular) filter. Under a fluorescent microscope, copper was detected by a yellow-green glow.

Evaluation of the intensity of staining of the cytoplasm of lymphocytes and TEC in setting the reaction of LC was performed using a microfluorimeter. The fluorescence intensity was expressed in conventional units (c.u.). The obtained results were statistically processed according to the Student's t-test using the program Statistica, 6.0.

Results and discussion. The obtained results indicate that in control (intact) rats the copper content was $75\pm 5,8$ c.u. in blood lymphocytes, $58\pm 4,2$ c.u. – in the lymphocytes of the spleen, $42\pm 2,5$ c.u. – in TEC. In severe streptozotocin-induced diabetes in animals, an increase in copper levels in blood lymphocytes by 56% ($117\pm 13,3$ c.u.; $P<0,01$), lymphocytes of the white pulp of the spleen – 59% ($92\pm 10,0$ c.u.; $P<0,01$), TEC – 79% ($75\pm 8,3$ c.u.; $P<0,001$).

In moderate diabetes in rats, the metal content increased by 44% ($108\pm 8,3$ c.u.; $P<0,01$) in blood lymphocytes, 43% ($83\pm 7,5$ c.u.; $P<0,01$) – in lymphocytes of the white pulp of the spleen, 60% ($67\pm 5,8$ c.u.; $P<0,01$) – in the TEC.

In the case of the development of mild streptozotocin-induced diabetes, the amount of copper in the cells of the blood, spleen and thymus of rats was higher than the control values, respectively, by 33% ($100\pm 9,2$ c.u.; $P<0,05$), 29% ($75\pm 5,0$ c.u.; $P<0,05$) and 38% ($58\pm 5,0$ c.u.; $P<0,01$).

In animals that did not develop diabetes, the copper content increased in blood lymphocytes by 23% ($92\pm 4,2$ c.u.; $P<0,05$), lymphocytes in the white pulp of the spleen – 16% ($67\pm 1,7$ c.u.; $P<0,05$), TEC – 19% ($50\pm 3,3$ c.u.; $P<0,05$).

The copper content increased on average by 44% ($108\pm 7,5$ c.u.; $P<0,01$) in blood lymphocytes, 43% ($83\pm 6,7$ c.u.; $P<0,01$) in lymphocytes white spleen pulp, 38% ($58\pm 4,2$ c.u.; $P<0,01$) – TEC of animals injected with streptozotocin.

Thus, in rats, the development of severe streptozotocin-induced diabetes was accompanied by a significant accumulation of copper in blood lymphocytes, white spleen pulp and TEC. Less pronounced changes in the metal content in the studied cells were observed in moderate diabetes. An even smaller increase in intracellular copper was found in animals with a relatively mild form of the disease and, especially, in cases where diabetes did not develop.

A series of experiments was performed to determine the copper content in the cells of the immune system of rats with streptozotocin-induced diabetes under the action of adaptive hormones. After insulin injection in intact animals, the copper content decreased in blood lymphocytes by 33% ($50\pm 3,3$ c.u.; $P<0,01$), spleen lymphocytes – 28% ($42\pm 3,3$ c.u.; $P<0,01$), TEC – 40% ($25\pm 1,7$ c.u.; $P<0,001$). Adrenaline caused a decrease in metal content in blood lymphocytes by 44% ($42\pm 1,7$ c.u.; $P<0,001$),

splenic lymphocytes – 43% ($33\pm 1,7$ c.u.; $P<0,001$), TEC – 40% ($25\pm 3,3$ c.u.; $P<0,001$). The decrease in copper content in the studied cells after injection of prednisolone was 33% ($50\pm 3,3$ c.u.; $P<0,001$), 28% ($42\pm 2,7$ c.u.; $P<0,001$), TEC – 21% ($33\pm 2,5$ c.u.; $P<0,05$).

After administration of insulin to rats with diabetes in comparison with the control, the copper content increased by 33% ($100\pm 6,7$ c.u.; $P<0,01$) in blood lymphocytes, 29% ($75\pm 4,2$ c.u.; $P<0,01$) – lymphocytes of a spleen, 19% ($50\pm 2,5$ c.u.; $P<0,05$) – cells of a thymus. In all cases, the established values did not differ significantly from the figures obtained in animals with streptozotocin-induced diabetes.

In the case of adrenaline to rats with streptozotocin-induced diabetes, the copper content was higher compared to control animals by 23% in blood lymphocytes ($92\pm 4,2$ c.u.; $P<0,01$), 29% in splenic lymphocytes ($75\pm 5,0$ c.u.; $P<0,05$), 19% – TEC ($50\pm 1,7$ c.u.; $P<0,05$). For diabetic animals, the values obtained did not differ significantly.

Similar changes in the amount of metal in the cells were observed after injection of prednisolone into experimental animals. The figures obtained: $92\pm 5,0$ c.u. ($P<0,01$), $75\pm 3,3$ c.u. ($P<0,01$) and $50\pm 1,3$ c.u. ($P<0,01$).

The combined action of insulin and adrenaline caused in rats with streptozotocin-induced diabetes a decrease in copper content in blood lymphocytes by 23% ($83\pm 4,2$ c.u.; $P<0,01$), splenic lymphocytes – 30% ($58\pm 5,0$ c.u.; $P<0,01$), thymus cells – 28% ($42\pm 3,3$ c.u.; $P<0,01$). The difference from the control values was unreliable.

A similar nature of changes in copper content in blood lymphocytes and spleen, as well as TEC was observed after administration of insulin and prednisolone to diabetic animals. The obtained values are respectively: $83\pm 3,3$ c.u. ($P<0,01$), $58\pm 2,5$ c.u. ($P<0,01$), $42\pm 5,0$ c.u. ($P<0,05$).

Thus, injections of insulin, adrenaline, and prednisolone corrected excess copper in the studied cells of the immune system of rats with streptozotocin-induced diabetes. Such changes were more pronounced in the case of the combined action of adaptive hormones.

Conclusions. 1. In rats with streptozotocin-induced diabetes, a gradual increase in copper content from cases when diabetes did not develop to severe disease: 23% ($P<0,05$) – 56% ($P<0,001$) – in blood lymphocytes, 16% ($P<0,05$) – 59% ($P<0,01$) – lymphocytes of white pulp of a spleen, 19% ($P<0,05$) – 79% ($P<0,001$) – TEC.

2. The content of copper in the studied cells of the immune system of control rats decreased after injection of insulin by 19% ($P<0,05$) – 33% ($P<0,01$), adrenaline – 40-44% ($P<0,001$), prednisolone – 21% ($P<0,05$) – 33% ($P<0,001$).

3. In rats with streptozotocin-induced diabetes, the content of intracellular copper was higher compared to the control group by 19% ($P<0,05$) – 33% ($P<0,01$) after insulin administration, 19% ($P<0,05$) – 29% ($P<0,01$) – adrenaline and prednisolone, but did not differ significantly from sick animals.

4. The combined action of insulin and adrenal hormones caused in diabetic rats a decrease in copper content in the TEC, blood lymphocytes and spleen by 23% ($P<0,01$) – 28% ($P<0,01$).

LITERATURE

1. Боднар П. М., Михальченко Г. П., Комісаренко Ю. І. Ендокринологія. Вінниця: Нова книга, 2017. 449 с.
2. Гарднер Д., Шебек Д. Базисная и клиническая эндокринология. Москва: Бином, 2019. 464 с.
3. Дедов И. И., Шестакова М. В. Сахарный диабет типа 1: реалии и перспективы: монография. Москва: Медицинское информационное агентство, 2016. 502 с.
4. Ingelfinger, J.R., Jarcho, J.A. Increase in the Incidence of Diabetes and Its Implications // *N Engl J Med*, 2017. 376(15). P. 1473-1474.
5. Medical Care in Diabetes – 2016 American Diabetes Association // *Diabetes Care*, 2016. 39, Suppl. 1. P. 2-112.
6. Ponomarenko-Jones R. Overview of diabetes // *Nurse Stand*, 2017. 31(3). P. 64-65.
7. Паньків В. І. Цукровий діабет: визначення, класифікація, епідеміологія, фактори ризику // *Міжнародний ендокринологічний журнал*, 2013. 55 (7). С. 95-104.
8. Зак К. П., Попова В. В. Предсказание развития сахарного диабета 1-го типа и диагностика его асимптомной фазы с помощью аутоантител к островкам Лангерганса поджелудочной железы у человека задолго до возникновения у него заболевания // *Міжнародний ендокринологічний журнал*, 2016. 79(7). С. 11-21.
9. Зак К. П., Тронько Н. Д., Попова В. В. Сахарный диабет. Иммунология. Цитокины: монография. Киев: Книга-плюс, 2015. 485 с.
10. Zmora, N., Bashiardes, S., Levy, M. The Role of the Immune System in Metabolic Health and Disease // *Cell Metab*, 2017. 25(3). P. 506-521.
11. Importance of a thymus dysfunction in the pathophysiology of type 1 diabetes / V. Geenene, F. Brilot, C. Lonis [et al.] // *Kev. Med. Liege*, 2005. 60(5-6). P. 291-296.
12. Flynn A. Control of in vitro lymphocyte proliferation by copper, magnesium and zinc deficiency // *J Nutr*, 1984. 114. P. 2034-2042.
13. Tapiero, H., Townsend, D.M., Tew, K.D. Trace elements in human physiology and pathology. Copper // *Biomed Pharmacother*, 2003. 32(1). P. 43-54.
14. Hordyjewska, A., Popiolek, L., Kocot, J. The many “faces” of copper in medicine and treatment // *Biometals*, 2014. 27(4). P. 611-621.
15. Harris, E.D. Basic and clinical aspects of copper // *Crit Rev Clin Lab Sci*, 2003. 40(5). P. 547-586.
16. Скальный А. В. Микроэлементы: бодрость, здоровье, долголетие. Москва: Litress, 2015. 720 с.
17. Wang, X., Garrick, M.D., Collins, J.F. Animal Models of normal and disturbed iron and copper metabolism // *J Nutr*, 2019. 149(12). P. 2085-2100.

REFERENCES

1. Bodnar, P.M., Mikhalchenko, G.P., Komisarenko, Y.I. Endocrinology. Vinnytsia: New book, 2017. 449 p.
2. Gardner, D., Shebek, D. Basic and clinical endocrinology. Moscow: Binom, 2019. 464 p.
3. Dedov, I.I., Shestakova, M.V. Type 1 diabetes mellitus: realities and prospects: a monograph. Moscow: Medical Information Agency, 2016. 502 p.
7. Pankiv, V.I. Diabetes mellitus: definition, classification, epidemiology, risk factors // *International Journal of Endocrinology*, 2013. 55 (7). P. 95-104.
8. Zak, K.P., Popova, V.V. Prediction of the development of type 1 diabetes mellitus and diagnosis of its asymptomatic phase using autoantibodies to the islets of Langerhans of the pancreas in humans long before he develops the disease // *International Journal of Endocrinology*, 2016. 79 (7). Pp. 11-21.
9. Zak, K.P., Tronko, N.D., Popova, V.V. Diabetes mellitus. Immunity. Cytokines: a monograph. Kiev: Book-plus, 2015. 485 p.

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

О влиянии свойств минимальных не F -групп на классы групп

А. А. Горепекина, М. М. Сорокина

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Брянск, Россия

Corresponding author. E-mail: mmsorokina@yandex.ru

Paper received 26.01.21; Accepted for publication 12.02.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-02>

Аннотация. Рассматриваются только конечные группы. В работе изучаются минимальные не F -группы, где F – некоторый класс групп, являющийся естественным обобщением таких классических групп, как группы Шмидта и группы Миллера-Морено. Группа называется минимальной не F -группой, если она не принадлежит классу F , а каждая ее собственная подгруппа принадлежит F . Класс F называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и взятия произведений конечного числа нормальных F -подгрупп. В работе установлено влияние свойств минимальных не F -групп на строение заданного класса Фиттинга F .

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, минимальная не F -группа, класс Фиттинга, Ω -расслоенный класс Фиттинга.

Введение. Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Классом групп называется такое множество групп, которое вместе с каждой своей группой G содержит и все группы изоморфные группе G . В теории классов конечных групп большую роль играют минимальные не F -группы (иначе, F -критические группы) для заданного класса групп F , естественным образом обобщающее такие классические виды групп, как группы Миллера-Морено (минимальные неабелевы группы) и группы Шмидта (минимальные ненильпотентные группы) (см., например, [21, 22]). Группа, не принадлежащая классу F , называется минимальной не F -группой, если все ее собственные подгруппы классу F принадлежат.

Краткий обзор публикаций по теме. Свойства и строение минимальных не F -групп для определенных фиксированных классов групп F изучались такими известными алгебраистами, как Т. Хоукс, М. Фрик, Ю.А. Гольфанд, Л. Редеи, Н.Ф. Кузеньный, С.С. Левищенко, В.Д. Мазуров, С.А. Сыскин, А.Х. Журтов, В.Т. Нагребецкий, С.Н. Адамов, Н.П. Конторович (см., например, [21, с. 247]). Важные результаты о минимальных не F -группах для произвольной (локальной) формации F получены в работах В.Н. Семенчука, А.Д. Ходаевича, А.Ф. Васильева, А.В. Сидорова и др. (см., например, [2, 14 – 17, 20]). На важность изучения минимальных не F -групп для различных классов групп F было обращено внимание Л.А. Шеметковым в его фундаментальной статье «Some ideas and results in the theory of formations of finite groups» [31, с. 12].

Одним из центральных видов классов групп являются классы Фиттинга – классы, замкнутые относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп, принадлежащих рассматриваемому классу. Первые результаты о классах Фиттинга были получены Б. Фишером в работе [26]. Исследованием классов Фиттинга занимались К. Дерк, Т. Хоукс, Р. Брайс, Дж. Косси, М. Диксон, Ф. Локетт, С. Реффершейд, Н.Т. Воробьев, А.Н. Скиба, Н.Н. Воробьев и многие другие алгебраисты (см., например, [6, 7, 23 –

25, 29, 30]). В теории классов Фиттинга большую роль играют функциональные методы. Так, в 1969 году Б. Хартли с их помощью построил локальные классы Фиттинга [28]. Развивая данный функциональный подход, Л.А. Шеметков и А.Н. Скиба в 1999 году ввели в рассмотрение ω -локальные классы Фиттинга [19], где ω – непустое множество простых чисел. При построении таких классов используются специальные функции, называемые спутниками соответствующих классов (см., например, [8, 18]). В 1999 году В.А. Ведерников для исследования классов Фиттинга групп предложил новый подход, основанный на использовании ещё одной функции – направления. Это привело к открытию серий новых видов классов Фиттинга, в частности, к построению ω -верных и Ω -расслоенных классов Фиттинга [3 – 5]. Многие важные свойства Ω -расслоенных классов Фиттинга получены В.А. Ведерниковым, О.В. Камозиной, В.Е. Егоровой, Е.Н. Бажановой и др. (см., например, [1, 9, 11]).

Цель. Настоящая работа посвящена изучению влияния свойств минимальных не F -групп на внутреннее строение Ω -расслоенного класса Фиттинга F .

Используемые методы, обозначения, определения. При доказательстве утверждений применяются классические методы теории групп, а также методы теории классов конечных групп, в частности, методы теории классов Фиттинга. Используемые обозначения и определения стандартны (см., например, [13, 21, 25]). Приведем лишь некоторые из них. Запись $N \leq G$ ($N < G$, $N \triangleleft G$, $N \triangleleft \cdot G$) означает, что N является подгруппой (соответственно собственной подгруппой, нормальной подгруппой, максимальной нормальной подгруппой) группы G . Пусть F – класс групп. Группа G называется минимальной не F -группой или, иначе, F -критической группой, если $G \notin F$, но каждая собственная подгруппа группы G принадлежит классу F [21]. Через $M(F)$ обозначается класс всех минимальных не F -групп. Класс групп F называется *классом Фиттинга*, если выполняются

следующие два условия: 1) из $G \in \mathbf{F}$ и $N \triangleleft G$ следует, что $N \in \mathbf{F}$ (S_n -замкнутость); 2) из $G = NM$, где $N \triangleleft G$, $M \triangleleft G$, $N, M \in \mathbf{F}$, следует, что $G \in \mathbf{F}$ (R -замкнутость). \mathbf{F} -радикалом группы G называется наибольшая нормальная подгруппа группы G , принадлежащая классу Фиттинга \mathbf{F} , и обозначается $G_{\mathbf{F}}$. Класс групп \mathbf{F} называется *формацией*, если выполняются следующие два условия: 1) из $G \in \mathbf{F}$ и $N \triangleleft G$ следует, что $G/N \in \mathbf{F}$ (Q -замкнутость); 2) из $G/N_1 \in \mathbf{F}$ и $G/N_2 \in \mathbf{F}$ следует, что $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathbf{F}$ (R_0 -замкнутость). \mathbf{F} -корадикалом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа группы G , фактор-группа по которой принадлежит формации \mathbf{F} , и обозначается $G^{\mathbf{F}}$. Через $\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2$ обозначается стандартное произведение классов групп \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , т.е. $\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 = (G \in \mathbf{E} \mid \exists N \triangleleft G, N \in \mathbf{F}_1, G/N \in \mathbf{F}_2)$; $\mathbf{F}_1 \diamond \mathbf{F}_2$ –радикальное произведение классов групп \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , т.е. $\mathbf{F}_1 \diamond \mathbf{F}_2 = (G \in \mathbf{E} \mid G/G_{\mathbf{F}_1} \in \mathbf{F}_2)$; если $\mathbf{F}_1 = \emptyset$, то по определению полагают, что $\mathbf{F}_1 \diamond \mathbf{F}_2 = \emptyset$ [25].

Через \mathbf{E} обозначается класс всех конечных групп, \mathbf{I} – класс всех конечных простых групп, Ω – непустой подкласс класса \mathbf{I} ; $K(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G . Пусть \mathbf{X} – непустое множество групп. Тогда $K(\mathbf{X})$ – объединение классов $K(G)$ для всех $G \in \mathbf{X}$; (\mathbf{X}) – класс групп, порожденный \mathbf{X} ; в частности, (G) – класс всех групп, изоморфных группе G . Через \mathbf{E}_{Ω} обозначается класс всех Ω -групп, т.е. таких групп G , для которых $K(G) \subseteq \Omega$; $O^{\Omega}(G) = G^{\mathbf{E}_{\Omega}}$. Для $A \in \mathbf{I}$ используются следующие обозначения: $\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_{(A)}$, $\mathbf{E}_{A'} = \mathbf{E}_{(A)'}$, $O^A(G) = G^{\mathbf{E}_A}$. Функция $f: \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$, где $f(\Omega') \neq \emptyset$, называется ΩR -функцией; функция $g: \mathbf{I} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$ называется R -функцией; функция $\varphi: \mathbf{I} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ называется FR -функцией. Функции f , g и φ принимают одинаковые значения на изоморфных группах из области определения. Класс Фиттинга $\mathbf{F} = (G \in \mathbf{E} \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$) называется Ω -расслоенным классом Фиттинга с Ω -спутником f и направлением φ и обозначается $\mathbf{F} = \Omega R(f, \varphi)$; класс Фиттинга $\mathbf{F} = (G \in \mathbf{E} \mid G^{\varphi(A)} \in g(A)$ для всех $A \in K(G)$) называется *расслоенным классом Фиттинга со спутником g и направлением φ* и

обозначается $\mathbf{F} = R(g, \varphi)$ [4]. Направление φ Ω -расслоенного (расслоенного) класса Фиттинга называется: a -направлением, если $A \in \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathbf{I}$; b -направлением, если $\mathbf{E}_A \varphi(A) = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathbf{I}$; r -направлением, если $\varphi(A) = \varphi(A)\mathbf{E}_A$, для любой группы $A \in \mathbf{I}$ [3].

Результаты и их доказательство.

Теорема 1. Пусть $A \cong Z_p \in \Omega$, \mathbf{F} – Ω -расслоенный класс Фиттинга с ar -направлением φ и внутренним Ω -спутником f . Если всякая минимальная не \mathbf{F} -группа обладает максимальной нормальной подгруппой, содержащейся в $f(A)$ -радикале группы, то $M(f(A)) \cap \mathbf{F}\mathbf{E}_A \subseteq \mathbf{F}$.

Доказательство. Пусть всякая минимальная не \mathbf{F} -группа обладает максимальной нормальной подгруппой, содержащейся в $f(A)$ -радикале группы. Покажем, что $M(f(A)) \cap \mathbf{F}\mathbf{E}_A \subseteq \mathbf{F}$. Предположим, что найдется группа $G \in (M(f(A)) \cap \mathbf{F}\mathbf{E}_A) \setminus \mathbf{F}$. Тогда, согласно лемме 3 [16], в G существует минимальная не \mathbf{F} -подгруппа H . Если $H < G$, то, ввиду $G \in M(f(A))$, получаем, что $H \in f(A)$. Так как f – внутренний Ω -спутник класса Фиттинга \mathbf{F} , то $f(A) \subseteq \mathbf{F}$ и поэтому $H \in \mathbf{F}$. Противоречие. Следовательно, $H = G$ и, значит, G – минимальная не \mathbf{F} -группа. По условию теоремы в группе G существует максимальная нормальная подгруппа N такая, что $N \subseteq G_{f(A)}$. Покажем, что $N \in f(A)$. Действительно, $G_{f(A)} \in f(A)$ по определению $f(A)$ -радикала группы. Далее, из $N \triangleleft G$ и $N \subseteq G_{f(A)}$ следует, что $N \triangleleft G_{f(A)}$. В силу S_n -замкнутости класса Фиттинга $f(A)$ заключаем, что $N \in f(A)$. Рассмотрим фактор-группу G/N . Так как, согласно условию теоремы, $N \triangleleft G$, то по лемме 2.14.2 [13] G/N – простая группа. Возможны следующие случаи.

1) Пусть $G/N \cong A$. Из $N \in f(Z_p)$ и $G/N \in \mathbf{N}_p$ следует, что $G \in f(Z_p)\mathbf{N}_p$. Так как f – внутренний Ω -спутник Ω -расслоенного класса Фиттинга \mathbf{F} , то, согласно лемме 15 [3], $f(Z_p)\mathbf{N}_p \subseteq \mathbf{F}$ и поэтому $G \in \mathbf{F}$. Получили противоречие.

2) Пусть $G/N \not\cong A$. Поскольку φ – r -направление Ω -расслоенного класса Фиттинга \mathbf{F} , то справедливо равенство $\varphi(A) = \varphi(A)\mathbf{E}_A$. Так как A – простая группа, $\varphi(A)$ – непустая формация Фиттинга, $N \triangleleft G$ и G/N – A' -группа, то по лемме 11 [3] $G^{\varphi(A)} = N^{\varphi(A)}$. Так как $N \in f(A)$ и класс $f(A)$ S_n -замкнут, то $N^{\varphi(A)} \in f(A)$ и, значит,

$G^{\varphi(A)} \in f(A)$. Поскольку $G \in \mathbf{FE}_A$ и, ввиду замечания 1.11 главы IX [25], $\mathbf{FE}_A = \mathbf{F} \diamond \mathbf{E}_A$, то $G \in \mathbf{F} \diamond \mathbf{E}_A$. По определению радикального произведения получаем, что $G/G_{\mathbf{F}} \in \mathbf{E}_A$. Так как $G_{\mathbf{F}} \triangleleft G$, $G/G_{\mathbf{F}} \in \mathbf{E}_A$ и $O^A(G)$ – наименьшая подгруппа в G , удовлетворяющая данным условиям, то $O^A(G) \subseteq G_{\mathbf{F}}$. Из того, что $O^A(G) \triangleleft G$ и $O^A(G) \subseteq G_{\mathbf{F}}$, по свойству нормальных подгрупп следует, что $O^A(G) \triangleleft G_{\mathbf{F}}$. Так как $G_{\mathbf{F}} \in \mathbf{F}$, то, в силу S_n -замкнутости класса Фиттинга \mathbf{F} , получаем $O^A(G) \in \mathbf{F}$. Из $G^{\varphi(A)} \in f(A)$, $O^A(G) \in \mathbf{F}$, $A \in \Omega$ и того, что φ – r -направление класса Фиттинга \mathbf{F} , по лемме 12 (1) [3] заключаем, что $G \in \mathbf{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $M(f(A)) \cap \mathbf{FE}_A \subseteq \mathbf{F}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $A \cong Z_p \in \Omega$, \mathbf{F} – Ω -расслоенный класс Фиттинга с br -направлением φ и внутренним Ω -спутником f . Если всякая минимальная не \mathbf{F} -группа обладает максимальной нормальной подгруппой, содержащейся в $f(A)$ -радикале группы, то $M(f(A)) \cap \mathbf{FE}_A \subseteq \mathbf{F}$.

Доказательство. Пусть всякая минимальная не \mathbf{F} -группа обладает максимальной нормальной подгруп-

пой, содержащейся в $f(A)$ -радикале группы. Покажем, что $M(f(A)) \cap \mathbf{FE}_A \subseteq \mathbf{F}$. Так как по условию φ является b -направлением, то выполняется равенство $\mathbf{E}_A \varphi(A) = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathbf{I}$, откуда следует, что $A \in \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathbf{I}$. Таким образом, заключаем, что φ – a -направление Ω -расслоенного класса Фиттинга \mathbf{F} . Тогда по теореме 1 имеем $M(f(A)) \cap \mathbf{FE}_A \subseteq \mathbf{F}$. Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть $A \cong Z_p \in \mathbf{I}$, \mathbf{F} – расслоенный класс Фиттинга с ar -направлением φ и внутренним спутником f . Если всякая минимальная не \mathbf{F} -группа обладает максимальной нормальной подгруппой, содержащейся в $f(A)$ -радикале группы, то $M(f(A)) \cap \mathbf{FE}_A \subseteq \mathbf{F}$.

Выводы. В теореме 1 для Ω -расслоенного класса Фиттинга \mathbf{F} с ar -направлением изучено влияние свойств минимальных не \mathbf{F} -групп на внутреннее строение класса \mathbf{F} , в частности, установлены условия, при которых класс $M(f(A)) \cap \mathbf{FE}_A$ содержится в \mathbf{F} . В качестве следствий получены соответствующие результаты для Ω -расслоенного класса Фиттинга с br -направлением, а также для расслоенного класса Фиттинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бажанова Е.Н., Ведерников В.А. Ω -расслоенные классы Фиттинга T -групп // Сибирские электронные математические известия, 2017. Т. 14. С. 629–639.
2. Васильев А.Ф. (X, h) -различимые локальные формации // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1986. Вып. 2. С. 34–40.
3. Ведерников В.А. Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга // Труды ИММ УрО РАН, 2001. Т. 7, № 2. С. 55–71.
4. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика, 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144.
5. Ведерников В.А., Сорокина М.М. ω -верные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки, 2002. Т. 71, Вып. 1. С. 43–60.
6. Воробьев Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Математические заметки, 1988. Т. 43, Вып. 2. С. 161–168.
7. Воробьев Н.Н., Скиба А.Н. О булевых решетках n -кратно локальных классов Фиттинга // Сибирский математический журнал, 1999. Т. 40, № 3. С. 523–530.
8. Воробьев Н.Н. Алгебра классов конечных групп. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – 322 с.
9. Егорова В.Е. Критические неоднородные totally канонические классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки, 2008. Т. 83, № 4. С. 520–527.
10. Журтов А.Х., Сыкин С.А. О группах Шмидта // Сибирский математический журнал, 1987. Т. 28, № 2. С. 235–239.
11. Камозина О.В. Алгебраические решетки кратно Ω -расслоенных классов Фиттинга групп // Дискретная математика, 2006. Т. 18, № 2. С. 139–145.
12. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 254 с.
13. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
14. Семенчук В.Н. Минимальные не \mathbf{F} -группы // Алгебра и логика, 1979. Т. 18, № 3. С. 348–382.
15. Семенчук В.Н. Конечные группы с системой минимальных не \mathbf{F} -подгрупп // Подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1981. С. 138–149.
16. Семенчук В.Н., Велесницкий В.Ф. Конечные группы с заданными свойствами критических подгрупп // Сибирский математический журнал, 2014. Т. 55, № 2. С. 427–435.
17. Сидоров А.В. О группах, близких к минимальным не \mathbf{F} -группам // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1986. Вып. 2. С. 55–61.
18. Скиба А.Н. Алгебра формаций. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
19. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды, 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
20. Ходалевиц А.Д. Минимальные не \mathbf{F} -группы // Доклады АН БССР, 1984. Т. 28, № 5. С. 389–391.
21. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
22. Шеметков Л.А. Новые идеи и результаты теории формаций // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1989. Вып. 4. С. 65–76.
23. Bryce R., Cossey J. A Problem in Theory of normal Fitting Classes // Math. Z., 1975. Bd. 141, № 2. S. 99–110.
24. Dixon M. Sylow Theory, Formations and Fitting Classes in Locally Finite Groups. – Singapore – New Jersey – London

- Hong Kong: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1994. – 304 p.
25. Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 901 p.
26. Fischer B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // Habilitationsschrift, Universität Frankfurt, 1966.
27. Guo W. The Theory of Classes of Groups. – Beijing – New York: Science Press, 2000. – 258 p.
28. Hartley B. On Fischer's Dualization of Formation Theory // Proc. London Math. Soc., 1969. V. 3, № 9. P. 193–207.
29. Lockett F. On the Theory of Fitting Classes of Finite Soluble Groups // Math. Z., 1973. Bd. 131. S. 103–115.
30. Reifferscheid S. On F-normal Fitting Classes of Finite Soluble Groups // Arch. Math., 2000. V. 75, № 3. P. 164–172.
31. Shemetkov L.A. Some ideas and results in the theory of formations of finite groups // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1992. Вып. 7. С. 3–38.

REFERENCES

1. Bazhanova E.N., Vedernikov V.A. Ω -Foliated Fitting Classes of T -groups // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2017. Vol. 14. P. 629–639.
2. Vasilyev A.F. (X, h) -distinguishable Local Formations // Issues of Algebra. – Minsk: Universitetskoe, 1986. Is. 2. P. 34–40.
3. Vedernikov V.A. Maximal Satellites of Ω -Foliated Formations and Fitting Classes // Trudy IMM UrO RAS, 2001. Vol. 7, № 2. P. 55–71.
4. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. Ω -Foliated Formations and Fitting Classes of Finite Groups // Discrete Mathematics, 2001. Vol. 13, № 3. P. 125–144.
5. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. ω -верные Formations and Fitting Classes of Finite Groups // Mathematical Notes, 2002. Vol. 71, Is. 1. P. 43–60.
6. Vorobyov N.T. On Radical Classes of Finite Groups with the Lockett condition // Mathematical Notes, 1988. Vol. 43, Is. 2. P. 161–168.
7. Vorobyov N.N., Skiba A.N. On Boolean Lattices of n -multiple local Fitting Classes // Siberian Mathematical Journal, 1999. Vol. 40, № 3. P. 523–530.
8. Vorobyov N.N. Algebra of Classes of Finite Groups. – Vitebsk: VSU named after P.M. Masherov, 2012. – 322 p.
9. Egorova V.E. Critical non-homogeneous totally canonical Fitting Classes of Finite Groups // Mathematical Notes, 2008. Vol. 83, № 4. P. 520–527.
10. Zhurtov A.Kh., Syskin S.A. On Schmidt Groups // Siberian Mathematical Journal, 1987. Vol. 28, № 2. P. 235–239.
11. Kamozina O.V. Algebraic Lattices of multiply Ω -Foliated Fitting Classes of Groups // Discrete Mathematics, 2006. Vol. 18, № 2. P. 139–145.
12. Kamornikov S.F., Selkin M.V. The Subgroup Functors and Classes of Finite Groups. – Minsk: Belarusian Science, 2003. – 254 p.
13. Monakhov V.S. Introduction to the Theory of Finite Groups and their Classes. – Minsk: Higher School, 2006. – 207 p.
14. Semenchuk V.N. Minimal non-F-groups // Algebra and Logic, 1979. Vol. 18, № 3. P. 348–382.
15. Semenchuk V.N. Finite Groups with a system of minimal non-F-subgroups // Subgroup structure of finite groups. – Minsk: Science and Technology, 1981. P. 138–149.
16. Semenchuk V.N., Velesnitsky V.F. Finite Groups with given properties of critical Subgroups // Siberian Mathematical Journal, 2014. Vol. 55, № 2. P. 427–435.
17. Sidorov A.V. On Groups closed to minimal non-F-groups // Issues of Algebra. – Minsk: Universitetskoe, 1986. Is. 2. P. 55–61.
18. Skiba A.N. Algebra of Formations. – Minsk: Belarusian Science, 1997. – 240 p.
19. Skiba A.N., Shemetkov L.A. Multiple ω -Local Formations and Fitting Classes of Finite Groups // Mathematical Works, 1999. Vol. 2, № 2. P. 114–147.
20. Hodalevich A.D. Minimal non-F-groups // Reports of the Academy of Sciences of the BSSR, 1984. Vol. 28, № 5. P. 389–391.
21. Shemetkov L.A. Formations of Finite Groups. – M.: Science, 1978. – 272 p.
22. Shemetkov L.A. New ideas and results of the Theory of Formations // Issues of Algebra. – Minsk: Universitetskoe 1989. Is. 4. P. 65–76.

On the influence of properties of minimal non-F-groups on classes of groups

A. A. Gorepekina, M. M. Sorokina

Annotation. Only finite groups are considered. In this paper we study minimal non-F-groups, where F is a class of groups, which are a natural generalization of such classical groups as Schmidt groups and Miller-Moreno groups. A group is called a minimal non-F-group if it does not belong to F, but every its proper subgroup belongs to F. A class F is called a Fitting class if it is closed under taking normal subgroups and under taking the products of a finite number of normal F-subgroups. We established the influence of the properties of minimal non-F-groups on the structure of the definite Fitting class F.

Keywords: finite group, minimal non-F-group, class of groups, Fitting class, Ω -foliated Fitting class.

One variant of the collocation-iterative method of solving integro-functional equations

I. Konet, K. Heseleva

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University, Kamianets-Podilskyi, Ukraine
Corresponding author. E-mail: geseleva1702@gmail.com

Paper received 25.01.21; Accepted for publication 12.02.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-03>

Abstract. The construction of exact solutions of integro-functional equations is possible only in some cases, so the questions of studying approximate methods for solving these equations, convergence conditions and estimating the errors are relevant. The article considers the construction of approximate solutions of linear integro-functional equations. It is shown that, under certain conditions, such solutions can be obtained by applying one variant of the collocation-iterative method to the problem. The algorithm of the method and sufficient convergence conditions are indicated.

Keywords: linear integro-functional equation, Fredholm integral equation of the second kind, collocation-iterative method, approximate solution, collocation nodes.

Introduction. Many problems of applied and theoretical nature cannot be imagined without the construction and reaserch of various mathematical models. Economics, biology, technology and many other fields of human activity are increasingly based in their research on the results obtained in the theory of operator equations. Therefore, many boundary value problems for differential equations with argument deviation are models of different natural processes. The theoretical foundations of these problems are laid in the works of A. Samoilenko, M. Perestyuk [11], A.Luchka [7] and other scientists.

Such problems are reduced to solving integro-functional equations. The exact solution of these equations can be found only in some simple cases. In more complex cases, the exact solution cannot be expressed by elementary functions. Therefore, approximate methods are important. The research of the projection-iterative method and its generalizations are devoted to the works of A. Luchka [8], N. Kurpel [4] and other. The methods of projection-iterative type include the collocation-iterative method, which arose as a result of the synthesis of the method of successive approximations and the method of collocation. It is quite effective in terms of finding approximate solutions of different types of integro-functional equations [1, 2]. The application of the collocation-iterative method for solving integro-functional equations is the main object of study of this article.

Analysis of recent research and publications. The research and theoretical substantiation of the collocation-iterative method with respect to one-dimensional and multidimensional Fredholm integral equations, the study of the rate of convergence of the method depending on the smoothness of the initial data are devoted to the work of A.Y. Luchka [7, 9] and E.M. Lutsev [6].

The application of the collocation-iterative method to find the solution of the boundary value problem for ordinary differential equations with parameters is devoted to the works of Poselyuzhna V.B. and Semchyshyna L.M. [10], Kucheruk T. [5]. In these works, the question of applying the collocation-iterative method (both stationary and nonstationary) to find the solution of the boundary value problem for ordinary differential equations with parameters, for differential equations with small nonlinearity, and for the boundary value problem for ordinary differential equations with momentum influence and

parameters. The application of a modified collocation-iterative method for solving integral Fredholm equations of the 2nd kind and differential equations with small non-linearity is also substantiated.

Despite the considerable many of work devoted to various aspects of the theory of approximate methods for solving different types of operator equations, the task of obtaining compatibility conditions and constructing new methods for finding approximate solutions of such equations is still far from being fully solved.

The purpose and objectives of the research. Construction and research of the studied publishing developments of integra-functional levels by collocation-interactive method. Describe the conditions and rate of convergence of this method and approximation errors.

Materials and methods

In space $L_2(a;b)$ – real and measuring on the interval $(a;b)$ of functions, summable with a square, consider the integro-functional equation form

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt, x \in (a;b), \quad (1)$$

$$y(x) = 0, x \notin (a;b),$$

where $f(x)$ – known, and $y(x)$ – unknown functions from $L_2(a;b)$. Regarding the functions $h(x), p(x), K(x;t)$ we assume that they, according to on the interval $[a;b]$ and on the squared $[a;b]^2$ satisfy the conditions:

$$|p(x)| \leq \bar{p} < \infty, \quad (2)$$

$$h(x) - \text{differentiable on } [a;b] \text{ and}$$

$$h'(x) \geq l > 0, x - h(x) \geq \sigma > 0, \quad (3)$$

$$\iint_{aa}^{bb} K^2(x;t) dx dt = B^2 < \infty. \quad (4)$$

We show that equation (1) under conditions (2) – (4) can be reduced to the integral Fredholm equation of the second kind. Next to the integral completely continuous operator K which has a form

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x;t)v(t)dt, \quad \forall v(x) \in L_2(a;b),$$

we consider the operator S such as

$$(Sv)(x) = \begin{cases} v(x), x \in [a; h^{-1}(a)], \\ v(x) - p(x)v(h(x)), x \in [h^{-1}(a); b], \end{cases} \quad (5)$$

where $v(x)$ – arbitrary function from $L_2(a;b)$.

Note that this operator, like the operator K , acts from $L_2(a;b)$ to $L_2(a;b)$. It is easy to show that the operator S linear. Conditions (2), (3) guarantee its limitation. Really,

$$\|S\| = \sup \frac{(Sv)(x)}{v(x)} \leq 1 + \left| \frac{p^2(x)}{h'(x)} \right|^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{\bar{p}}{\sqrt{l}} < \infty,$$

where \sup taken on $v(x) \in L_2(a;b), v(x) \neq 0$.

These conditions suggest that the operator S reversible. Inverse operator looks

$$(S^{-1}v)(x) = \begin{cases} v(x), x \in [a; h^{-1}(a)], \\ v(x) + \sum_{i=1}^s v(h^i(x)) \prod_{k=0}^{i-1} p(h^k(x)), \end{cases} \quad (6)$$

$x \in \Delta_s, s = \overline{1, m}$.

Here, as in the future,

$$\Delta_s = [c_{s-1}; c_s],$$

$$c_0 = a, c_s = h^{-1}(c_{s-1}), c_m = b,$$

$$h^k(x) = h(h^{k-1}(x)), s = \overline{1, m}.$$

So, in other words, expression (6) – is a solution of a functional equation

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = u(x), x \in [a; b],$$

$$y(x) = 0, x \notin [a; b],$$

(where $u(x)$ – known, $y(x)$ – unknown functions)

using the method of steps. Condition (3) guarantees the fact that the number of steps m are finite and

$$m \leq \left\lceil \frac{b-a}{\sigma} \right\rceil.$$

It is easy to make sure that the operator S^{-1} , as well as the operator S , linear and limited. Thus, given the above considerations, we can consider equation (1) as an operator equation

$$(Sy)(x) = f(x) + (Ky)(x), \quad (7)$$

where $f(x)$ – known, $y(x)$ – unknown functions

from $L_2(a;b)$.

Let $(Sy)(x) = u(x)$, then $y(x) = (S^{-1}u)(x)$ and we are of the equation (7) go to the equation

$$u(x) = f(x) + (Tu)(x). \quad (8)$$

Operator $T = KS^{-1}$ is Fredholm as a superposition of Fredholm and linear limited operators. In other words, using the above-mentioned substitution, we transform the integro-functional equation (1) into the integral Fredholm equation of the second kind

$$u(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)u(t)dt, \quad (9)$$

with a completely continuous integral operator T and

$$T(x;t) = \begin{cases} K(x;t) + \sum_{i=1}^{m-s} K(x; (h^{-1})^k(t)), t \in \Delta_s, \\ K(x;t), t \in (c_{m-1}; b), s = \overline{1, m-1}, x \in (a; b), \end{cases} \quad (10)$$

where $(h^{-1})^k(t) = h^{-1}((h^{-1})^{k-1}(t))$.

We can apply the method of successive approximations, collocation and some collocation-iterative methods to the problem (1) [3, 6]. Moreover, the most effective of convergence conditions is the last method, accordingly, the previous two methods can be considered as partial cases [5].

Let $\{\varphi_i(x)\}$ – linearly-independent system of functions from $L_2(a;b)$. Suppose, that based on the initial approximation $y_0 \in L_2(a;b)$ and functions $s_0(x)$ such as

$$y_0(x) - p(x)y_0(h(x)) = s_0(x), x \in [a; b],$$

$$y_0(x) = 0, x \notin [a; b],$$

we found an approximation $y_{k-1}(x)$ and function $s_{k-1}(x)$. The next approximation $y_k(x)$ we find from the functional equation

$$y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt, x \in [a; b], \quad (11)$$

$$y_k(x) = 0, x \notin [a; b],$$

which

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), \quad w_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \eta_j(x). \quad (12)$$

Unknown coefficients $a_j^k = a_j^k(n)$ determined from the condition

$$r_k(x_i) = 0, i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

where

$$r_k(x_i) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt - z_k(x) + p(x)z_k(h(x)), \quad (14)$$

$x_i \in [a; b]$ – collocation nodes, $i = \overline{1, n}$.

System of functions $\{\eta_j(x)\}, j = \overline{1, n}$ are determined from functional equations

$$\eta_j(x) - p(x)\eta_j(h(x)) = \varphi_j(x), x \in [a; b], \quad (15)$$

$$\eta_j(x) = 0, x \notin [a; b].$$

Results and discussion. The algorithm is given by replacement $u_k(x) = (Sy_k)(x)$, $\alpha_k(x) = (Sw_k)(x)$ reduces to a collocation-iterative method of solving integral equa-

tion (9) with a kernel having the form (10). Therefore, the following statement will take place.

Theorem. If one is not a point of the spectrum of the integral operator T equation (9), and system of functions $\{\varphi_i(x)\}$ is complete in space $L_2(a;b)$, then there will be such a number n , that method (11) – (15) will be convergent, and convergence rate will increase with increasing n .

Here are some sufficient conditions for the convergence of the method (11) – (15).

Suppose, as mentioned above, functions $p(x), h(x)$ and $K(x;t)$ satisfy the conditions (2) – (4). System of functions $\{\varphi_i(x)\}$ is complete and orthogonal in $L_2(a;b)$. The answer to the question of which n the above collocation-iterative method will be convergent, can be obtained using the algorithm. The essence of these algorithm is follows.

First, we construct functions by a recurrent formula $U'_s(x;t) = U_{s-1}(x;t) - \alpha_s E_s(x) \omega_s(t), s = 1, 2, \dots,$ (16) where

$$E_s(x) = \int_a^b U_{s-1}(x;t) \eta_s(t) dt, \quad \alpha_s^{-1} = \int_a^b \varphi_s^2(t) dt, \quad (17)$$

$$\omega_s(t) = \lambda_s(t) - \int_a^b U_{s-1}(x;t) \varphi_s(x) dx, \quad (18)$$

$$\lambda_s(t) = \varphi_s(t) - p(h^{-1}(t)) \varphi_s(h^{-1}(t)), t \in [a;b], \quad (19)$$

$$\varphi_s(t) = 0, \text{ when } t \notin [a;b].$$

We take $U_0(x;t) = K(x;t)$, and we find functions $\eta_s(x)$ by solving the functional equation (15).

After that we write function $U'_s(x;t) = U'_s(x;t) - \varphi_s(x) \beta_s(t), s = 1, 2, \dots,$ (20)

where

$$\beta_s(t) = \alpha_s \int_a^b U'_s(x;t) \varphi_s(x) dx. \quad (21)$$

Next, we solve the functional equation $L_s(x;t) - p(h^{-1}(t)) L_s(x;h^{-1}(t)) = U'_s(x;t), t \in [a;b],$ (22)

$$L_s(x;t) = 0, t \notin [a;b],$$

and we find the function $L_s(x;t), s = 1, 2, \dots$

Then calculate

$$q_s^2 = \int_a^b \int_a^b L_s^2(x;t) dx dt. \quad (23)$$

It turns out that if $q_s < 1$, then we come to the conclusion that method (11) – (15) will be convergent. If $q_s \geq 1$, then the question of the convergence of the method remains open. Gradually increasing the number of coordinate functions $\varphi_i(x), i = s + 1, s + 2, \dots$, according to the same recurrent formulas (16) – (23) we continued the calculation until we come to such n , that inequality $q_s < 1$ will be.

The convergence rate of collocation-iterative method will be characterized by inequality

$$\|y^*(x) - y_k(x)\| \leq C_n \cdot q_n^{k-1} \cdot \|y^*(x) - y_0(x)\|, \quad (24)$$

C_n – some positive constant, and $y^*(x)$ – exact solution of the integro-functional equation

$$y(x) - p(x) y(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t) y(t) dt, x \in (a;b), \quad (25)$$

$$y(x) = 0, x \notin (a;b),$$

where $f(x)$ – known, a $y(x)$ – unknown functions from $L_2(a;b)$.

This estimate can be used to finding the number of iterations, which necessary to reduce the initial error by the required number of times.

There also will be a constructive estimate:

$$\|y^*(x) - y_k(x)\| \leq \frac{p_n q_n^{k-s}}{1 - q_n} \cdot \|y_s(x) - z_s(x)\|, \quad (26)$$

where p_n – some positive number, $1 \leq s \leq k$, and $z_s(x)$ looks like (12).

Direct calculations according to method (11) – (15) should be performed as follows. First, we define a linearly-independent system of functions $\{\varphi_j(x)\}, j = \overline{1, n}$ and by the formula (15) find the system $\{\eta_j(x)\}$. After that we find functions

$$K_j(x) = \int_a^b K(x;t) \eta_j(t) dt, j = \overline{1, n}. \quad (27)$$

Next by the formula

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - K_j(x_i), \quad (28)$$

we can find the elements of the matrix Λ (тыт $x_i, i = \overline{1, n}$ – collocation nodes). Then we find the inverse matrix Λ^{-1} and move on to main calculations.

So, let the approximation $y_{k-1}(x)$ and according to function $s_{k-1}(x)$ already set. Then we perform the iteration

$$v_k(x) = f(x) - \int_a^b K(x;t) y_{k-1}(t) dt, \quad (29)$$

and we find a discrepancy

$$\varepsilon_k(x) = v_k(x) - s_{k-1}(x). \quad (30)$$

According to the formula

$$b_i^k = \varepsilon_k(x), \quad (31)$$

we find the coordinates of the vector b_i^k .

We write the equation $\Lambda \bar{a}_k = \bar{b}_k$ and we find its solution $\bar{a}_k = \Lambda^{-1} \bar{b}_k = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k).$ (32)

We construct functions

$$s_k(x) = v_k(x) + \sum_{j=1}^n a_j^k K_j(x), j = \overline{1, n}. \quad (33)$$

Then the approximate solution found from the functional equation

$$y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) = s_k(x), x \in (a; b),$$

$$y_k(x) = 0, x \notin (a; b). \quad (34)$$

Conclusions. The results obtained in the article expand the scope of the collocation-iterative method and enrich the theory of integro-functional equations. The developed algorithm of the method can be used to find solutions to specific mathematical problems that come from physics, biology, economics and other scientific fields. It is shown that the collocation-iterative method of solving integro-functional equations makes it possible to find solutions to

the problem. When using this method, at each step of the iteration there is a need to solve a linear system of algebraic equations. Since the basic matrix of the system is nondegenerate and the same for each iteration step, it is advisable to find the inverse matrix at the beginning of this process and then use it step by step to find approximate solutions. It should be kept in mind that the obtained results of the convergence method and constructive estimates of the errors of the method are important.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геселева К. Г. Колокаційний та колокаційно ітеративний методи розв'язання інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ, Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2015. Вип. 12. С. 19–27.
2. Геселева К. Г. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування лінійних інтегро-функціональних рівнянь. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ, Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2017. Вип. 16. С. 41–48.
3. Конет И. М., Геселева К. Г. Коллокационный и коллокационно-итеративный методы решения интегро-функционального уравнения. *Журнал «Вестник Брестского университета». Серия 4. Фізика. Математика*. 2017. № 2. С. 82–89.
4. Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений. *Наукова думка, Київ*, 1968. 244 с.
5. Кучерук Т. А. Крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь з додатковими умовами та її розв'язання ітеративним методом. *Доп. НАН України*. 2002. № 12. С. 17–20.
6. Луцев Е. М. Коллокационно-итеративный метод решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. *Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов*. Киев : Наук. думка, 1989. С. 132–138.
7. Лучка А.Ю. Интегральные уравнения и методы их решения. *Кибернетика и систем. анализ*. – 1996. №3. – С.82–96.
8. Лучка А.Ю. Критерий сходимости проекционно-итеративного метода для нелинейных уравнений. (Препринт. АН УССР. Ин-т математики; 82.24), Київ, 1980. 54 с.
9. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1980. 288 с.
10. Поселюжна В. Б., Семчишин Л. М. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь : монографія / Терноп. нац. екон. ун-т. Тернопіль : Економічна думка, 2013. 203 с.
11. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. *Вища школа*. Київ, 1987. 145 с.

REFERENCES

1. Heseleva K.H. Collocation and collocation iterative methods for solving integro-functional equations with small nonlinearity. *Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences: scientific journal* / V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University. – Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, 2015. ISSUE 12. P. 19–27.
2. Konet I.M., Heseleva K.H. Collocation and collocation-iterative methods for solving the integro-functional equation. *Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics*. Scientific-Theoretical Journal of Brest state university named after A.S. Pushkin. – Brest, 2017. № 2. P. 82–89.
3. Heseleva K.H. Collocation-iterative method for solving linear integro-functional equations. *Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences: scientific journal* / V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University. – Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, 2017. ISSUE 16. P. 41–48.
4. Kurpel N.S. Projection-iterative methods for solving linear differential and integral equations. *Naukova Dumka, Kyiv*, 1968. 244 p.
5. Kucheruk T.A. Boundary problem for ordinary differential equations with additional conditions and its solution by the iterative method. *Reserch NAS of Ukraine*. 2002. № 12. P. 17–20.
6. Lutsev E.M. Collocation-iterative method for solving linear integral Fredholm equations of the second kind. *Methods of research of differential and integral operators*. Kiev: Naukova Dumka, 1989. P. 132–138.
7. Luchka A.Y. Integral equations and methods of their solution. *Cybernetics and systems analysis*. - 1996. №3. - P.82-96.
8. Luchka A.Y. Convergence criterion of the projection-iterative method for nonlinear equations. (Preprint. Academy of Sciences of the USSR. Inst. Of Mathematics; 82.24), Kyiv, 1980. 54 p.
9. Luchka A.Y. Projection-iterative methods for solving linear differential and integral equations. Kiev: Naukova Dumka, 1980. 288 p.
10. Poselyuzhna V.B., Semchyshyn L.M. Colocation-iterative method for solving differential and integral equations: monograph / Ternopil. nat. econ. un-t. Ternopil: Ekonomichna Dumka, 2013. 203 p.
11. Samoilenko AM, Perestyuk N.A. Differential equations with impulse action. *Vyshcha shkola*. Kyiv, 1987. 145 p.

Дослідження системи з лінійно перетвореними аргументами і нелінійними інтегральними умовами

І. Д. Скутар

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
Corresponding author. E-mail: i.skutar@chnu.edu.ua

Paper received 26.01.21; Accepted for publication 12.02.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-04>

Анотація. Досліджено систему диференціальних рівнянь із запізненням на проміжку $[0, L]$ із n повільними та m швидкими змінними. Запізнення в системі характеризується лінійно перетвореними аргументами у повільних і у швидких змінних. Для повільних і швидких змінних задано інтегральні умови. Процедура усереднення за швидкими змінними здійснена як у системі рівнянь, так і в інтегральних умовах. Доведено існування єдиного розв'язку задачі та отримано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра.

Ключові слова: лінійно перетворений аргумент, метод усереднення, малий параметр, резонанс, інтегральна умова, оцінка похибки.

Вступ. Багаточастотні системи диференціальних рівнянь досліджувалися у працях В.І. Арнольда [1], Є.О. Гребенікова [2], М.М. Хапаєва [3], А.І. Нейштадта [4] та ін. Значний внесок у дослідження таких систем належить київській школі з нелінійних коливань і відображено в працях М.М. Боголюбова і Ю.О. Митропольського [5], А.М. Самойленка [6, 7]. Зокрема, новий підхід у дослідженні багаточастотних систем, які в процесі еволюції проходять через резонанс, висвітлено в працях А.М. Самойленка і Р.І. Петришина [7, 8].

Системи із m частотами і запізненням, яке задається лінійно перетвореними аргументами на $[0, L]$ у резонансному випадку з інтегральними умовами досліджені у працях [9,10]. Такого типу рівняння застосовуються у багатьох задачах, наприклад, при моделюванні зміни величини струму під час проходження електровозом контактних опор [11].

Значна кількість праць присвячена задачам із нелокальними умовами. У праці [12] досліджувалися властивості розв'язку скалярного диференціального рівняння другого порядку із сталим запізненням й інтегральною умовою

$$u(1) = \int_0^1 u(t) d\beta(t).$$

Задачі з іншими інтегральними умовами вивчалися в [13, 14] та ін.

Постановка задачі. У даній роботі розглянуто m -частотну систему диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad (2)$$

де $\tau \in [0, L]$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$,

$a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq 1$,

$\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_q \leq 1$.

Вектор-функції X , Y і ω достатньо гладкі за всіма аргументами при $\tau \in [0, L]$, $a \in D$, D – обмежена

замкнена опукла область в \mathbb{R}^n , $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, 2π -періодичні за змінними φ_{θ_j} .

Для системи рівнянь (1), (2) задано інтегральні умови

$$a(0) = f\left(\int_0^L A(\tau) a(\tau) d\tau\right), \quad (3)$$

$$\varphi(0) = \int_0^L h(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) d\tau, \quad (4)$$

де вектор функція h того ж класу, що й X і Y , $A(\tau)$ — матриця порядку n .

Усереднена за швидкими змінними задача набуває вигляду

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X(\tau, \bar{a}_\Lambda), \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, \bar{a}_\Lambda), \quad (6)$$

$$\bar{a}(0) = f\left(\int_0^L A(\tau) \bar{a}(\tau) d\tau\right), \quad (7)$$

$$\bar{\varphi}(0) = \int_0^L h_0(\tau, \bar{a}_\Lambda) d\tau. \quad (8)$$

Отримана після усереднення задача значно простіша, ніж точна (1)–(4), оскільки окремо розв'язується задача (5), (7). Якщо розв'язок $\bar{a} := \bar{a}(\tau; \bar{y})$, $\bar{a}(0; \bar{y}) = \bar{y}$, $\tau \in [0, L]$ знайдено, то розв'язок $\bar{\varphi} := \bar{\varphi}(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)$, $\bar{\varphi}(0; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) = \bar{\psi}$, знаходиться шляхом інтегрування. Задача полягає у знаходженні достатніх умов існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(4) та отримання оцінки відхилення розв'язків задач точної й усередненої задач, яка явно залежить від малого параметра ε .

Позначення. Введемо такі позначення:

$$\tilde{a}(\tau) := \bar{a}(\tau; \bar{y} + \mu), \quad z(a) := \int_0^L A(\tau) a(\tau) d\tau;$$

$V(\tau)$ – визначник Вронського порядку mq , побудований за системою функцій $\{\omega(\theta_1\tau), \dots, \omega(\theta_q\tau)\}$.

Відомо [10], що

$$\|\tilde{a}(\tau) - \bar{a}(\tau)\| \leq c_1 \|\mu\| \leq \rho / 2, \quad (9)$$

якщо

$$\|\mu\| \leq (2c_1)^{-1} \rho, \quad c_1 = L \exp(\rho\sigma_1). \quad (10)$$

Також виконується оцінка

$$\begin{aligned} & \|\kappa(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau; y, \psi, \varepsilon)\| := \\ & := \|a(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{a}(\tau; y)\| + \\ & + \|\varphi(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau; y, \psi, \varepsilon)\| \leq \\ & \leq c_2 \varepsilon^\alpha, \quad \tau \in [0, L], \end{aligned} \quad (11)$$

де $\alpha = (mq)^{-1}$, $\varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, $c_2 > 0$ і не залежить від ε . Така ж оцінка правильна і для похідних за початковими значеннями y і ψ [10].

Нехай I – одинична матриця порядку n ,

$$P(\bar{y}) := I - \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} \int_0^L A(\tau) \frac{\partial \bar{a}(\tau; \bar{y})}{\partial \bar{y}} d\tau,$$

$$\gamma_k(\tau) := \sum_{\nu=1}^q (k_\nu, \omega(\theta_\nu \tau)) \theta_\nu.$$

Резонанс в системі (1), (2) у точці τ задається умовою

$$\gamma_k(\tau) = 0, \quad k \neq 0.$$

Центральною умовою в обґрунтуванні методу усереднення є умова “незастрягання” системи в малому околі резонансів і зводиться до накладання деяких умов на вектор частот.

Існування єдиного розв’язку та обґрунтування методу усереднення.

Терема. Нехай виконуються такі умови:

- 1) $(X, Y, g) \in C_{\tau, a_\lambda, \varphi_0}^{2, 2, mq+2}(G, \sigma_1), G = [0, L] \times D^p \times R^{mq}$;
- 2) $\omega \in C^{mq-1}[0, L]$;
- 3) визначник Вронського $V(\tau)$ відмінний від нуля на $[0, L]$;
- 4) існує єдиний розв’язок усередненої задачі (5)–(8), компонента $\bar{a}(\tau; \bar{y})$ якого належить області D із деяким ρ -околом;
- 5) матриця $P(\bar{y})$ невинроджена і $\|P^{-1}(\bar{y})\| \leq \sigma_2$;
- 6) $A_{ij} \in C[0, L], f \in C^2(G_1), \left\| \frac{\partial f}{\partial z} \right\| \leq \sigma_3$;

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z_i \partial z_j} \right\| \leq \sigma_4, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Тоді для кожного досить малого $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0]$, існує єдиний розв’язок задачі (1)–(4) і виконується оцінка

$$\|\kappa(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \leq c_{12} \varepsilon^\alpha, \quad \forall \tau \in [0, L].$$

Доведення. Нехай $\varepsilon \leq \varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1, (\rho / 2c_2)^{1/\alpha})$.

Тоді в класі $C^1[0, L]$ існує єдиний розв’язок задачі

(1)–(4) із початковими умовами $(y, \psi) := (\bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi)$, визначений при $\tau \in [0, L]$ і справджується оцінка [9]

$$\|\kappa(\tau; \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau; \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon^\alpha / 2. \quad (12)$$

Покажемо, що цей розв’язок задовольняє для $\varepsilon \leq \varepsilon_3$ інтегральну умову (3).

Із умов (1), (5) теореми маємо

$$\begin{aligned} \mu &= f(z) - f(\bar{z}) = \\ &= \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} (z - \bar{z}) + \frac{\partial^2 f(\bar{z})}{\partial z^2} (\tilde{z} - \bar{z}) + R_1(\mu, \xi, \varepsilon), \\ \tilde{z} - \bar{z} &= \int_0^L A(\tau) (\tilde{a} - \bar{a}) d\tau = \\ &= \int_0^L A(\tau) \frac{\partial \bar{a}}{\partial y}(\tau; \bar{y}) \mu d\tau + R_2(\mu), \end{aligned}$$

де

$$R_1(\mu, \xi, \varepsilon) = f(z) - f(\bar{z}) - \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} (z - \bar{z}),$$

$$R_2(\mu) = \int_0^L A(\tau) [\tilde{a} - \bar{a} - \frac{\partial \bar{a}(\tau; \bar{y})}{\partial y} \mu] d\tau.$$

Оскільки матриця $P(\bar{y})$ невинроджена, то

$$\begin{aligned} \mu &= \Phi_1(\mu, \xi, \varepsilon) := \\ &:= P^{-1}(\bar{y}) \left[\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} (z - \tilde{z} + R_2(\mu)) + R_1(\mu, \xi, \varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

На підставі оцінок для розкладів вектор-функцій із монографії [2], одержимо

$$\|R_1\| \leq \frac{\sigma_4 n^2}{2} \|z - \bar{z}\|^2 \leq \frac{\sigma_4 \sigma_3 n^2}{2} (\|a - \tilde{a}\| + \|\bar{a} - \bar{a}\|)^2.$$

Тоді на підставі (9) і (12) одержимо

$$\|R_1(\mu, \xi, \varepsilon)\| \leq c_3 \left(c_2^2 \varepsilon^{2\alpha} + 4c_1 c_2 \varepsilon^\alpha \|\mu\| + 4c_1 \|\mu\|^2 \right),$$

$$c_3 = \sigma_4 \sigma_3 n^2 / 8.$$

Аналогічно одержимо

$$\|R_2(\mu)\| \leq \sigma_3 c_4 \|\mu\|^2, \quad c_4 = const > 0.$$

Нехай

$$c_5 = c_2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_5, \quad \mu \leq c_5 \varepsilon^\alpha, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_3 = \min(\varepsilon_2, \bar{\varepsilon}_3),$$

$$\bar{\varepsilon}_3 = \min\left(\rho(2c_1 c_5)^{-1}, c_5(4c_2^2 c_3 \sigma_2)^{-1}, (32c_1 c_2 c_3)^{-1}\right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(\mu, \xi, \varepsilon)\| &\leq 0.5 \sigma_2 [c_2 \sigma_3 \sigma_5 \varepsilon^\alpha + \\ &+ 2c_2^2 c_3 \varepsilon^{2\alpha} + 8c_1 c_2 c_3 \varepsilon^\alpha \|\mu\| + \\ &+ 2(c_4 \sigma_3 \sigma_4 + 4c_1^2 c_3) \|\mu\|^2] \leq c_5 \varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Отже, $\Phi_1 : S_1 \rightarrow S_1$, де $S_1 = \{\|\mu\| : \|\mu\| \leq c_5 \varepsilon^\alpha\}$.

Покажемо, що відображення Φ_1 – стискаюче.

Маємо,

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu} = P^{-1}(\bar{y}) \left[\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \mu} (z - \tilde{z}) + \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} \frac{\partial R_2(\mu)}{\partial \mu} + \frac{\partial R_1}{\partial \mu} \right].$$

Оскільки $\left\| \frac{\partial R_2}{\partial \mu} \right\| = O(\|\mu\|)$, $\left\| \frac{\partial R_1}{\partial \mu} \right\| = O(\|\mu\| + \varepsilon^\alpha)$, то

$$\left\| \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu} \right\| \leq \sigma_2 \left[c_2 \sigma_3 \varepsilon^\alpha / 2 + c_1 \sigma_3 \|\mu\| + c_7 (\|\mu\| + \varepsilon^\alpha) \right] \leq \frac{1}{2},$$

якщо

$$\varepsilon \leq \varepsilon_4 = \min \left(\varepsilon_3, \left[\sigma_2 (c_2 \sigma_3 + 2c_5 (c_1 \sigma_3 + c_7 + 1)) \right]^{-mq} \right).$$

Отже, для кожного ξ і ε існує єдина нерухома точка μ відображення Φ_1 , таке що $\|\mu\| \leq c_5 \varepsilon^\alpha$.

Розглянемо інтегральні умови (4) і (8). Маємо $\xi = \Phi_2(\xi(\mu), \varepsilon) :=$

$$\begin{aligned} &:= \int_0^L \left[g(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau)) - g_0(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \right] d\tau = \\ &= \sum_{\|k\|>0} \int_0^L g_k(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \exp \left[i \sum_{\nu=1}^q (\kappa_\nu, \varphi_{\theta_\nu}) \right] d\tau + \\ &+ \int_0^L \left[g_0(\tau, a_\Lambda(\tau)) - g_0(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \right] d\tau + \\ &+ \int_0^L \left[g_0(\tau, \tilde{a}_\Lambda(\tau)) - g_0(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \right] d\tau = R_3 + R_4 + R_5. \end{aligned}$$

Із гладкості вектор-функції g за змінними $\tau, a_{\lambda_\nu}, \nu = \overline{1, p}$, до другого порядку і за змінними $\varphi_{\theta_\nu}, \nu = \overline{1, q}$ до порядку $mq+2$ для осциляційних інтегралів

$$\begin{aligned} I_k(\tau; y, \psi, \varepsilon) &= \\ &= \int_0^\tau g_k(s, a_\Lambda(s; y, \psi, \varepsilon)) \exp \left[\frac{i}{\varepsilon} \int_0^s \gamma_\Theta(s_1) ds_1 \right] ds \end{aligned}$$

для $\varepsilon \leq \varepsilon_5$ правильні оцінки [9]

$$\begin{aligned} &\|I_k(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \leq \\ &\leq \sigma_6 \varepsilon^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{\|k\|_\Theta}\right) \sup_{\tau, \varepsilon} \|g_k(s, a_\Lambda(s, y, \psi, \varepsilon))\| + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \sup_{\tau, \varepsilon} \left\| \frac{\partial g_k(s, a_\Lambda(s, y, \psi, \varepsilon))}{\partial s} \right\| \right], \end{aligned} \quad (13)$$

де $\|k\|_\Theta := \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \|k_\nu\|$.

На підставі оцінки (13) й аналогічної оцінки для похідної $I_k(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ за змінними ψ одержимо

$$\|R_3(\mu, \xi, \varepsilon)\| \leq c_8 \varepsilon^\alpha, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_5. \quad (14)$$

Застосувавши оцінку (12), отримаємо

$$\begin{aligned} &\|R_2(\mu, \xi, \varepsilon)\| \leq \\ &\leq \sigma_1 \sum_{\nu=1}^p \int_0^L \|A(\tau)\| \|a_{\lambda_\nu}(\tau) - \bar{a}_{\lambda_\nu}(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq c_2 \sigma_1 \sigma_5 \varepsilon^\alpha / 2. \end{aligned} \quad (15)$$

На підставі оцінки (9) маємо

$$\|R_3\| \leq c_1 \sigma_1 \sigma_5 \|\mu\| \leq c_1 c_5 \sigma_1 \sigma_5 \varepsilon^\alpha, \quad (16)$$

якщо $\varepsilon \leq (2c_2 \sigma_3)^{-mq} = \varepsilon_6$.

Отже,

$$\|\Phi_2(\xi(\mu), \varepsilon)\| \leq \left(c_8 + \frac{\sigma_1 \sigma_5 (c_2 + 2c_1 c_5)}{2} \right) \varepsilon^\alpha =: c_9 \varepsilon^\alpha.$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^m$ такого, що $\xi \leq c_9 \varepsilon^\alpha$ маємо

$$\Phi_2 : S_2 \rightarrow S_2, \quad S_2 = \{ \xi : \|\xi\| \leq c_9 \varepsilon^\alpha \}.$$

Розглянемо матричну функцію

$$\frac{\partial \Phi_2(\xi(\mu), \varepsilon)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} R_3(\mu, \xi, \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \xi} R_2(\mu, \xi, \varepsilon).$$

Із оцінки похідної по ξ осциляційного інтеграла й відхилення розв'язків одержимо

$$\left\| \frac{\partial \Phi_2(\xi(\mu), \varepsilon)}{\partial \xi} \right\| \leq c_{10} \varepsilon^\alpha + c_1 \sigma_1 \sigma_5 \varepsilon^\alpha =: c_{11} \varepsilon^\alpha.$$

Отже, $\forall \varepsilon \leq \varepsilon^* = \min(\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, (2c_{11})^{-mq})$ на підста-

таві теоремі про стискаючі відображення [15] існує єдине значення (μ, ξ) таке, що $\|\mu\| \leq c_5 \varepsilon^\alpha, \|\xi\| \leq c_9 \varepsilon^\alpha$ для якого задовольняються умови (2) і (3), тобто існує єдиний розв'язок задачі (1)-(4).

Відповідна оцінка для похибки методу усереднення впливає із такої нерівності

$$\begin{aligned} &\| \kappa(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) \| \leq \\ &\leq \| \kappa(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \tilde{\kappa}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) \| + \\ &+ \| \tilde{\kappa}(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) \| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} c_2 \varepsilon^\alpha + c_1 \varepsilon^\alpha =: c_{12} \varepsilon^\alpha \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо одночастотну систему з одним лінійно перетвореним аргументом

$$\frac{da}{d\tau} = b_1 + b_2 \cos(k\varphi + l\varphi_\theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} (d_1 + d_2 \tau).$$

де $0 < k < -l, \theta = -k/l$, b_ν і d_ν – додатні числа, $\nu = 1, 2$.

Інтегральні умови мають вигляд

$$a(0) = A \int_0^L a(\tau) d\tau,$$

$$\varphi(0) = \beta \int_0^L \cos(k\varphi + l\varphi_\theta) d\tau,$$

де сталі $A > 0, \beta > 0, 1 - \alpha L \neq 0$.

Резонанс досягається при $\tau = 0$, оскільки $\gamma_{kl}(\tau) = d_2(k + \theta^2 l)\tau$. Визначник Вронського $V(\tau) = d_1 d_2 (1 - \theta) \neq 0$, тобто умова 3 теореми виконується, як і 1, 2 та 4.

Розв'язки точної задачі і відповідної їй усередненої задачі

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = b_1, \bar{a}(0) = A \int_0^L \bar{a}(\tau) d\tau,$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}(d_1 + d_2\tau), \bar{\varphi}(0) = 0,$$

набувають вигляду

$$a(\tau, \mu, \xi, \varepsilon) = \bar{y} + \mu + b_1\tau + b_2 \int_0^T \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right) d\tau,$$

$$\varphi(\tau, \xi, \varepsilon) = \xi + \frac{d_1 + d_2\tau}{\varepsilon} + \int_0^T \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right) d\tau,$$

$$\bar{a}(\tau) = \bar{y} + b_1\tau, \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) = \frac{d_1 + d_2\tau}{\varepsilon},$$

де $y = \frac{Ab_1L^2}{2(1-AL)}, c = d_2(k+l\theta^2)/2.$

Початкове значення знаходиться із рівняння

$$\xi = \beta \int_0^1 \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right) d\tau =: \Phi_2(\xi).$$

Якщо

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 = c / (8\pi\beta^2(k+l)^2),$$

то з асимптотики інтеграла Френеля [16] випливає, що виконується умова стиску відображення Φ_2 , тобто існує єдина нерухома точка з відображення

$$\Phi_2 : S_2 \rightarrow S_2.$$

Тут

$$S_2 = \{\xi : |\xi| \leq c_1\sqrt{\varepsilon}, c_1 = \beta\sqrt{\pi}/\sqrt{2c}\}.$$

Значення набуває вигляду

$$\mu := \Phi_1(\xi) = \frac{A}{|1-AL|} \int_0^1 \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right) d\tau.$$

З асимптотики інтеграла Френеля випливає, що при $\tau = 0$

$$|a(\tau, \mu, \xi, \varepsilon) - \bar{a}(\tau)| \leq c_2\sqrt{\varepsilon},$$

$$|\varphi(\tau, \xi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)| \leq c_1\sqrt{\varepsilon},$$

де $c_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2|c|}} \left(\frac{A}{|1-AL|} + |b_2| \right).$

Зауважимо, що для одночастотної системи без запізнення оцінка похибки має порядок ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Висновки. Для спрощення m-частотної системи диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами й нелінійними інтегральними умовами застосовано процедуру усереднення за швидкими змінними. Доведено існування єдиного розв'язку точної задачі. Одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра та кількості швидких змінних і лінійно перетворених аргументів у них. Побудовано приклад одночастотної системи з інтегральними умовами, на якому проілюстровано отриманий результат.

ЛІТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: УРСС, 2002. 416 с.
2. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в небесной механике. Москва: Наука, 1971. 444 с.
3. Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости. Москва: Наука, 1986.
4. Neishtadt A.I. Averaging, passage through resonances and capture into resonance in two-frequency system. *Russian Mathematical Surveys*. 2014, 69 (5), p.771-843.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 503 с.
6. Самойленко А.М. К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем. *Дифференц. уравнения*. 1987, 23 (2), с.267-278.
7. Самойленко А.М., Петришин Р.И. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наукова думка, 2004. 475 с.
8. Самойленко А.М., Петришин Р.И. Метод усреднения в некоторых краевых задачах. *Дифференц. уравнения*. 1989, 25 (6), с.956-964.
9. Бігун Я.Й. Існування розв'язку та усереднення багаточастотних крайових задач для багаточастотних систем із лінійно перетвореним аргументом. *Нелінійні коливання*. 2008, 11 (4), с.462-471.
10. Бігун Я.Й., Краснокутська І.В., Петришин Р.И. Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і багаточастотними та інтегральними умовами. *Буковинський математичний журнал*. 2016, 4 (3-4), с.30-35.
11. Гребенчиков Б.Г., Ложников А.Б. Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывание. *Дифференц. уравнения*. 2004, 40 (12), с.1587-1595.
12. Dingyong Rai, Yuantong Xu. Positive solution and eigenvalue intervals of nonlocal boundary value problem with delays. *Math. Analysis and Appl.*, 2007, 334, p.1152-1166.
13. Johnny Henderson and Rodica Luca. Boundary Value Problems for Systems of Differential, Difference and Fractional Equation. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, Netherlands, 2016.
14. Jankowski T. First-order differential equations with nonlocal boundary conditions. *Dynamic Systems and Applications*. 2015, 24, p.195-210.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1981. 544 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Москва: Наука, 1974, том 2. 296 с.

REFERENCES

1. Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I., Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. Moscow: URSS, 2002, 416 pp.
2. Grebenikov E.A., Ryabov Yu.A. New quality methods in celestial mechanics. Moscow: Nauka, 1971. 444 pp.
3. Khapaev M.M. Averaging in stability theory. Moscow: Nauka, 1986.
5. Bogoliubov, N. N., Mitropolskii Yu. A. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. Moscow: Nauka, 1974. 503 pp.
6. Samoilenko A.M. On the question of substantiating the averaging method for multifrequency oscillatory systems. *Differential Equations*, 1987, vol. 23 (2), pp.267-278.
7. Samoilenko A.M., Petryshyn R.I. Mathematical aspects of the theory of nonlinear oscillations. Kyiv: Naukova Dumka, 2004. 475 pp.
8. Samoilenko A.M., Petryshyn R.I. Averaging method in some boundary value problems. *Differential Equations*, 1989, vol. 25 (6), pp.956-964.

9. Bigun Y. I. On existence of solution and averaging for multipoint boundary-value problems for many-frequency systems with linearly transformed argument. *Nonlinear Oscillation*, 2008, vol. 11 (4), pp. 462-471.
10. Bihun Ya.Y., Krasnokutska I.V., Petryshyn R.I., Averaging in multifrequency systems with linearly transformed arguments and with multipoint and integral conditions. *Bukovinian Mathematical Journal*. 2016, vol. 4 (3-4), pp.30-35.
11. Grebenshchikov, B.G., Lozhnikov, A.B. Stabilization of a system with a constant and a linear delay. *Differential Equations*, 2004, vol. 40 (12), pp. 1587–1595.
15. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka, 1981. 544 pp.
16. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. Moscow: Nauka, 1974, vol. 2. 296 p

Investigation of a system with linearly transformed arguments and nonlinear integral conditions

I. D. Skutar

Abstract. The system of differential equations with delay on the interval $[0, L]$ with n slow and m fast variables is investigated. The delay in the system is characterized by linearly transformed arguments in slow and fast variables. Integral conditions are given for slow and fast variables. The procedure of averaging over fast variables is carried out both in the system of equations and in integral conditions. The existence of a unique solution to the problem is proved and the accuracy of the averaging method is estimated, which obviously depends on the small parameter.

Keywords: linearly transformed argument, averaging method, small parameter, resonance, integral condition, estimation of accuracy.

MEDICAL SCIENCE

Особенности клинической картины носовых кровотечений на фоне проведения антитромботической терапии

Н. С. Бычкова

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина
Corresponding author. E-mail: bichkova18ns@gmail.com

Paper received 25.01.21; Accepted for publication 12.02.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-05>

Аннотация. В результате исследования установлено, что НК на фоне проведения антитромботической терапии наиболее часто возникают в передних отделах полости носа и имеют преимущественно диапедезный характер. Местными предрасполагающими факторами риска возникновения НК при проведении антитромботической терапии являются атрофический ринит, наличие деформации перегородки носа и полипозноизменная средняя носовая раковина. На фоне дезагрегантной терапии НК имеют менее интенсивный характер и склонность к рецидивированию, чаще останавливаются самостоятельно чем у больных при проведении антикоагулянтной терапии.

Ключевые слова: носовые кровотечения, антитромботическая терапия, дезагрегантная терапия, антикоагулянтная терапия.

Введение. В настоящее время констатируется неуклонный рост числа больных с патологией сердечно-сосудистой системы, нуждающихся в проведении антитромботической терапии [1]. На фоне приема антикоагулянтов и дезагрегантов всегда выше риск развития геморрагических осложнений (в том числе и носовых). Антитромботическая терапия повышает риск фатальных и нефатальных кровотечений (по сравнению с лицами, ее не получающими) в среднем в 1,6 раза [8]. По данным многих авторов число стационарных больных с носовыми кровотечениями (НК), которые находятся на антитромботической терапии, составляет от 29% до 48%. [7].

Однако в литературе недостаточно данных о частоте и характере НК у этой категории больных. Особенности клинической картины НК на фоне проведения антитромботической терапии до настоящего времени остаются недостаточно изученными.

Целью исследования являлось изучение особенностей клинической картины НК на фоне проведения антитромботической терапии.

Материалы и методы. Проведено изучение особенностей клинической картины НК у 156 больных на фоне проведения антитромботической терапии. Среди обследованных больных женщин было 73(46,8%), мужчин - 83 (53,2%). Возраст больных колебался от 39 до 89 лет, средний возраст составил 66,7±11,8 лет.

Наиболее частым (у 79 (50,6% больных) показанием для назначения антитромботической терапии послужило нарушения сердечного ритма, основной формой которого являлось наличие пароксизмальной или постоянной формы фибрилляции предсердий. В связи с перенесенными тромбоемболическими событиями на антитромботической терапии находилось 36 (23,1%) больных. Реже показанием к проведению антитромботической терапии являлись стабильная стенокардия, перенесенные эндоваскулярные вмешательства (чрескожные коронарные вмешательства) и пороки сердца, которые отмечены у 18 (11,5%), 14 (9,0%) и 9 (5,8%) больных соответственно.

На антикоагулянтной терапии находилось 37

(23,7%) больных и 119 (76,3%) больных получали дезагрегантную терапию.

С целью определения локализации НК и оценки состояния слизистой оболочки полости носа больным выполнялась передняя риноскопия и эндоскопия полости носа.

Результаты и их обсуждение. Обращает на себя внимание значительное преобладание больных пожилого и старческого возраста, удельный вес которых составил 73,1%. Преобладание больных именно этой возрастной группы объясняется тем, что люди пожилого и старческого возраста более часто нуждаются в проведении антитромботической терапии чем лица молодого и среднего возраста. Кроме того, при лечении этого контингента больных необходимо учитывать возрастные изменения и наличие сопутствующей патологии. Сопутствующая патология выявлена у 109 (95,6%) больных пожилого и старческого возраста и только у 16 (38,1 %) больных молодого и среднего возраста.

Отмечена яркая выраженность сезонности возникновения НК у больных, принимавших антикоагулянты или дезагреганты. Значительное количество больных поступило (42,9%) в зимний период, что можно объяснить влиянием факторов окружающей среды (низкие температуры и более сухой вдыхаемый воздух) на возникновение НК. По нашему мнению, еще одним из факторов сезонности возникновения НК является отопление помещений в холодное время года, что приводит к снижению влажности воздуха окружающей среды и соответственно пересыхание слизистой оболочки полости носа. По нашим данным 102 (65,4%) больных поступили в период отопительного сезона. Таким образом, одним из профилактических мероприятий возникновения НК, по нашему мнению, может быть использование увлажнителей воздуха в помещениях и индивидуальное использование назальных солевых спреев и увлажняющих средств в отопительный период.

При сборе анамнеза было выяснено, что НК у исследуемых больных чаще всего возникали непредска-

зуюмо, без каких-либо предшественников при нормальных цифрах артериального давления. Только у 8 (5,1%) больных НК возникло на фоне гипертонического криза. Одной из особенностей НК на фоне проведения антитромботической терапии, выявленных нами, явилось постепенное развитие кровотечения в течение нескольких дней. У 110 (70,5%) больных НК начинались с незначительных геморрагических выделений из полости носа, которым больные не придавали особого значения и за медицинской помощью не обращались. Отмечено усиление интенсивности НК с последующей необходимостью оказания квалифицированной медицинской помощи при различных провокационных факторах: форсированное сморкание, физическая нагрузка, особенно с наклоном туловища, пальцевая травматизация полости носа и извлечение из полости носа салфеток или сухих ватных шариков, что вероятно приводило к нарушению образования сгустков крови и дополнительной травматизации слизистой оболочки носа.

При анализе анамнестических данных выявлено, что среди больных с НК на фоне антикоагулянтной терапии значительно чаще (в 1,7 раз) рецидивы кровотечения наблюдались при приеме варфарина чем у больных, лечившихся ривароксабаном. Так, из 11 больных находящихся на варфарине у 8 (72,7%) в анамнезе уже были НК, причем у 6 (75%) из них многократные (повторяющиеся несколько раз в год на протяжении длительного времени) с неоднократными тампонированиями полости носа для остановки кровотечения и у 2 (25%) больных НК останавливались самостоятельно. Среди 26 больных, которые получали ривароксабан, только у 11 (42,3%) больных в анамнезе были НК, у 7 (63,6%) из них НК останавливались самостоятельно. Таким образом, при антикоагулянтной терапии у 19 (51,4%) больных наблюдались рецидивные НК, из которых 10 (52,6%) остановились самостоятельно и 9 (47,4%) нуждались в тампонировании.

Среди 119 больных с НК на фоне дезагрегантной терапии эпизоды кровотечений в анамнезе отмечены у 46 (38,7%) больных, из которых у 35 (76,1%) больных НК остановилось самостоятельно и у 11 (23,9%) остановка кровотечения выполнена тампонированием.

Среди обследованных больных определялась зависимость степени тяжести кровопотери от характера проводимой антитромботической терапии.

На фоне проведения антикоагулянтной терапии степень кровопотери среди больных с НК распределялась следующим образом: легкая - 17 (46,0%) больных, средняя - 15 (40,5%) больных и тяжелая - 5 (13,5%) больных. Причем из 5 больных с тяжелой степенью кровопотери 4 (80%) находились на варфарине.

Среди больных получавших дезагрегантную терапию доля больных (76,5%) с легкой степенью кровопотери была в 1,7 раз больше, чем при антикоагулянтной терапии. Соотношение удельного веса больных с кровопотерей средней и тяжелой степенью между больными получавшими дезагрегантную и антикоагулянтную терапии составило 1: 2,3.

Таким образом на фоне дезагрегантной терапии

НК имеют менее интенсивный характер и склонность к рецидивированию, чаще останавливаются самостоятельно, чем у больных при проведении антикоагулянтной терапии. Среди антикоагулянтной терапии более интенсивный и рецидивирующий характер НК отмечен у больных, получавших варфарин.

Всем больным была выполнена передняя риноскопия. Диагностическая ценность эндоскопического исследования полости носа в условиях продолжающегося НК оказалась невысокой и была выполнена только 14 (8,9%) больным с целью уточнения локализации источника кровотечения. Также одним из факторов ограничения показаний к проведению эндоскопии на высоте кровотечения являлось вероятность усиления интенсивности НК вследствие травматизации слизистой оболочки полости носа.

При риноскопии 4 больных с высокой интенсивностью НК не представилось возможным установить источник кровотечения, поскольку интенсивное кровотечение затрудняло осмотр полости носа. Локализация в задних отделах полости носа у них была установлена на основании данных фарингоскопии (стекание крови по задней стенке глотки) и отсутствии визуализации источника кровотечения в переднем среднем отделе полости носа.

Нами был проведен анализ зависимости локализации НК от характера антитромботической терапии. При проведении антитромботической терапии НК из передних отделов полости носа, когда источник располагался в зоне Киссельбаха, отмечено у 144 (92,3%) больных. НК из задних отделов носа было диагностировано у 12 (7,7%) больных. Одностороннее НК наблюдалось у 150 (96,1%) и двухстороннее – у 6 (3,9%) больных.

Частота НК в задних отделах полости носа при проведении антикоагулянтной терапии в 1,6 раза была выше аналогичного показателя при проведении дезагрегантной терапии. Причем из 4 больных при проведении антикоагулянтной терапии 3 (75,5%) больных находились на варфарине. Какой-либо зависимости частоты НК из задних отделов носа при дезагрегантной терапии от группы препарата (ингибиторы фермента ЦОГ-1 или группа тиаоперидинов) нами не было выявлено. Обращает на себя внимание, что из 12 больных с НК из задних отделов носа 10 (83,3%) больных по возрастным критериям относились к лицам пожилого и старческого возраста.

Таким образом, НК при проведении антитромботической терапии значительно чаще наблюдаются из передних отделов носа, среди НК из задних отделов носа большой удельный вес составляют больные при проведении антикоагулянтной терапии в пожилом и старческом возрасте. Наибольший риск возникновения НК из задних отделов носа имеют больные при лечении антагонистами витамина К (варфарин).

При риноскопическом осмотре следы свежей крови определялись у всех больных, при этом сгустки крови в полости носа наблюдались у 108 (69,2%) и геморрагические корки в области зоны Киссельбаха - у 64 (41,0%) больных. У 48 (30,8%) больных при риноскопии на высоте кровотечения не визуализировались сгустки крови, что вероятно было обусловлено явлениями гипокоагуляции, характерной при прове-

дении антитромботической терапии.

Обращает на себя внимание, что только у 31(19,9%) больного визуализировался кровотокающий сосуд с подтеканием свежей крови. У остальных больных (80,1%) НК носило диапедезный характер различной интенсивности, не имевшее определенного единственного источника. Диапедезное НК характеризовалось наличием множественных равноценных источников геморрагии, рассредоточенных по всей слизистой оболочке полости носа, преимущественно в зоне Киссельбаха. При этом риноскопически визуализировались множественные кровоизлияния и геморрагическое пропитывание слизистой оболочки полости носа.

Субатрофические изменения слизистой оболочки полости носа (бледность, сухость и истончение слизистой оболочки носа) выявлены у 95 (62,8%) больных, причем 74 (77,9%) из них были больные пожилого и старческого возраста. Признаки атрофического ринита преимущественно локализовались в передних отделах перегородки носа. Из вышеприведенного можно сделать заключение, что НК при проведении антитромботической терапии чаще наблюдаются на фоне местных атрофических изменений в слизистой оболочке полости носа.

Поверхностное расположение сосудов слизистой оболочки носа в области Киссельбаха выявлено у 36 (23,1%) больных. Патологически извитые сосуды наблюдались у 27 (17,3%) больных, из которых у 8 больных на фоне повышения артериального давления визуализировались расширенные, частично тромбированные сосуды в зоне Киссельбаха, послужившие источником НК. Патологические изменения сосудов, по-видимому, связаны с тем, что большинство

(90,4%) исследуемых больных страдали гипертонической болезнью и возрастными изменениями сосудистой стенки больных (73,1%) пожилого и старческого возраста.

Искривление перегородки носа выявлено у 32 (20,5%) больных, полипозно измененная средняя носовая раковина – у 17 (10,9%) и гипертрофия носовых раковин – 9 (5,8%) больных. У большинства больных (71,8%), у которых выявлены искривление перегородки носа или полипозно измененная средняя носовая раковина, НК носили упорный рецидивирующий характер. Таким образом искривление перегородки носа и полипозно измененная средняя носовая раковина являются предрасполагающими факторами развития НК при проведении антитромботической терапии.

Выводы:

1. НК на фоне проведения антитромботической терапии наиболее часто возникают в передних отделах полости носа и имеют преимущественно диапедезный характер.
2. Местными предрасполагающими факторами риска возникновения НК при проведении антитромботической терапии являются атрофический ринит, наличие деформации перегородки носа и полипозно измененная средняя носовая раковина
3. На фоне дезагрегантной терапии НК имеют менее интенсивный характер и склонность к рецидивированию, чаще останавливаются самостоятельно чем у больных при проведении антикоагулянтной терапии. Среди антикоагулянтной терапии более интенсивный и рецидивирующий характер НК отмечен у больных, получавших варфарин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Connolly S. J. The long-term multicenter observational study of dabigatran treatment in patients with atrial fibrillation (RELY-ABLE) study/ S. J. Connolly, L. Wallentin, M. D. Ezekowitz, J. Eikelboom et al. // *Circulation*.- 2013.- Vol. 128.- P. 237-243.
2. Heit, J.A. The epidemiology of venous thromboembolism / J.A. Heit, F.A. Spencer, R.H. White // *J Thromb Thrombolysis*. - 2016 Jan. - Vol. 41. - N 1. - P. 3 - 14.
3. Escabasse V. Guidelines of the French Society of Otorhinolaryngology (SFORL) Managing epistaxis under coagulation disorder due to antithrombotic therapy/ V. Escabasse, E. Bequignon, B. Verillaud et al.// *Eur. Ann. Otorhinolaryngol. Head Neck Dis.*- 2017.- Vol. 134.- P. 195–199.
4. Beck R. Current Approaches to Epistaxis Treatment in Primary and Secondary Care./ R. Beck, M. Sorge, A. Schneider, A. Dietz // *Dtsch. Arztebl. Int.*- 2018.- Vol. 115(1-2).- P. 12–22
5. Bola S. Does the continuation of warfarin change management outcomes in epistaxis patients?/ S. Bola, R. Marsh, S. Braggins [et al.] // *J. Laryngol. Otol.*- 2016.- Vol.- 130(3).- P. 256-60.
6. Buchberger A.M.S. The role of oral anticoagulants in epistaxis./ A.M.S. Buchberger, A. Baumann, F Johnson [et al.] // *Eur. Arch. Otorhinolaryngol.*- 2018.- Vol. 275(8).- P. 2035-2043.
7. Desai N.R. Patterns of initiation of oral anticoagulants in patients with atrial fibrillation—quality and cost implications / N.R. Desai, A.A. Krumme, S. Schneeweiss et al. // *Am. J. Med.*- 2014.- Vol.-127.- P.1075–1082.
8. Li X. Clinical benefits of pharmacogenetic algorithm-based warfarin dosing: meta-analysis of randomized controlled trials/ X. Li, J. Yang, X. Wang et al. // *Thromb. Res.*- 2015.- Vol. 135(4).- P. 621-629.
9. Stadler R.R. The long-term fate of epistaxis patients with exposure to antithrombotic medication / R.R. Stadler, R. Kindler, D. Holzmann, M.B. Soyka // *Eur. Arch. Otorhinolaryngol.*- 2016.- Vol. 273.- P. 2561–2567.

Clinical features of nasal bleeding in the background of antithrombotic therapy

N. Bychkova

Abstract. As a result of the research, it was found that NB on the background of ATT most often occur in the anterior parts of the nasal cavity and are predominantly diapedetic. Local predisposing factors for the occurrence of NB during ATT are atrophic rhinitis, the presence of deformation of the nasal septum, and polyposis of the middle turbinate. On the background of antiplatelet therapy (APT), NBs are less intense and tend to recur, more often they stop on their own than in patients with anticoagulation therapy (ACT).

Keywords: nosebleeds, antithrombotic therapy, antiplatelet therapy, anticoagulation therapy.

Тактика хирургического лечения синдрома Мирizzi

Е. Д. Хворостов, С. А. Бычков, В. В. Дериколенко, Р. Н. Гринёв

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина. Медицинский факультет. Кафедра хирургических болезней.
Corresponding author. E-mail: derikolenkovv@gmail.com.

Paper received 23.01.21; Accepted for publication 11.02.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-06>

Аннотация. Проанализировано лечение 159 пациентов с синдромом Мирizzi (СМ). Особое внимание уделялось дооперационной диагностики СМ. Диагноз формировался на основе разработанной нами классификации. Что позволяет спланировать и стандартизировать хирургическую тактику, улучшить результаты оперативного вмешательства и сократить вероятность осложнений. Правильная оценка данных УЗИ позволяет с высокой степенью вероятности установить наличие СМ. СМ I А и I Б типов не являются противопоказанием к проведению операции лапароскопическим методом.

Ключевые слова: синдром Мирizzi, лапароскопическая холецистэктомия, холецисто-холедохоэальный свищ.

Введение. СМ - это осложненная форма желчекаменной болезни (ЖКБ), которая характеризуется частичным сужением общего печеночного протока в результате воспалительно-деструктивных процессов за счет сдавления извне желчным конкрементом, расположенным в пузырном протоке или шейке желчного пузыря, что приводит к стенозу печеночного протока и образованию билиобилиарного свища. По данным литературы СМ развивается у 0,25-6% больных с различными формами ЖКБ [1,11].

СМ остаётся одним из наименее изученных и наиболее грозных осложнений холелитиаза, не смотря на то что первое его описание произведено более полувека назад [6]. В современной практике отсутствует единое мнение в вопросах морфологической сущности патологических изменений, составляющих основу синдрома, стадий течения и типов, диагностики, вида и объема операции при данной патологии. Трудности дооперационной диагностики в большой степени определяют затруднения в выборе тактики лечения.

Ведущее значение в диагностике и определении дальнейшей хирургической тактики при ЖКБ и её осложнениях имеет ультразвуковая диагностика. Данный метод обладает высокой степенью информативности, неинвазивен, не обладает противопоказаниями, возможностью выполнения в короткие сроки без предварительной подготовки в независимости от тяжести состояния больного. Так же недооценено значение ультразвуковой диагностики в решении проблемы такого грозного осложнения ЖКБ как СМ.

Краткий обзор публикаций по теме. Долгое время наличие СМ исключало применение лапароскопической техники входе оперативного вмешательства. Сейчас же появляется всё больше работ, свидетельствующих об эффективности лапароскопической коррекции при различных типах СМ[1,3,7].

P.L. Mirizzi (автор впервые описавший данный синдром), в своей работе «Les fistules bilio-biliares internes spontanees» (1952) разделил свищи на следующие типы[10]: 1) свищ между желчным пузырем и холедохом выше места впадения пузырного протока в общий желчный; 2) свищ расположен ниже слияния пузырного протока и холедоха; 3) пузырно-гепатико-холедохоэальный свищ – протяженный дефект, захватывающий области как проксимальнее, так и дистальнее впадения пузырного протока в холедох. Большинство ав-

торов выделяют два типа СМ, которые были предложены С.К. McSherry в 1982 г.[9]: I тип — сдавление гепатикохоледоха камнем, находящимся в самом пузыре, его шейке или пузырном протоке; II тип — образование свища между желчным пузырем и гепатикохоледохом с его обструкцией конкрементом.

Классификация Csendes (1989): I. Внешняя компрессия общего желчного протока. II. Свищ между желчным пузырем и гепатикохоледохом с разрушением 1/3 окружности гепатикохоледоха. III. Свищ до 2/3 окружности общего печеночного протока. IV. Свищ на весь просвет гепатикохоледоха[5].

В. С. Савельев и В. И. Ревякин выделяет две формы СМ: 1) острую, морфологической основой которой является сужение просвета проксимального отдела гепатикохоледоха и 2) хроническую — свищ между желчным пузырем и внепеченочным желчным протоком[2].

В своей практике мы используем классификацию собственной разработки[4]:

I тип – вколоченный в шейку желчного пузыря или в пузырный проток конкремент, сдавливающий гепатикохоледох:

А) плотное прилегание стенок желчного пузыря и гепатикохоледоха с сохранением структуры их двух стенок;

Б) сращение стенок желчного пузыря и гепатикохоледоха с формированием единой стенки между ними, стадия «общей стенки»;

II тип – между желчным пузырем и гепатикохоледохом имеется свищ:

А) свищ занимает менее 1/2 окружности протока;

Б) свищ занимает более 1/2 окружности протока;

III тип – свищ между желчным пузырем и гепатикохоледохом, холедохолитиаз, дистрофические изменения желчного пузыря, приведшие к его гипоплазии.

К сожалению СМ по сути остаётся интраоперационным диагнозом[3]. Что ведёт к увеличению времени операции, неоправданному расширению объёма вмешательства, развитию грозных инвалидизирующих осложнений или даже летальному исходу[10]. Хирургу зачастую сложно принять решение о необходимости перехода на лапаротомный доступ. В случае, когда диагноза СМ установлен дооперационно удаётся в полном объёме спланировать лечебную тактику и объём оперативного вмешательства[7,8].

Цель. Систематизация хирургической тактики при СМ, с целью улучшения результатов лечения данного

осложнения ЖКБ.

Материалы и методы. Исследование основано на опыте лечения 159 больных с СМ (7,4% из всех больных ЖКБ). Возраст от 32 до 84 лет, женщин 103 (64,8%), мужчин - 56 (35,2%). Из них: хронический холецистит - 98 (61,6%) больных, острый холецистит - 61 (38,4%) (катаральный - 36, флегмонозный - 18, гангренозный - 7). У 39 (24,5%) больных отмечалась клиника механической желтухи (уровень общего билирубина колебался от 34 до 286 мкмоль/л). 108 (67,9%) – имели механическую желтуху в анамнезе. Лишь у 8 (5,0%) не удалось установить достоверных данных о наличии желтухи.

Пациенты были подвергнуты полноценному обследованию, включавшему: клинко-лабораторное обследование, УЗИ, ФЭГДС, по показаниям эндоскопическую ретроградную холангиографию (ЭРХПГ).

Первым этапом инструментального обследования пациентов с ЖКБ являлось УЗИ, при котором помимо установления факта холелитиаза, определения состояния стенки жёлчного пузыря и определения признаков билиарной гипертензии определялись следующие признаки свидетельствующие о наличии СМ: размеры и расположение конкремента в желчном пузыре, интимное прилегание шейки желчного пузыря с расположенным в ней конкрементом к правому либо общему печеночным протокам, признакам сдавления конкрементом общего желчного протока, наличие расширения внутри- и внепеченочных желчных протоков.

Диагноз формировался на основе разработанной нами классификации. Особое внимание уделялось возможности дооперационной диагностики СМ.

Результаты и их обсуждение. СМ I типа выявлен у 124 (78,0%) больных, СМ II типа - 33 (20,8%) больных, СМ III типа - 2 (1,2%) больных.

По данным УЗИ у 116 (73,0%) пациентов удалось дооперационно установить диагноз СМ, по следующим критериям: наличие холецисто-холедохеального свища - 4(2,5%) больных, визуализация «общей» стенки - 36(22,6%) больных, вклиненный крупный конкремент в шейку желчного пузыря - 123 (77,4%), расширение гепатикохоледоха выше места прилегания желчного пузыря - 37 (23,3%), деформация стенки гепатикохоледоха в месте прилегания желчного пузыря - 23 (14,5%), „сморщенный” желчный пузырь - 12 (7,5%), не лоцируется желчный пузырь - 3 (1,9%). У 43(27,0%) больного не было выявлено ультразвуковых признаков СМ или присутствовал один из косвенных, которому не придали должного внимания.

ЭРХПГ была выполнена всем больным с наличием механической желтухой, с желтухой в анамнезе, при диаметре холедоха, по данным УЗИ, более 8 мм, и при наличии косвенных эхопризнаков СМ. При этом холецистохоледохеальный свищ был обнаружен у 11 больных, у 75 больных было выявлено сдавление извне общего желчного протока или общего печеночного протока на уровне желчного пузыря или пузырного протока. При этом у 35 больных был выявлен холедохолитиаз. При наличии холедохолитиаза и явлений желчной гипертензии без признаков холедохолитиаза (17 больных) при транспапиллярном вмешательстве выполнялась эндоскопическая папилосфинктеротомия (ЭПСТ) и у больных с холедохолитиазом максимально

возможная литоэкстракция, у большинства больных с применением механического литотриптора. Полная литоэкстракция из гепатикохоледоха выполнена у 28 больных (у 4 из них выполнена поэтапная литоэкстракция в несколько приемов) и у 7 больных частичная. У 19 пациентов установлен назобилиарный дренаж с целью обеспечения адекватного пассажа желчи, санации желчных путей и профилактики миграции в желчные протоки конкрементов из желчного пузыря. У 3 больных успешно выполненные рентгенэндоскопические транспапиллярные вмешательства явились окончательным методом лечения: у 1 больного с СМ III типа после адекватной эндоскопической санации желчного дерева и не визуализации при УЗИ и ЭРХПГ желчного пузыря и у 2 больных с СМ II типа с тяжелой сопутствующей патологией (сморщенный желчный пузырь не содержал конкрементов, что послужило причиной отказа от холецистэктомии).

При СМ I A типа (100 (62,9%) больных) считаем рациональным выполнение ЛХЭ. При этом хирург сталкивается со значительными морфологическими изменениями тканей в зоне оперативного вмешательства, вследствие рубцовых изменений, однако при хорошем знании топографо-анатомических вариантов строения образований в зоне гепатодуоденальной связки и тщательных, бережных манипуляциях, ЛХЭ оказывается успешной.

У пациентов с СМ I B типа (стадия «общей стенки») (24 (15,1%) больных) при возникновении технических трудностей выделения задней стенки желчного пузыря выполняется субтотальная холецистэктомия по разработанной нами технологии лапароскопического удаления желчного пузыря с сохранением фиксированной к гепатикохоледоху его стенки.

В случае СМ II A типа (наличие дефекта гепатикохоледоха не более чем на 1/2 его окружности) (23(14,5%) больной) выполняется субтотальная холецистэктомия, холедохолитотомия, при остаточном холедохолитиазе после эндоскопической санации холедоха. Далее следует пластика гепатикохоледоха участком стенки желчного пузыря на Т-образном дренаже.

При больших размерах дефекта (10(6,3%) больных с СМ II B типа) и у больной с травмой холедоха предпочтение отдаётся созданию билиодигестивного анастомоза. В 2 случаях было выполнено наложение холедоходуоденоанастомоза (при благоприятном расположении дефекта), а в 8 - гепатикоюноанастомоза на выключенной петле тонкой кишки по Ру.

При наличии СМ III типа (2(1,2%) пациентка) целесообразно ограничить оперативное вмешательство холедохолитотомией с обязательной контрольной интраоперационной холангиографией.

На этапе лапароскопической ревизии у 25 (15,7%) больных были обнаружены плотные рубцовые сращения в подпеченочном пространстве в данной ситуации дальнейшие лапароскопические манипуляции нецелесообразны, из-за высокого риска осложнений. Этих больных мы не относим к числу конверсий, так как попытки выделения желчного пузыря из сращений не производились. У 18 из этих пациентов в ходе лапаротомного вмешательства было установлено наличие холецистохоледохеального свища.

Конверсия производилась в следующих ситуациях:

у 1 больного при выявлении СМ II типа, у 4 - из-за непреодолимых технических трудностей холецистэктомии лапароскопическим методом (плотный инфильтрат, обширный спаечный процесс в зоне треугольника Кало) и у 1 больной при травме холедоха (так же на фоне выраженного спаечного процесса).

В послеоперационном периоде наблюдались следующие осложнения: внутрибрюшное желчеистечение - 2, инфильтрат подпеченочного пространства - 2, гематома ложа желчного пузыря - 2, внутрибрюшное кровотечение - 1.

Выводы.

1. Установление наличия СМ до операции позволяет правильно спланировать хирургическую тактику, довести её до ведома пациента, что уменьшает психологическую нагрузку на оперирующую бригаду. Что

приводит к улучшению результатов оперативного вмешательства и сокращению вероятности осложнений.

2. Правильная оценка данных УЗИ позволяет с высокой степенью вероятности установить наличие СМ, сокращая использование инвазивных и затратных методик.
3. СМ I А и I Б типов не являются противопоказанием к проведению операции с использованием лапароскопической техники.
4. Стандартизация хирургической тактики на основании разработанной классификации позволила нам существенно минимизировать послеоперационные осложнения и летальность.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Колкин Я.Г., Хацко В.В., Дудин А.М., Комарь Е.Л., Фоминов В.М. Синдром Миризи: диагностика и хирургическая тактика// Украинский журнал хирургии, 2012. №2 (17) (<http://www.mif-ua.com/archive/article/35358>)
2. Савельев В.С., Ревакин В.И. Синдром Миризи (диагностика и лечение)// М.: Медицина, 2003. 112 с.
3. Сипливый В.А., Евтушенко Д.В., Петренко Г.Д., Андреещев С.А., Евтушенко А.В. Диагностика и хирургическое лечение синдрома Mirizzi// Клінічна хірургія, 2016. №8, С. 8-11.
4. Хворостов Е.Д., Дериколенко В.В., Бычков С.А., Цивенко А.И., Гринёв Р.Н. Классификация, диагностика и современные подходы хирургической коррекции синдрома Миризи// Харківська хірургічна школа, 2020. №1(100), С. 89-93.
5. Csendes A., Diaz J.C., Burdiles P. [et al.] Mirizzi syndrome and cholecystobiliary fistula: a unifying classification// Br. J. Surg, 1989. № 76 (11), P. 1139–1143.
6. El Hanafy E., Atef E., El Nakeeb A., Hamdy E., Elhemaly M., Sultan A.M. Mirizzi syndrome: how it could be a challenge// Hepato-Gastroenterology, 2014. vol. 61, no. 133, P. 1182–118.
7. Lacerda P.S., Ruiz M.R., Melo A., Guimaraes L.S., Silva-Junior R.A., Nakajama G.S. Mirizzi syndrome: a surgical challenge// Arquivos Brasileiros de Cirurgia Digestiva, 2014. Is. 27 (3), P.226.
8. Lee K-F, Chong C-N, Ma K-W, Cheung E., Wogn J., Cheung S., Lai P. A. Minimally invasive strategy for Mirizzi syndrome: the combined endoscopic and robotic approach// Surgical Endoscopy and Other Interventional Techniques, 2014. Is. 28(9), P. 2690–2694.
9. McSherry C. K., Ferstenberg H., Virshup M. The Mirizzi syndrome: Suggested classification and surgical therapy// Surg. Gastroenterol, 1982. № 1, P. 219–225.
10. Mirizzi P. L. Les Fistules biliobiliares internes spontanees// J Chir, 1952. №68, P. 23–28.
11. Payá-Llorente C., Vázquez-Tarragón A., Alberola-Soler A. et al. Mirizzi syndrome: a new insight provided by a novel classification. Ann. Hepatobiliary// Pancreat. Surg, 2, P. 67–75.

REFERENCES.

1. Kolkin YA.G., Hacko V.V., Dudin A.M., Komar' E.L., Fominov V.M. Mirizzi syndrome: diagnosis and surgical tactics // Ukrainskij zhurnal hirurgii, 2012. №2 (17) (<http://www.mif-ua.com/archive/article/35358>)
2. Savel'ev V.S., Revyakin V.I. Mirizzi syndrome (diagnosis and treatment)// М.: Medicina, 2003. 112 p.
3. Syplyvyi V.A., Ievtushenko D.V., Petrenko G.D., Andreyeshchev S.A., Ievtushenko A.V. Diagnosis and surgical treatment of mirizzi syndrome // Klinichna khirurgiia, 2016. №8, P. 8-11.
4. Khvorostov Y.D., Derykolenko V.V., Bychkov S.A., Tsivenko O.I., Hrynov R.N. Classification, diagnosis and modern approaches to the surgical correction of Mirizy syndrome// Kharkivska khirurgichna shkola, 2020. №1(100), P. 89-93.

Tactics of surgical treatment of Mirizzi syndrome

Y. D. Khvorostov, S. A. Bychkov, V. V. Derykolenko, O. I. Tsivenko, R. N. Hrynov

Abstract. The treatment of 159 patients with Mirizzi syndrome (MS) was analyzed. Specific attention was paid to preoperative diagnosis of MS. The diagnosis was formed on the basis of the classification developed by us. This allows you to plan and standardize surgical tactics, improve the results of surgical treatment and reduce the probability of complications. Proper evaluation of the ultrasound data makes it possible to diagnose the presence of MS with a high degree of probability. MS I-A and I-B types are not a precautions to the surgical treatment by the laparoscopic method.

Keywords: *Mirizzi syndrome, laparoscopic cholecystectomy, cholecysto-choledechoal fistula.*

TECHNICAL SCIENCES

Автоматическое определение параметров оптимальной стратегии расхождения судов при снижении их скоростей на постоянных курсах

Д. Б. Федоров, И. А. Бурмака

Национальный Университет «Одесская Морская Академия», Одесса, Украина
Corresponding author. E-mail: burmaka1964@gmail.com

Paper received 10.01.21; Accepted for publication 24.01.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-07>

Аннотация. Рассмотрен метод автоматического выбора оптимальной стратегии расхождения судов при снижении их скоростей на постоянных курсах. Приведен пример опасной ситуации сближения судов и выбор оптимальной стратегии их расхождения снижением скоростей активным торможением. Произведено имитационное моделирование маневра расхождения, подтверждающее корректность предложенного метода.

Ключевые слова: безопасность судоходства, расхождение судов при опасном сближении, маневр расхождения активным торможением, имитационное моделирование.

Введение. В стесненных водах возрастает риск возникновения аварий судов из-за интенсивного судоходства и навигационных опасностей. Поэтому стесненные районы плавания с особенно интенсивным движением оборудуются станциями управления движением судов, которые помимо контроля процесса судоходства обеспечивают его безопасность, предупреждая столкновения судов в ситуациях опасного сближения, что требует разработки методов безопасного расхождения внешним управлением.

Существенной причиной, ведущей к возникновению угрозы столкновения судов, является субъективность оценки ситуаций сближения и принятия решений по предупреждению столкновения. Поэтому для снижения влияния человеческого фактора в ситуациях опасного сближения целесообразно автоматизировать определение параметров оптимальной стратегии расхождения судов, чему посвящена данная публикация.

Краткий обзор публикаций по теме. Проблеме предупреждения столкновений судов посвящены многочисленные работы ученых разных стран, в которых предложены различные методы выбора маневра расхождения. Формализация процесса расхождения методом нелинейной интегральной инвариантности предложена в работе [1], а описание процесса расхождения методами теории оптимальных дискретных процессов представлено в работе [2]. Работа [3] посвящена процедуре выбора оптимального стандартного маневра расхождения пары судов.

Взаимодействие судов в ситуации опасного сближения и выбор стратегии расхождения для предупреждения их столкновения рассмотрены в работе [4], а в работе [5] освещены вопросы учета инерционности судна при выборе его стратегии расхождения.

В работе [6] излагается теоретическое обоснование автономной судовой системы уклонения от столкновения и рассматриваются требования к автономной навигации. Показано, что исследования по автоматизации управления судном могут быть представлены компьютерной технологией, которая использует искусственный интеллект.

Ситуация чрезмерного сближения судов и экстренное расхождение рассмотрены в работе [7], а в работе

[8] представлены способы формализации навигационных опасностей и их учет при выборе стратегии расхождения судов. В работе [9] исследованы принципы локально-независимого и внешнего управления процессом расхождения опасно сближающихся судов, а также приведен подробный анализ методов их реализации.

Цель. Цель настоящей статьи - разработка метода автоматического определения параметров оптимальной стратегии расхождения судов при снижении их скоростей на постоянных курсах.

Материалы и методы. В работе [9] для внешнего управления процессом расхождения опасно сближающихся судов рассмотрены области опасных значений скоростей и получены уравнения для их границ, как зависимость скорости одного судна от скорости второго, причем выражение для верхней границы:

$$V_1^* = V_2 \sin(K_2 - \gamma^*) / \sin(K_1 - \gamma^*),$$

где $\gamma^* = \alpha - \arcsin(d_d/D)$.

Нижняя граница выражается аналогично:

$$V_{1*} = V_2 \frac{\sin(K_2 - \gamma_*)}{\sin(K_1 - \gamma_*)},$$

где, $\gamma_* = \alpha + \arcsin(d_d/D)$.

Очевидно, при постоянных значениях курсов K_1, K_2 и параметров γ^*, γ_* границы опасной области скоростей являются линейными. На рис. 1 показана область недопустимых скоростей для пары опасно сближающихся судов, курсы которых являются неизменными.

Определение маневра расхождения с помощью области опасных скоростей судов осуществляется оператором и, как показано в работе [9], требует значительного времени. Данные обстоятельства снижают безопасность выбранного маневра расхождения, поэтому для устранения упомянутых недостатков целесообразно разработать процедуру автоматического определения параметров маневра расхождения судов изменением их скоростей.

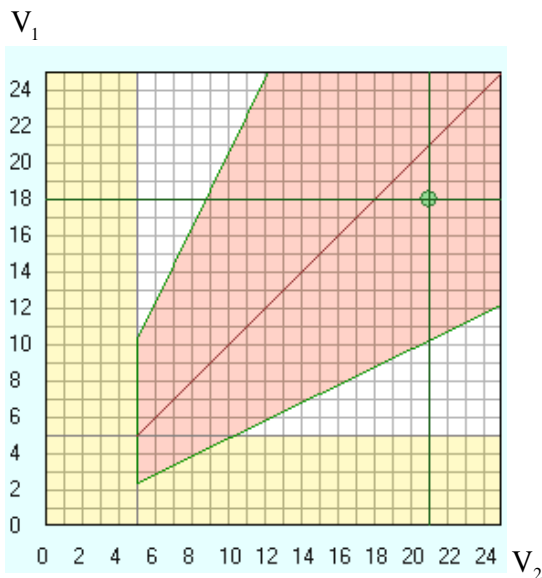


Рис. 1. Область опасных скоростей судов

Результаты и их обсуждение. Для выбора безопасного маневра расхождения при его внешнем управлении торможением обоих судов следует в начальный момент времени $t_n = 0$ начать торможение обоих судов (активное или пассивное) до скоростей расхождения V_{1y} и V_{2y} , которые необходимо определить и они должны минимально отличаться от начальных значений соответствующих скоростей V_1 , V_2 .

Выбор скоростей расхождения V_{1y} и V_{2y} производится таким образом, чтобы достигалось равенство дистанции кратчайшего сближения $D_{\min}(V_{1y}, V_{2y})$ с предельно-допустимой дистанцией сближения D_d , т. е. $D_{\min}(V_{1y}, V_{2y}) = D_d$, к моменту времени окончания переходного процесса, совпадающего с моментом времени кратчайшего сближения.

Значения скоростей V_{1y} и V_{2y} являются меньшими, чем их начальные значения V_1 и V_2 , т. к. маневр расхождения судов изменением скоростей выполняется их торможением, и суда с пониженными скоростями следуют до момента времени кратчайшего сближения, после чего увеличивают скорости до начальных значений.

Предположим, начальная ситуация опасного сближения судов для начального момента времени $t_0 = 0$ характеризуется пеленгом α_0 и дистанцией D_0 . Так как пеленг α_0 задается с первого судна на второе, то для первого судна целесообразно принять начальные координаты $X_{10} = 0$ и $Y_{10} = 0$. Тогда начальные координаты второго судна имеют значения $X_{20} = D_0 \sin \alpha_0$ и $Y_{20} = D_0 \cos \alpha_0$.

В дальнейшем при движении судов их координаты X_{1t} , Y_{1t} , X_{2t} и Y_{2t} , а также текущие значения

дистанции D_t и пеленга α_t изменяются. Через $S_{\text{мх}}$ обозначим судно, переходной период изменения скорости которого больше или равный длительности общего переходного процесса t_p . Судно с меньшим переходным периодом обозначим $S_{\text{мн}}$. Если время начала маневра расхождения t_n равно начальному моменту времени t_0 , то суда в течение переходного процесса t_p проходят дистанции:

$$D_{\text{мх}} = S_{\text{мх}}, D_{\text{мн}} = S_{\text{мн}} + V_{\text{мн}y}(t_p - \tau_{\text{мн}}),$$

где $S_{\text{мх}}$ и $S_{\text{мн}}$ - расстояния, которые проходят соответственно суда $S_{\text{мх}}$ и $S_{\text{мн}}$ за время изменения скоростей $\tau_{\text{мх}}$ и $\tau_{\text{мн}}$.

К моменту времени окончания общего переходного процесса t_p координаты судов $X_{\text{мх}p}$, $Y_{\text{мх}p}$, $X_{\text{мн}p}$ и $Y_{\text{мн}p}$ определяются следующими выражениями:

$$X_{\text{мх}p} = D_{\text{мх}} \sin K_{\text{мх}} = S_{\text{мх}} \sin K_{\text{мх}};$$

$$Y_{\text{мх}p} = D_{\text{мх}} \cos K_{\text{мх}} = S_{\text{мх}} \cos K_{\text{мх}};$$

$$X_{\text{мн}p} = D_{\text{мн}} \sin K_{\text{мн}} = [S_{\text{мн}} + V_{\text{мн}y}(t_p - \tau_{\text{мн}})] \sin K_{\text{мн}};$$

$$Y_{\text{мн}p} = D_{\text{мн}} \cos K_{\text{мн}} = [S_{\text{мн}} + V_{\text{мн}y}(t_p - \tau_{\text{мн}})] \cos K_{\text{мн}}.$$

Выражения пеленга α_p и дистанции D_p на момент времени окончания общего переходного процесса t_p имеют вид:

$$D_p = \sqrt{(X_{\text{мх}p} - X_{\text{мн}p})^2 + (Y_{\text{мх}p} - Y_{\text{мн}p})^2},$$

$$\alpha_p = \arcsin \frac{X_{\text{мх}p} - X_{\text{мн}p}}{D_p}.$$

В момент времени окончания переходного процесса t_p скорости движения обоих судов, как и относительный курс $K_{\text{отр}}$, становятся постоянными, а величина дистанции кратчайшего сближения судов D_{\min} рассчитывается с помощью формулы:

$$D_{\min} = \Delta_p D_p \sin(K_{\text{отр}} - \alpha_p),$$

$$\text{где } \Delta_p = \text{sign}[\sin(K_{\text{отр}} - \alpha_p)].$$

Задаваясь значением скорости V_{1y} первого судна, рассчитываем значение скорости V_{2y} второго судна, при которой вычисленное значение D_{\min} равно величине D_d . В случае $D_{\min}(V_{1y}, V_{2y}) < D_d$ безопасное расхождение судов скоростью V_{1y} невозможно.

При выполнении маневра расхождения изменением скоростей пары судов рассмотрим вариант, когда оба судна используют активное торможение.

В этом случае величины τ_{1y} , τ_{2y} , S_1 и S_2 первого и второго судов рассчитываются по формулам, приведенным в работе [9]:

$$\begin{aligned} \tau_{1y} &= \frac{m_1}{\mu V_{yp1}} \left[\arctg \frac{V_1}{V_{yp1}} - \arctg \frac{V_{1y}}{V_{yp1}} \right], \\ \tau_{2y} &= \frac{m_2}{\mu V_{yp2}} \left[\arctg \frac{V_2}{V_{yp2}} - \arctg \frac{V_{2y}}{V_{yp2}} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Расстояния S_1 и S_2 их торможения рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{m_1}{2\mu} \ln \left| \frac{V_1^2 + V_{yp1}^2}{V_{1y}^2 + V_{yp1}^2} \right|, \\ S_2 &= \frac{m_2}{2\mu} \ln \left| \frac{V_2^2 + V_{yp2}^2}{V_{2y}^2 + V_{yp2}^2} \right|. \end{aligned} \quad (2)$$

Путем сравнения полученных величин τ_{1y} и τ_{2y} , определяются координаты судов X_{mxp} , Y_{mxp} , X_{mnp} и Y_{mnp} . В случае справедливости неравенства $\tau_{1y} > \tau_{2y}$ получаем:

$$\begin{aligned} \tau_{mx} &= \tau_{1y}, \tau_{mn} = \tau_{2y}, S_{mx} = S_1, S_{mn} = S_2, \\ V_{mx} &= V_1, V_{mn} = V_2, V_{mny} = V_{2y}, K_{mx} = K_1, \\ K_{mn} &= K_2. \end{aligned}$$

Если же $\tau_{1y} < \tau_{2y}$, то имеем:

$$\begin{aligned} \tau_{mx} &= \tau_{2y}, \tau_{mn} = \tau_{1y}, S_{mx} = S_2, S_{mn} = S_1, \\ V_{mx} &= V_2, V_{mn} = V_1, V_{mny} = V_{1y}, K_{mx} = K_2, \\ K_{mn} &= K_1. \end{aligned}$$

С помощью полученных параметров, задавая скоростью V_{1y} , начиная со скорости $V_{2y} = V_2$ и уменьшая ее в каждом цикле на выбранное значение ΔV_{2y} , рассчитываются значения D_{mx} и D_{mn} , а затем – дистанция кратчайшего сближения D_{min} , которая сравнивается с предельно-допустимой дистанцией D_d . Циклические повторения вычислений продолжаются до тех пор, пока не наступит равенство $D_{min}(V_{1y}, V_{2y}) = D_d$, которое определяет искомое значение V_{2y} . Значения скорости V_{1y} задаются из диапазона $V_{1y} \in [V_1, V_{1min}]$, где V_{1min} – минимальная скорость, при которой управляется судно. По описанному алгоритму для каждого значения скоро-

сти V_{1y} из указанного диапазона рассчитывается скорость V_{2y} , удовлетворяющая равенству $D_{min}(V_{1y}, V_{2y}) = D_d$, в результате чего получим безопасный маневр расхождения судов с учетом инерционно-тормозных характеристик их торможения. Для каждого из безопасных маневров расхождения судов рассчитываем приращения скоростей $\Delta V_1 = V_1 - V_{1y}$ и $\Delta V_2 = V_2 - V_{2y}$, а также критерий оптимальности $Q = \Delta V_1^2 + \Delta V_2^2$.

Как раньше упоминалось, из диапазона $[V_1, V_{1min}]$ задается скорость V_{1y} , начиная из $V_{1y} = V_1$, для которой по ранее описанному алгоритму определяется скорость V_{2y} и для полученного маневра расхождения (V_{1y}, V_{2y}) рассчитывается критерий оптимальности Q . Затем скорость V_{1y} выбирается меньшей на 1 узел и рассчитывается скорость V_{2y} и критерий оптимальности Q . Так продолжается до тех пор, пока $V_{1y} = V_{1min}$. Из полученного множества маневров расхождения (V_{1y}, V_{2y}) в качестве оптимального выбирается тот, у которого $Q = \min$.

Для расчета скоростей оптимального маневра расхождения судов торможением была разработана компьютерная программа. В качестве примера была рассмотрена ситуация опасного сближения судов с параметрами: пеленг $\alpha = 154^\circ$, дистанция $D = 4$ мили, параметры движения судов $K_1 = 237^\circ$, $K_2 = 278^\circ$, $V_1 = 15$ узлов и $V_2 = 20$ узлов, $D_d = 1$ мили.

С помощью компьютерной программы, используя приведенную ситуацию опасного сближения для активного торможения обоих судов были рассчитаны оптимальные скорости V_{1y} и V_{2y} . При расчете допускалось, что оба судна имеют одинаковые инерционно-тормозные характеристики. Расчет проводился по разработанному алгоритму с использованием формул (1) и (2).

В результате расчета были определены скорости расхождения $V_{1y} = 14,7$ уз и $V_{2y} = 14,4$ уз.

Было произведено имитационное моделирование процесса расхождения судов при снижении их скоростей на постоянных курсах. На рис. 2 показано начало процесса расхождения. Завершение торможения первого судна на 5 секунде отображено на рис. 3, а завершение торможения второго судна показано на рис. 4. На рис. 5 показана ситуация кратчайшего сближения.

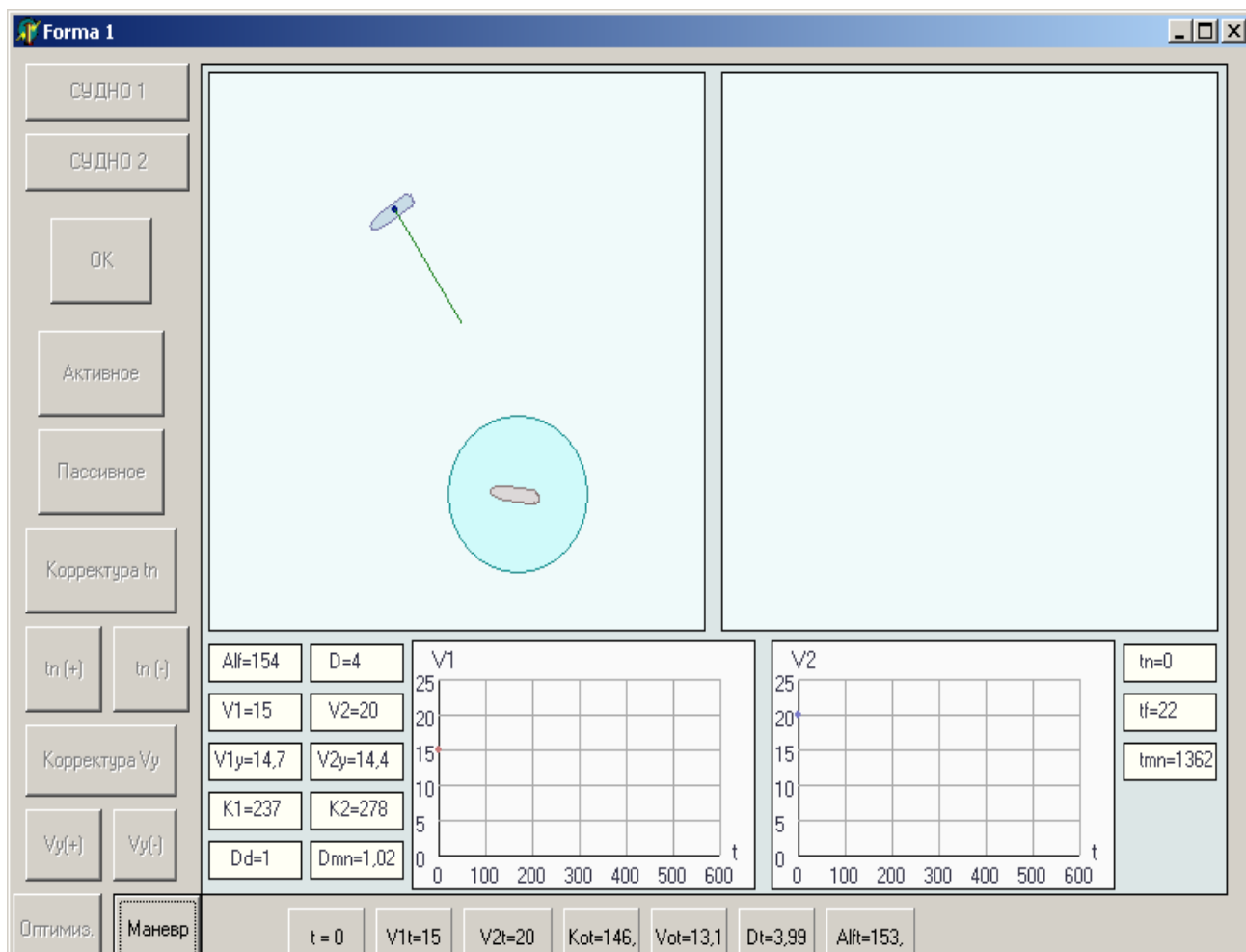


Рис. 2. Начало процесса расхождения

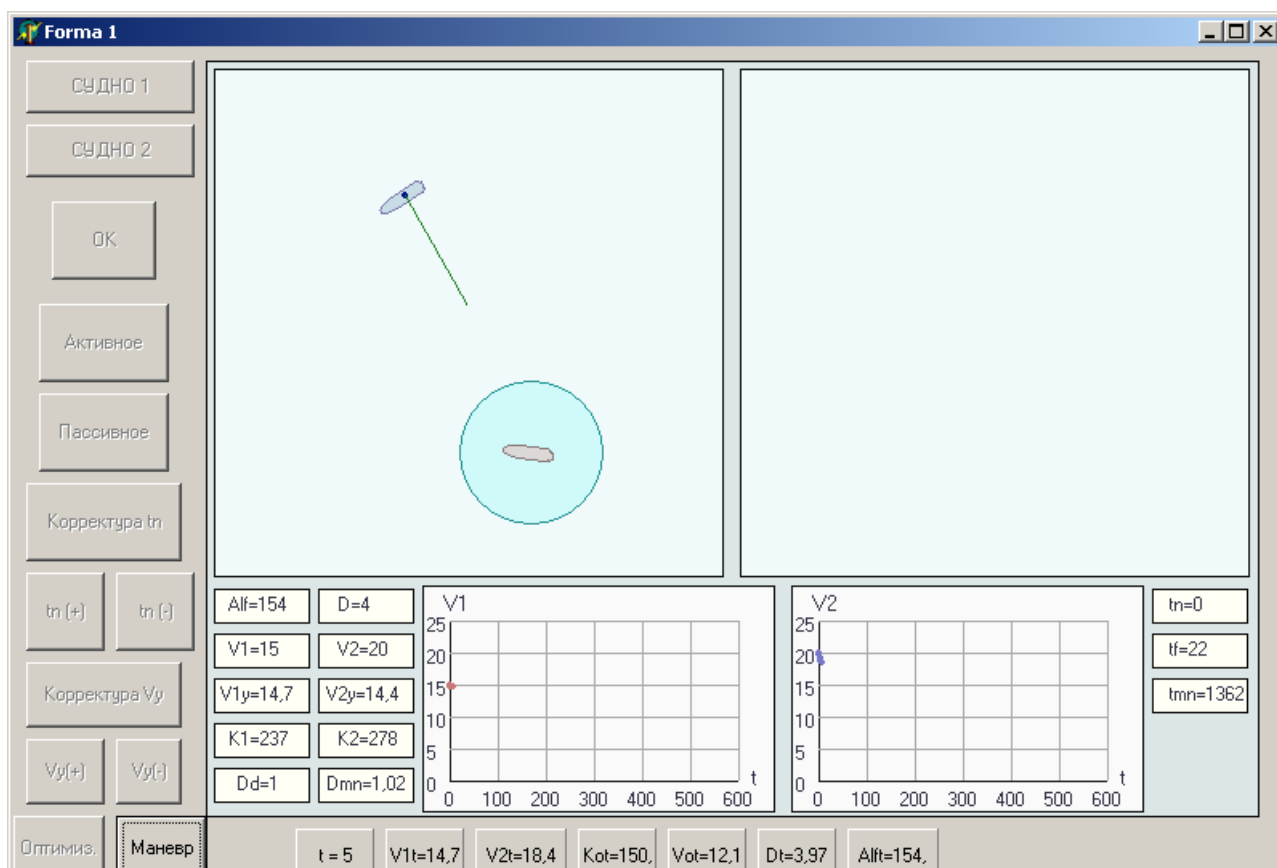


Рис. 3. Завершение торможения первого судна

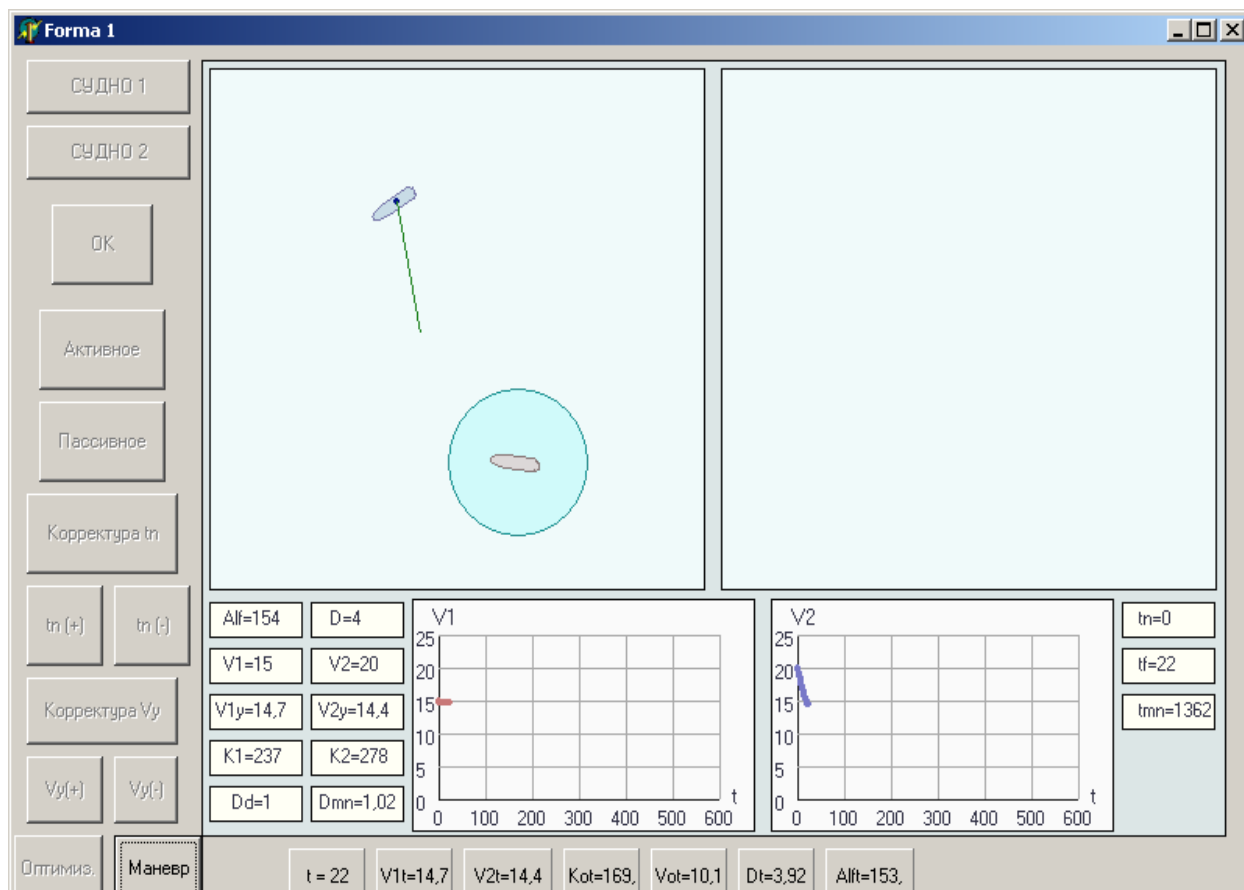


Рис. 4. Завершение торможения второго судна

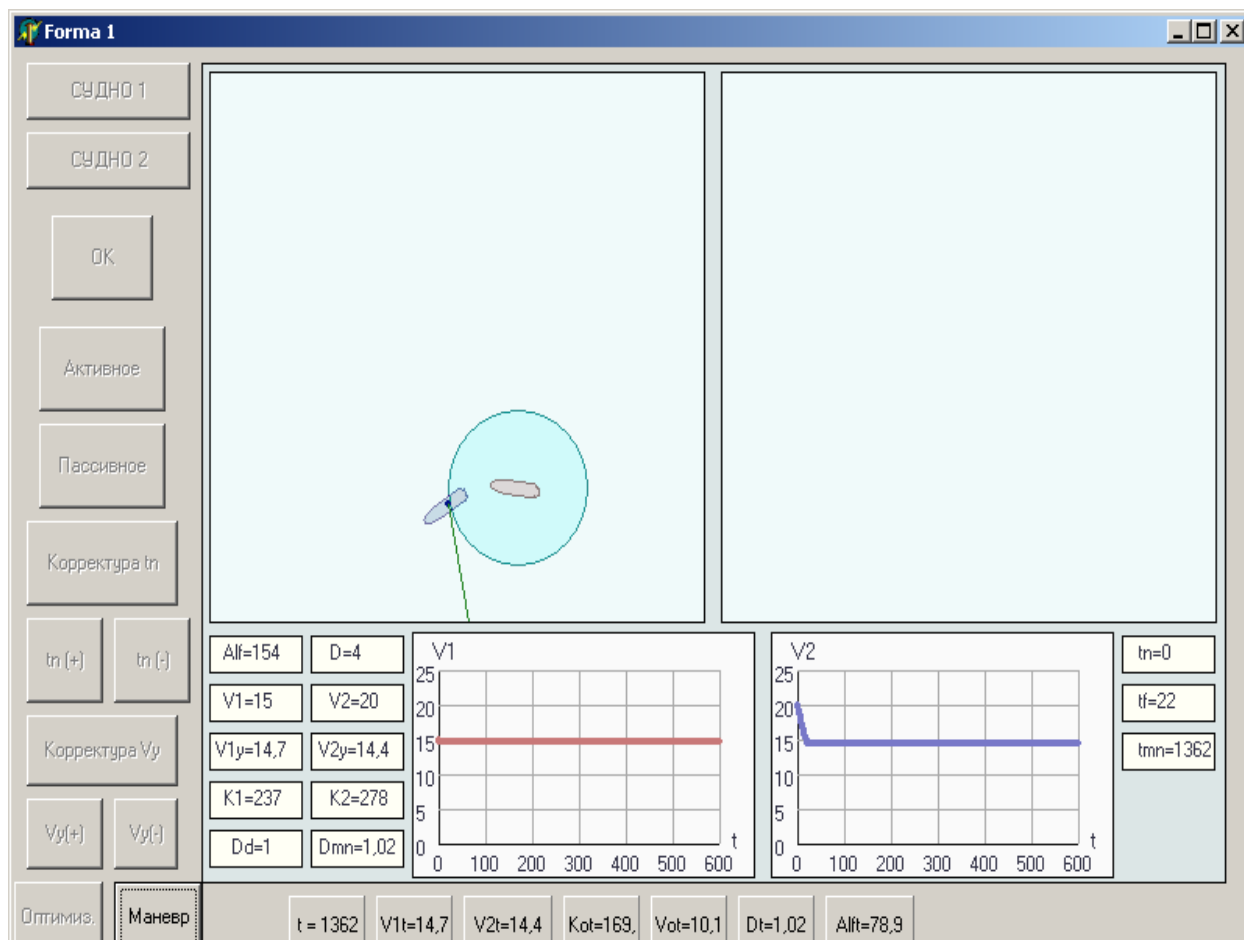


Рис. 5. Ситуация кратчайшего сближения

Выводы

1. Рассмотрен метод автоматического выбора оптимальной стратегии расхождения судов при снижении их скоростей на постоянных курсах.
2. Приведен пример опасной ситуации сближения

судов и выбор оптимальной стратегии расхождения снижением их скоростей активным торможением.

3. Произведено имитационное моделирование маневра расхождения, подтверждающее корректность предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов В.В. Некоторые вопросы алгоритмизации выбора маневра в ситуациях расхождения судов/ В.В. Павлов, Н.И. Сеньшин // Кибернетика и вычислительная техника. – 1985. - № 68. - С. 43-45.
2. Куликов А. М. Оптимальное управление расхождением судов / А. М. Куликов, В. В. Поддубный // Судостроение. – 1984. - № 12. - С. 22-24.
3. Сафин И.В. Выбор оптимального маневра расхождения / И.В. Сафин // Автоматизация судовых технических средств. - №7. - 2002. - С. 115-120.
4. Пятаков Э.Н. Взаимодействие судов при расхождении для предупреждения столкновения / Пятаков Э.Н., Бужбецкий Р.Ю., Бурмака И.А., Булгаков А.Ю. – Херсон: Гринь Д.С., 2015. - 312 с.
5. Бурмака И.А. Результаты имитационного моделирования процесса расхождения судов с учетом их динамики / Бурмака И.А. // Судовождение. – 2005. - №10. – С. 21 –

- 25.
6. Statheros Thomas. Autonomous ship collision avoidance navigation concepts, technologies and techniques / Statheros Thomas, Howells Gareth, McDonald-Maier Klaus. // J. Navig. 2008. 61, № 1, p. 129-142.
7. Бурмака И.А. Экстренная стратегия расхождения при чрезмерном сближении судов / Бурмака И.А., Бурмака А. И., Бужбецкий Р.Ю. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 202 с.
8. Петриченко Е.А. Вывод условия существования множества допустимых маневров расхождения с учетом навигационных опасностей / Петриченко Е.А. // Судовождение. – 2003. – №6. – С. 103 - 107.
9. Бурмака И.А. Управление судами в ситуации опасного сближения / И.А Бурмака., Э.Н Пятаков., А.Ю. Булгаков - LAP LAMBERT Academic Publishing, - Саарбрюккен (Германия), – 2016. - 585 с.

REFERENCES

1. Pavlov V.V. Some questions of choice of maneuver in the situations of divergence of vessels/ Pavlov V.V., Senshin N.I. // Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika. - 1985.- №68. - p. 43 - 45.
2. Kulikov A.M. Optimum management by divergence of vessels / Kulikov A.M., and Poddubnyy V.V.// Sudostroenie. - 1984.- №12.- p. 22 - 24.
3. Safin I.V. Choice of optimum maneuver of divergence / I.V. Safin // Avtomatizatsiya sudovykh tekhnicheskikh sredstv. - 2002.- №7. - p. 115 -120.
4. Pyatakov E. Cooperation of vessels at divergence for warning of collision/Pyatakov E., Buzhbetskiy R., Burmaka I., Bulgakov A., Kherson: Grin D.S., 2015.-312 p.
5. Burmaka Y.A. Results of imitation design of process of divergence of vessels taking into account their dynamics /

- Burmaka Y.A.// Sudovozhdenye: sb. nauchn. trudov. - 2005.- №10. - P. 21 – 25.
7. Burmaka I. Urgent strategy of divergence at excessive rapprochement of vessels / Burmaka I., Burmaka A., Buzhbetskiy R. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 202 p.
8. Petrichenko E.A. Conclusion of condition of existence of great number of possible manoeuvres of divergence taking into account navigation dangers/ Petrichenko E.A. // Sudovozhdenie.- 2003.- №6. - p. 103 – 107.
9. Burmaka I. Management by vessels in the situation of dangerous rapprochement / Burmaka I., Pyatakov E., Bulgakov A.- LAP LAMBERT Academic Publishing, - Saarbryukken (Germany), – 2016. - 585 p.

Automatic determination of parameters of optimum strategy of divergence of vessels at the diminishment of their speeds on permanent courses

D. Fedorov, I. Burmaka

The method of automatic choice of optimum strategy of divergence of vessels at the diminishment of their speeds on permanent courses is considered. The example of dangerous situation of rapprochement of vessels and choice of optimum strategy of their divergence by the diminishment of speeds by the active braking is resulted. The imitation design of maneuver of divergence is produced, confirmative correctness of the offered method.

Keywords: safety of navigator, divergence of vessels at dangerous rapprochement, maneuver of divergence by the active braking, imitation design.

Methods and algorithms of ensuring of functional persistence of subsystem of information exchange in the system of airspace control

V.V. Kireienko¹, O.V. Barabash¹, I.P. Salanda²

¹National Defence University of Ukraine named after Ivan Cherniakhovskyi, Kyiv,

²Kremenets Oblast Humanitarian and Pedagogical Academy Taras Shevchenko, Kremenets

¹Corresponding author. E-mail: zrk77@ukr.net

Paper received 01.02.21; Accepted for publication 16.02.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-08>

Abstract. The article is dedicated to the structure of functionally persistent subsystem of information exchange (SIE) in the system of airspace control. Taking into account the character of hierarchical structure of the subsystem of information exchange the research was carried out with the help of graph model, namely the questions of best-connected structures were considered. Mathematical model of functionally persistent subsystem of information exchange is an unoriented graph with reliable vertices and unreliable edges. Optimal algorithm during the choice of topology of functionally persistent subsystem is offered. Given algorithm allows to get the estimation of functional persistence of system relatively expeditiously.

Keywords: functional persistence; subsystem of information exchange; unoriented graph, topology, algorithm.

Introduction. The research of existing scientifically justified approaches [1-3] to improving of the effectiveness of complicated technical systems, to which subsystems of data transferring belong entirely, allowed to make a conclusion about establishing in the last several years the new priority approach, connected with ensuring the characteristic of functional persistence in the system.

Under the functional persistence of the object should be understood its tendency to continue performing its functions during preset time in the limits, which are preset by regulatory requirements in conditions of counteraction and influence of malfunctions and failures [3]. The research showed that functional persistence of complicated technical subsystem combines the qualities of faultlessness, reliability and survivability. Functional persistence is ensured by the use in complicated technical system different existing types of indulgence (structural, informational, temporal, loading etc.) through redistribution of resources with the aim of eliminating the consequences of emergencies.

Related publications. Analysis of the works [4-7] was carried out in the area of projecting optimal topologies SEI and it revealed two classical approaches to the target-setting:

- synthesis of the network on the criterion of the minimum of average time of delay in notice in the network with given limitations on reliability and cost;
- synthesis of the network on the criterion of the minimum of the cost with limitations on the indicators of reliability.

In [8] the use of structural indicators of reliability and coherence (degree of output arcs) were considered. At the same time, probabilistic characteristics of elements of the network - probability of the fault of network nodes and channels of data transmission - were not taken into account. Lately heuristic algorithms are widely used for solving the tasks of optimization of networks of big size [9]. Complexity of their use is due to the adaptation of their parameters. Research in the sphere of structural reliability of systems [10], the quality of their functioning, analysis of the criteria of assessing findings, accounting plurality of really existing limitations for the tasks of big size almost nonexistent.

The aim of the article is development and research of

the methods and algorithms of analysis of functional persistence, as well as synthesis of optimal topologies of subsystem of information exchange with the aim of ensuring functional persistence.

Materials and methods. To reach the target will be used its graph representation as the most widespread and easy form of representing the structures in general. Let's say that the vertices of the graph are the nodes of commutation, and the edges are communication lines. The methods of theory of graphs and theory of multitudes were used for research. The results of the work of the algorithms of structural coherence of subsystem on the indicator of probability of coherence, which allows to reveal vulnerabilities of the topology of subsystem, the reserving of which will allow to significantly increase the persistence of subsystem.

Analysis of the works [9-12] in the area of functional persistence and structural reliability allowed to define a lot of quantitative indicators of assessing structural reliability: minimum cut and probability of coherence. The multitude of methods of calculating the probability of coherence of subsystem of information exchange, like any other complicated subsystem, fall into two independent sub multitudes: precise and crude methods of calculation. Practical use of any method is defined by the task-setting, the level of precision of initial probabilities of operability of the elements of the system (subsystem). Some precise analytical methods are developed for definite structures of systems of data transmission. Precise methods of defining the probability of coherence considered in [3] can be used only for systems in which the number of nodes of commutation is less than twenty. Under condition of increasing the number of nodes this task becomes unfeasible on modern computer facilities. For practical realization of analysis and synthesis of functionally persistent subsystem of information exchange it is reasonable to use crude methods. So in the article while defining the probability of coherence crude methods are used.

Results and discussion. The structure of the subsystem of exchanging information is represented as an unoriented graph $G(V, E)$, $v_i \in V$, $e_{ij} \in E$, $i, j = 1, \dots, N$, which is described by adjacency matrix S

$$S = \|S_{ij}\|, \quad S_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } e_{ij} \in E; \\ 0, & \text{if } e_{ij} \notin E. \end{cases}$$

where V – set of the vertices of the graph;

E – set of the edges of the graph.

In the graph $G(V, E)$, the vertices of the graph v_i are nodes of commutation of SIE, and the edges of graph e_{ij} – lines of connection

For SIE let's say that the system should perform two main functions:

- processing, storing and retrieving of the necessary information;
- transmitting the information between the nodes of commutation

Basing on above we can formulate the main requirement to functional persistence of SIE:

1. To ensure functionality of all nodes of commutation (NC):

$$\forall v_i \in V \Leftarrow \omega_i(\tau) = 1, \quad \tau \in [0, t),$$

where $V = \{v_i\}$ – a set of nodes commutation SIE;

$\omega(\tau)$ – Boolean function, which takes value 1 if the NC is functional and 0 – otherwise;

τ, t – time of exploitation.

2. To ensure information transmission through main and reserve routes:

$$\forall v_i, v_j \Leftarrow \exists v_j \in \Gamma_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

where Γ_i – a set of achievable vertices of the graph from the vertex v_i ;

n – number NC in the subsystem of processing the information.

According to above, the method of the search of minimum cut graph (Shtor-Wagner algorithm) is used to define the probability of coherence [13]. The work of the algorithm starts with giving the adjacency matrix of an undirected connected graph is given to the inputs of the algorithm. The result of the work of the algorithm is the global incision, that is to say the set of edges of the graph with minimal total weight, the removal (damage) of any edge divides the graph into two unrelated subgraphs. On each iteration we have two sets of graph G : the set of vertices, which are included in some subset A and the set of other vertices. With the help of the Shtok-Wagner algorithm it is possible to find the incision between them. Obtained incision is put into the set of local minimum incisions, from which the global minimum incision is chosen later.

At the beginning of the work of the algorithm in adjacency matrix C graph G all edges are given the weight $w_{et} = 1, t = 1, \dots, m$. Shtok-Wagner algorithm realizes $(n-1)$ iteration, and each of them is made of the following successive steps:

Block diagram of Shtok-Wagner algorithm is represented on fig.1

Stage 1. Enter an auxiliary set of vertices A , which is empty on the first stage: $A = \emptyset$

Stage 2. Add to set A one arbitrary vertex of graph G ,

e.g. $i, i \in \{1, n\} : A = A \cup \{i\}$

Stage 3. Find the total weight of W edges, which combine the vertices of the set A with all other vertices of graph: $W = \sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} w_{ij}$

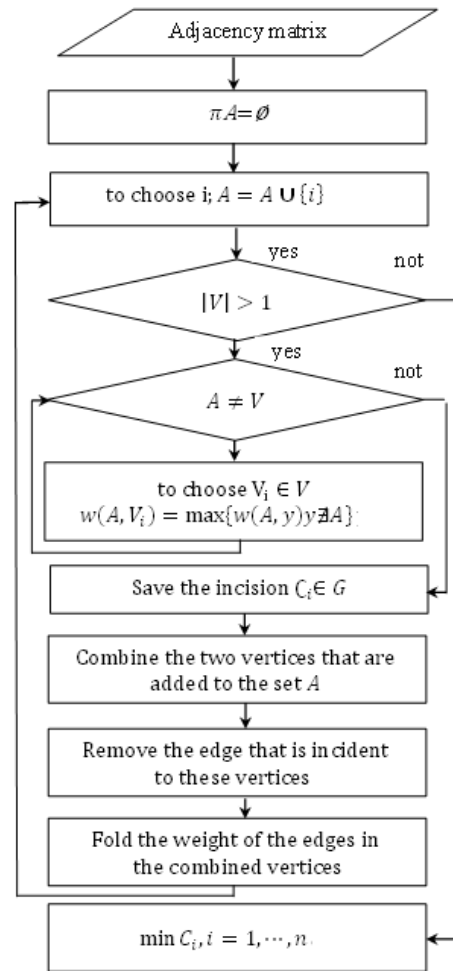


Fig. 1. Block diagram of the Shtor-Wagner algorithm

Stage 4. Find vertex K , which is not included in set A , and which has maximum total weight of the edges from it to the vertices, which are included into the set A , that is

$$\sum_{i \in A} w_{ik} = \max_{j \notin A} \sum_{i \in A} w_{ij} \text{ Add vertex } \kappa \text{ to set } A.$$

Stage 5. Repeat stages 3 and 4 until A is equal to set V of the graph $G : A = V$

Stage 6. Combine two added vertices to set A as the last and the second to last, to one. While this the edge incident with this vertices is removed and the weight of the edges appeared after merging the vertices is calculated. Put down the value of total weight of the edges (incision power) to the set of local reserves. Incision is memorized into some interjacent set S .

Stage 7. Repeat stages 2-6 until on the iteration $(n-1)$ graph G consists of one vertex.

Stage 8. Choose from the set of local minimal incisions S the least incision, which will be the estimation of structural coherence of SIE.

So, while building up the structure of SIE it is possible to estimate different topologies of the structure by the

lead indicator, which defines the set of minimum incisions of the graph-model SIE.

Proposed indicator of probability for estimating the functional persistence of SIE, which is defined by the minimum number of incisions of the graph-model with the lowest probability of fault, allows to localize the most vulnerable parts in the topology of network. Also it is necessary to mention that in need of estimating vulnerability of SIE in the process of its functioning if there are conditions of the faults of channels and their restoration, it is necessary to constantly monitor the conditions of networks for defining minimum incision of active configuration of the topology of the network and redistribution of download between channels.

Analysis of active configuration of network allows to predict critical conditions, when as a result of the influence of internal and external destabilizing factors on the channels of transmission there is a potential threat of the fault of all the network or its part. Practical realization of the algorithm of the search for critical parts in the network will allow to significantly improve functional persistence of the network.

Conclusions.

1. Using the minimum incision of the graph as the indicator of reliability while projecting the topology of subsystem of information processing in comparison with such indicator as minimum level of output arcs of the graph, generally allows to increase the functional persistence of the topology of the system. Increasing the value of minimum incision of the graph influences the increase in possible routs of delivery the information packs and consequently improves functional persistence of subsystem of data transmission and demotes probability of isolation of separate system nodes.

2. Identifying minimum incisions in subsystem of information processing of the system of airspace control allows to identify vulnerable places in the structure of the network. Apart from that, minimum incision corresponds to the area of the network with the lowest capacity.

3. The results of the work of the algorithm of analysis of structural coherence of subsystem of information exchange by the indicator of probability of coherence, which allow to identify vulnerable places of the topology of the subsystem, are shown. Reservation of these places will allow to significantly increase functional persistence of the system of airspace control.

REFERENCES

1. Dodonov A.G. The survivability of information systems / A.G. Dodonov, D.V. Lundy - K.: Sciences. opinion, 2011. - 256.
2. Mashkov O.A. Prymenenye teoryi funktsionalno ustoiichyvuykh system dlia resheniya zadach navyhatsyy y uprav-lenyia ob'ektamy vyda «makrosistema» /O.A. Mashkov, O.A.Kononov// Systemy upravlinnia , navihatsii ta zviazku". - K.: TsNDI UiN, 2007. - Vyp 3, - S.15-19
3. Barabash O.V. Building functionally stable distributed information systems / O.V. Barabash. - K.: NAOU, 2004, 226.
4. Sobchuk V., Kapustian O. Approximate Homogenized Synthesis for Distributed Optimal Control Problem with Superposition Type Cost Functional. Statistics, Optimization and Information Computing, June 2018, Vol. 6, Issue 2. P. 233 – 239
5. Musienko A.P. Diahnostychna model bezdrotovoi sensornoi merezhi na osnovi vzaiemnykh perevirok elementiv merezhi / I.V. Pampukha, O.V. Barabash, A.P. Musienko, M.O. Koval // Zbirnyk naukovykh prats Viiskovoho instytutu Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. - K.: VIKNU,2017. - Vyp. 57. - S. 160 – 168.
6. Mashkov O.A. Prymenenye teoryi funktsionalno ustoiichyvuykh system dlia resheniya zadach navyhatsyy y uprav-lenyia ob'ektamy vyda «makrosistema» /O.A. Mashkov, O.A.Kononov// Systemy upravlinnia , navihatsii ta zviazku". - K.: TsNDI UiN, 2007. - Vyp 3, - S.15-19.
7. Musienko A. Methods of self-diagnosis of telecommunication networks based on flexible structures of test connections / O. Barabash, N. Lukova-Chuiko, A. Musienko // Zbornik prispievkov z medzinárodného vedeckého seminára «Riadenie bezpečnosti zložitých systémov». 23 – 27 februára 2015. – Liptovský Mikuláš, Slovakia: Akadémia ozbrojených síl generála Milana Rastislava Štefánika, 2015. – Str. 226 – 231.
8. Kniازهva N. A. Alhorytmy otsenky strukturnoi zhyvuchesty ynfokommunikatsyonnoi sety / N. A. Kniازهva Suchasni informatsiino-komunikatsiini tekhnolohii. VIII nauk.- tekhn. konf.: zbirnyk tez. - K.: 2012. - S. 192-193.
9. William Stallings. Operating Systems – Internals and Design Principles, 7th Edition. Prentice Hall, 2011. 816 p. ISBN 013230998X.
10. Shubinsky I.B. Structural reliability of information systems. Methods of analysis. Ulyanovsk: Regional Printing House Print Yard, 2012. 216.
11. Mozhaeva I.A. Current trends in structural and logical analysis of the reliability and cybersecurity of ACMS / I.A. Mozhaeva, A.A. Nozik, A.V. Strukov [http:// www. szma.com/mabr2_2015.pdf](http://www.szma.com/mabr2_2015.pdf).
12. Zaichenko Yu.P. Structural optimization of computer networks / Yu. Zaichenko, Yu.V. Gonta - K.: Engineering, 1986. - 167.
13. Stoer M., A simple min-cut algorithm / M. Stoer , F. Wagner // Journal of the ACM. 1997.– Vol. 44, No. 4. Pp.– 585-591.

Probabilistic modeling of the training test subdivision of device production

A. L. Litvinov

O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkov, Ukraine
Corresponding author. E-mail: litan6996@gmail.com

Paper received 05.12.20; Accepted for publication 18.12.20.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-09>

Abstract. The paper deals with the probabilistic modeling of training tests subdivision of device production. Increased reliability is required from devices for control systems of non-stationary objects. This is provided by a number of training operations with subsequent control. A network model of queuing systems is proposed to describe the process of passing devices through subdivision of control-training operations. Expressions are obtained, which allow estimating the load of each production section and find its characteristics of functioning.

Keywords: modeling, training operations, network, queuing system, probability.

Introduction. Control systems for non-stationary objects (cars, airplanes, ships) include a significant number of various devices, such as information sensors, controllers and computers. As a rule, they function in conditions of an aggressive external environment. The temperature can vary from -120°C to $+50^{\circ}\text{C}$, devices are affected with vibration during movement, high humidity can lead to loss of dielectric properties of materials. At the same time, high requirements are imposed on the reliability of the operation of control systems for non-stationary objects. It is possible to provide high reliability of such objects both at the design stage and at the stage of production, by including training operations of devices in appropriate conditions on special stands with subsequent monitoring for correct functioning [1]. Thus, the simplified technological scheme of the training tests subdivision of device production can be the same as in fig. 1.

production design of devices production must be supplemented by probabilistic methods that allow take into account various random factors affecting the production process.

In a formalized presentation, each technological section of the training test subdivision is a service system consisting of a certain number of service places (these may be the workplaces of the regulators or the seats in the climatic test area), the input flow of devices that act as requests for service, and the place of waiting for requests, in whose role the intermediate buffers can be used. In the whole, the training tests subdivision of device production can be modeling by a queuing network, in which the assembly section is the source of requests (in this case, the assembled devices), separate technological sections are separate service systems.

A brief overview of publications on the topic. A characteristic feature of the modern stage of development of society is the increasingly widespread use of large complex systems with a network structure and stochastic nature of functioning. The study of the processes occurring in systems of this kind is carried out within the framework of the theory of networks of queues and simulation. The basic work on queueing networks did James Jackson (University of California, Los Angeles, mathematics professor) [2]. The work [3] is devoted to the study of closed homogeneous exponential queueing networks. To analyze the quantitative distribution of customers over the nodes of the queueing network, a diffusion approximation method was proposed in [4]. Along with analytical methods, simulation methods are widely used to study queueing networks [5, 6]. Simulation modeling allows obtain more accurate results than analytical methods, but simulation models have a little typification, in addition, the cost of developing simulation models is quite high. The applied aspects of queueing networks, as applied to computer systems, are described in [7, 8]. It should be noted that most of the works on the applied use of queueing networks are devoted to computer systems and networks. Taking into account the specifics of production processes building appropriate models of queueing networks is an urgent task.

Purpose of research. The probabilistic model of the training tests subdivision of device production will be a queuing network with an appropriate topology. The aim of the work is to determine, based on the queuing network, the load of each production section, the average

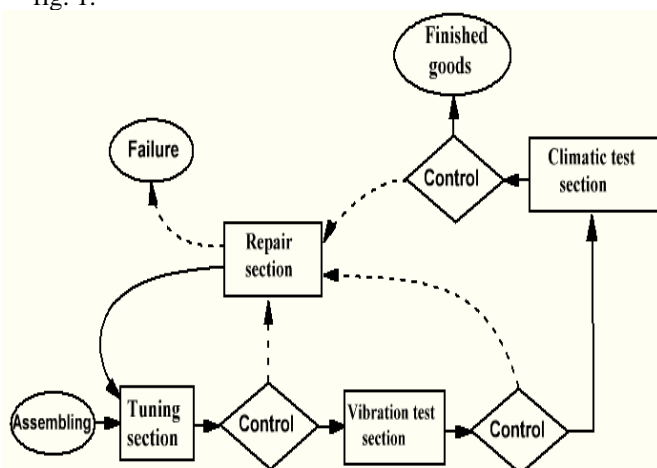


Figure 1 – Technological scheme of the training tests subdivision of device production

Failures of devices during training operations are random. This leads to congestion of individual technological sections and transport conveyors, reducing the capacity and production capacity of the entire system. At the same time, as practice shows, such production systems designed according to well-developed methods of flow-mass production design often can not provide the required productivity and throughput, despite the sufficient capacity of the assembly sections. Possible irregularity of production also render a strong influence on the performance of the system. In this regard, the traditional methods of calculation of the flow-mass

cycle time of control and training tests, the effect of device failures on the general characteristics of the system.

Materials and methods. The structure of the training tests subdivision of device production can be represented by the network transmission graph, shown in fig. 2. The node S_0 corresponds to the assembly section, S_1 – to the tuning section, S_2 – to the vibration test section, S_3 – to the climatic test section, S_4 – to the repair section. Solid arcs correspond to the passage of devices along the technological chain without failures; arcs marked with strokes mean the transfer of failed devices to the repair section, or a completely defective product. p_{ij} means the probability of transferring the devices from section i to section j . Accordingly, p_{23} is the probability that the device has passed the vibration test section normally and p_{24} is the probability that the device require a repair after vibration test, p_{30} is the probability that the device after section of climatic tests has passed all the training tests normally and p_{34} is the probability that the device require a repair after climatic test, p_{40} – this is the probability that the device is not subject to recovery.

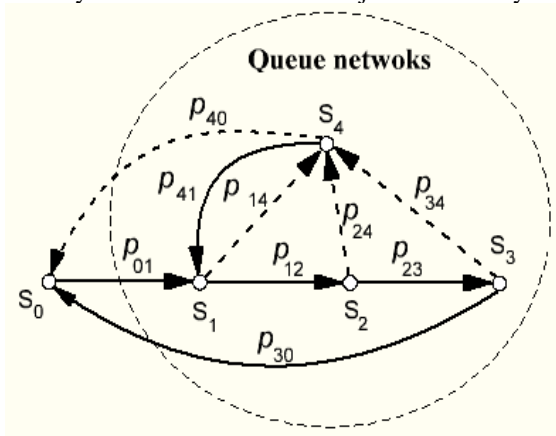


Figure 2 – Networks transmission graph

Let us define the transition probability matrix P as consisting of elements p_{ij} , that is

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{12} & 0 & p_{14} \\ 0 & 0 & 0 & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & 0 & 0 & 0 & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

The peculiarity of this matrix is that the sum of the probabilities in the rows is equal to one.

We will investigate the functioning of the system in a stationary state. Let us denote by λ_i the total intensity of the input flow of devices in section i in a stationary mode, τ_i – the average time of the technological operation in the i -th section. For the existence of a stationary state, it is necessary that the inequality $\rho_i = \lambda_i \tau_i < 1$ holds for each section, where ρ_i is a load of i -th section. Then the following system of equations for the stationary state corresponds to the graph in fig. 2

$$\begin{aligned} -\lambda_0 + p_{30} \cdot \lambda_3 + p_{40} \cdot \lambda_4 &= 0, \\ \lambda_0 - \lambda_1 + p_{41} \cdot \lambda_4 &= 0, \\ p_{12} \cdot \lambda_1 - \lambda_2 &= 0, \\ p_{23} \cdot \lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\ p_{14} \cdot \lambda_1 + p_{24} \cdot \lambda_2 + p_{34} \cdot \lambda_3 - \lambda_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

In the matrix form, the system of equations (2) is written by

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & p_{30} & p_{40} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & p_{41} \\ 0 & p_{12} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & -1 & 0 \\ 0 & p_{14} & p_{24} & p_{34} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

If we add to the elements of the last row in system matrix corresponding elements of all the remaining rows, we get a row with zero elements. Thus, the determinant of the system matrix of the system of equations (3) is equal zero. That is, the system of equations is uncertain. But if we fix the intensity of the arrival of devices from the assembly section λ_0 , then the system of equations becomes definite and can be solved relatively λ_0 , that can be expressed as

$$\lambda_i = \alpha_i \lambda_0, i = 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

Let us reformat the system of equations (2) as follows

$$\begin{aligned} p_{30} \cdot \lambda_3 + p_{40} \cdot \lambda_4 &= \lambda_0, \\ -\lambda_1 + p_{41} \cdot \lambda_4 &= -\lambda_0, \\ p_{12} \cdot \lambda_1 - \lambda_2 &= 0, \\ p_{23} \cdot \lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\ p_{14} \cdot \lambda_1 + p_{24} \cdot \lambda_2 + p_{34} \cdot \lambda_3 - \lambda_4 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Reordering the corresponding rows, rewrite the system of equations (5) as follows:

$$\begin{aligned} -1 \cdot \lambda_1 + p_{41} \cdot \lambda_4 &= -1 \cdot \lambda_0, \\ p_{12} \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2 &= 0, \\ p_{14} \cdot \lambda_1 + p_{24} \cdot \lambda_2 + p_{34} \cdot \lambda_3 - 1 \cdot \lambda_4 &= 0, \\ p_{23} \cdot \lambda_2 - 1 \cdot \lambda_3 &= 0, \\ p_{30} \cdot \lambda_3 + p_{40} \cdot \lambda_4 &= 1 \cdot \lambda_0. \end{aligned} \quad (6)$$

The solution of the system of linear algebraic equations (6) is expediently sought by the Gauss method in a matrix form, which makes it possible to simultaneously test the system for solvability. We write the extended matrix system (6) in augmented matrix form (only coefficients for unknowns) as follows

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & p_{41} & -1 \\ p_{12} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & -1 & 0 \\ 0 & p_{23} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{30} & p_{40} & 1 \end{array} \right]$$

Let us realize the direct move of the Gauss method. To do this, multiply all the elements of the first row by p_{12} and add them to the corresponding elements of the second row. After that, multiply all elements of the first row by p_{14} and add them to the corresponding elements of the third row. These operations are formally written as follows.

$$\{II := II + I \cdot \Pi_{12}, III := III + I \cdot p_{14}\}$$

As a result, we get

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & p_{41} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & p_{41}p_{12} & -p_{12} \\ 0 & p_{24} & p_{34} & p_{41}p_{14} - 1 & p_{14} \\ 0 & p_{23} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{30} & p_{40} & 1 \end{array}$$

Next, we perform the following operations

$$\{III := III + II \cdot p_{24}, IV := IV + II \cdot p_{23}\}$$

As a result, we get

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & p_{41} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & p_{41}p_{12} & -p_{12} \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{41}p_{14} + p_{41}p_{12}p_{24} - 1 & -p_{14} - p_{12}p_{24} \\ 0 & 0 & -1 & p_{41}p_{12}p_{23} & -p_{12}p_{23} \\ 0 & 0 & p_{30} & p_{40} & 1 \end{array}$$

Perform the following operation: $\{V := V + III\}$

As a result, we get

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & p_{41} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & p_{41}p_{12} & -p_{12} \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{41}p_{14} + p_{41}p_{12}p_{24} - 1 & -p_{14} - p_{12}p_{24} \\ 0 & 0 & -1 & p_{41}p_{12}p_{23} & -p_{12}p_{23} \\ 0 & 0 & p_{30} + p_{34} & p_{40} + p_{41}p_{14} + p_{41}p_{12}p_{24} - 1 & 1 - p_{14} - p_{12}p_{24} \end{array}$$

Above the elements of the fifth row perform the following transformations:

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & p_{41} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & p_{41}p_{12} & -p_{12} \\ 0 & 0 & -1 & p_{41}p_{12}p_{23} & -p_{12}p_{23} \\ 0 & 0 & 0 & p_{41}p_{14} + p_{41}p_{12}p_{24} + p_{41}p_{12}p_{23}p_{34} - 1 & -p_{14} - p_{12}p_{24} - p_{12}p_{23}p_{34} \end{array}$$

From the last row follows:

$$\lambda_4 = \frac{p_{14} + p_{12}p_{24} + p_{12}p_{23}p_{34}}{1 - p_{41}p_{14} - p_{41}p_{12}p_{24} - p_{41}p_{12}p_{23}p_{34}} \lambda_0.$$

Accordingly, from the third row we get:

$$\lambda_3 = p_{12}p_{23} \cdot \lambda_0 + p_{41}p_{12}p_{23} \lambda_4,$$

from the second row we get

$$\alpha_4 = \frac{p_{14} + p_{12}p_{24} + p_{12}p_{23}p_{34}}{1 - p_{41}p_{14} - p_{41}p_{12}p_{24} - p_{41}p_{12}p_{23}p_{34}}, \alpha_3 = p_{12}p_{23} + p_{41}p_{12}p_{23}\alpha_4, \quad (8)$$

$$\alpha_2 = p_{12} + p_{41}p_{12}\alpha_4, \alpha_1 = 1 + p_{41}\alpha_4.$$

The most important indicators of production will be the intensity of devices that have completely passed the training tests λ_{out} and the intensity of completely defective devices λ_{fail} . From the network transmission graph follows:

$$\lambda_{out} = \lambda_3 p_{30}, \lambda_{fail} = \lambda_4 p_{40}. \quad (9)$$

Important characteristic of the production process is the average time of the devices passing through the training and control operations – T . It, in turn, depends on the average time spent by devices (customers in terms of queuing theory) in each section $t_i, i = 1, 2, 3, 4$. Then

$$T = \sum_{i=1}^4 \alpha_i t_i \quad [9].$$

$$p_{30} + p_{34} = 1,$$

$$\begin{aligned} p_{40} + p_{41}p_{14} + p_{41}p_{12}p_{24} - 1 &= -(1 - p_{40}) + p_{41}p_{14} + p_{41}p_{12}p_{24} = \\ &= -p_{41} + p_{41}p_{14} + p_{41}p_{12}p_{24} = -p_{41}(1 - p_{14}) + p_{41}p_{12}p_{24} = \\ &= -p_{41}p_{12} + p_{41}p_{12}p_{24} = -p_{41}p_{12}(1 - p_{24}) = -p_{41}p_{12}p_{23}, \\ 1 - p_{14} - p_{12}p_{24} &= (1 - p_{14}) - p_{12}p_{24} = p_{12} - p_{12}p_{24} = \\ &= p_{12}(1 - p_{24}) = p_{12}p_{23}. \end{aligned}$$

As a result, we get

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & p_{41} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & p_{41}p_{12} & -p_{12} \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{41}p_{14} + p_{41}p_{12}p_{24} - 1 & -p_{14} - p_{12}p_{24} \\ 0 & 0 & -1 & p_{41}p_{12}p_{23} & -p_{12}p_{23} \\ 0 & 0 & 1 & -p_{41}p_{12}p_{23} & p_{12}p_{23} \end{array} \quad (7)$$

The fourth and fifth rows of the system (7) are equivalent. Throw away the fifth row and swap the third and fourth rows. We get

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & p_{41} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & p_{41}p_{12} & -p_{12} \\ 0 & 0 & -1 & p_{41}p_{12}p_{23} & -p_{12}p_{23} \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{41}p_{14} + p_{41}p_{12}p_{24} - 1 & -p_{14} - p_{12}p_{24} \end{array}$$

Using the third row, let us perform the following conversion: $\{IV := IV + III \cdot p_{34}\}$

We get

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & p_{41} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & p_{41}p_{12} & -p_{12} \\ 0 & 0 & -1 & p_{41}p_{12}p_{23} & -p_{12}p_{23} \\ 0 & 0 & 0 & p_{41}p_{14} + p_{41}p_{12}p_{24} + p_{41}p_{12}p_{23}p_{34} - 1 & -p_{14} - p_{12}p_{24} - p_{12}p_{23}p_{34} \end{array}$$

$$\lambda_3 = p_{12}p_{23} \cdot \lambda_0 + p_{41}p_{12}p_{23} \lambda_4$$

and from the first row we get

$$\lambda_1 = \lambda_0 + p_{41} \cdot \lambda_4.$$

So

The execution time of a production operation in the i -th section is constant – τ_i . Therefore, a queuing system of the type M/D/1 can be chosen as a model of production section. Then $t_i = \frac{\rho_i}{2(1 - \rho_i)} + \frac{1}{\mu_i}$ [10]. After

transformations

$$t_i = \frac{\rho_i}{2(1 - \rho_i)} + \frac{1}{\mu_i} = \frac{\lambda_i \tau_i}{2(1 - \lambda_i \tau_i)} + \tau_i = \left[\frac{\alpha_i \lambda_0}{2(1 - \alpha_i \lambda_0 \tau_i)} + 1 \right] \tau_i \quad \text{and}$$

$$T = \sum_{i=1}^4 \left[\frac{\alpha_i \lambda_0}{2(1 - \alpha_i \lambda_0 \tau_i)} + 1 \right] \tau_i \alpha_i. \quad (9)$$

By using obtained expressions the performance of the training test sections can be reasonably chosen.

Results and their discussion. Let the transition probability matrix P of the network have the form:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Using the expressions (8), we get:

$$\lambda_1 = 1,53\lambda_0, \lambda_2 = 1,23\lambda_0, \lambda_3 = 1,10\lambda_0, \lambda_4 = 0,76\lambda_0.$$

Accordingly, $\lambda_{out} = 0,77\lambda_0, \lambda_{fail} = 0,76\lambda_0$

Thus, the received expressions allow to estimate loading of each technological section and to choose its productivity.

On the fig. 3 depicted the family of curves λ_{out} as a function of the probability of a complete failure of the device p_{40} for different values of the probability of failures in the vibration test section - p_{24} .

The dependencies are almost linear, and each section contributes to the decrease in the performance of the entire system of training operations.

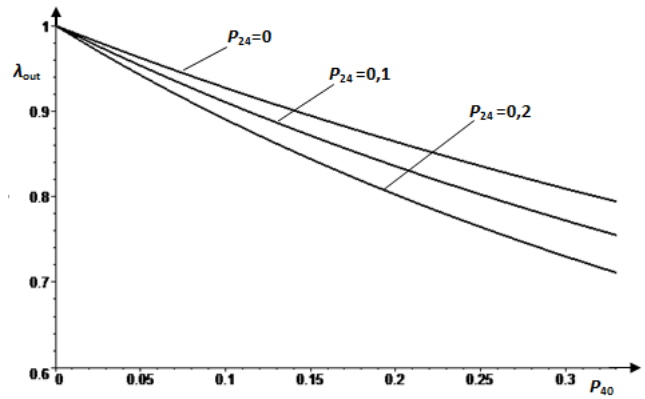


Figure 3. Related intensity of devices that have completely passed the training tests

Conclusions. The paper proposes the use of a queuing network as a model of the training tests subdivision of device production. The analytical solution of the corresponding systems of equations makes it possible to estimate the load of each training test section, the real time of the production cycle, the output of suitable devices from the section. By using obtained expressions the performance of the training test sections can be reasonably chosen.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тупик В.А. Технология и организация производства радиоэлектронной аппаратуры. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2004. – 144 с.
2. Jackson J.R. Networks of waiting lines //Operational Research, 1957, 5, №4. P. 518-521.
3. Gordon W.J., Newell G.F. Closed queeing systems with exponential servers // Operational Research, 1967, 15 № 2. P. 522-529.
4. Kobayashi H. Application of diffusion approximation to queueing networks // Journal of the Association for Computing Machinery, 1974, 21 №2. P. 316-328.
5. Shannon R. System simulation. The art and science. Englewood Cliffs, new Jersey:Prentice Hall PTR, 1975. 418 p.
6. Banks J., Carson J. S., Nelson B. L., Nicol D. M. Discrete-event system simulation. 5th ed. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2010. 622 p.
7. Kleinrock L. Queueing systems – Vol. 2: Computer applications. John Wiley & Sons, 1976. 576 p.
8. Raj J. The Art of Computer systems performance analysis: Techniques for experimental design, measurement, simulation, and modeling. Wiley India Pvt. Limited, 2008. 716 p
9. Kaufmann A., Cruon R. Les phenomenes d’attente. Theorie et application. Paris: Dunod, 1961. – 302 p.
10. Соколов А. Н., Соколов Н. А. Однолинейные системы массового обслуживания. СПб.: Изд-во «Теледом», 2010. – 112 с.

REFERENCES

1. Tupik V.A. Technology and organization of production of radio-electronic equipment. St. Petersburg: Publishing house of SPETU "LETI", 2004. – 144 p.
10. Sokolov A.N., Sokolov N.A. Single-server queueing systems. St. Petersburg: Publishing house of “Teledom”, 2010. – 112 p.

Оценка вероятности корректного определения типа взаимодействия судов в ситуации опасного сближения

А. В. Янчецкий

Национальный Университет «Одесская Морская Академия», Одесса, Украина
Corresponding author. E-mail: burmaka1964@gmail.com

Paper received 10.01.21; Accepted for publication 23.01.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-10>

Аннотация. Рассмотрены причины появления неопределенности во взаимодействии судов в процессе расхождения, возникающие из-за недостатков МППСС-72. Произведена формализация возможных исходов оценки начальной ситуации сближения судов, исходя из субъективной интерпретации требований МППСС-72. Показано, что система бинарной координации МППСС-72 характеризуется частичной координируемостью и оценена вероятность корректного определения типа взаимодействия судов при их расхождении.

Ключевые слова: безопасность судоходства, расхождение судов, бинарная координация, МППСС-72, типы взаимодействия судов.

Введение. Несмотря на принимаемые меры, аварийность судов от столкновений остается на довольно высоком уровне. В последнее время суда оснащаются интегрированными мостиковыми системами, подходы ко всем крупным портам и транзитным районам интенсивного судоходства оборудуются системами управления движением, развиваются методы Е-Навигации. Однако проблема предупреждения столкновений судов остается не решенной. Одной из существенных причин этого является субъективность оценки ситуаций сближения и принятия решений. Следовательно, в настоящее время разработка методов повышения эффективности процессов расхождения судов является актуальной.

Краткий обзор публикаций по теме. Для выбора маневра расхождения предложено многочисленных методов: нелинейной интегральной инвариантности, оптимальных дискретных процессов, ситуационного управления, теории игр, линейного и нелинейного программирования и другие, обзор большинства из которых представлен в статье [1].

Формализация взаимодействия судов в ситуации опасного сближения предложена в работе [2] и показано, что основным способом описания взаимодействия пары опасно сближающихся судов является бинарная координация, которая реализована в МППСС-72, а в работах [3, 4] рассмотрены вопросы бинарной координации и мера их эффективности.

На современном этапе основные разработки по рассматриваемой проблематике посвящены методам для систем предупреждения столкновений автономных судов и распределенным алгоритмам для ситуаций сближения нескольких судов, в которых они могут обмениваться намерениями, используя систему AIS, что рассматривается в работе [5]. В ней обсуждаются как методы, которые базируются на математических моделях, так и способы, использующие искусственный интеллект. В работах [6,7] предложены процедуры получения маневров расхождения для автономных судов. Распределенные алгоритмы для ситуаций сближения нескольких судов представлены в работе [8].

Работы [9-11] посвящены вопросу учета имеющихся в районе предстоящего расхождения навигационных опасностей при выборе маневра расхождения изменением курса.

Работа [12] посвящена методам определения комбинированного Z-маневра собственного судна для расхождения с несколькими целями.

Цель. Целью настоящей статьи является разработка

процедуры оценки вероятности корректного определения типа взаимодействия судов в ситуации их опасного сближения.

Материалы и методы. В работе [13] рассмотрены этапы процесса принятия решения по оценке необходимости расхождения судов в ситуации их сближении и показано, что процесс принятия решения содержит следующие этапы:

1. Контроль окружающей обстановки, т. е. относительных положений и параметров движения окружающих подвижных объектов.
2. Обнаружение ситуации сближения судов.
3. Оценка степени опасности в случае сближения судов.
4. Выбор параметров маневра расхождения.

На втором этапе процесса принятия решения по параметрам окружающей обстановки следует рассчитать скорость изменения дистанции между судами с помощью выражения:

$$\dot{D} = V_j \cos(K_j - \alpha) - V_i \cos(K_i - \alpha),$$

где K_i , V_i , K_j и V_j - параметры движения судов;

α - пеленг с i -го судна на j -е судно.

При отрицательном значении \dot{D} суда сближаются.

На третьем этапе процесса принятия решения производится оценка степени его опасности. Для этого необходимо рассчитать дистанцию D_{\min} кратчайшего сближения.

Ситуационное возмущение ω возникает при прогнозируемом попадании судов в домен недопустимых позиций, т. е., когда прогнозируемое значение дистанции кратчайшего сближения D_{\min} меньше значения предельно-допустимой дистанции сближения D_d , величина которой зависит от формы домена недопустимых позиций и ракурса сближения судов.

Ситуационное возмущение ω может принимать три значения:

$$\omega = \begin{cases} 0, & D_{\min} > D_d, \\ 1, & D_{\min} \leq D_d, t_{zij} > 0, \\ 2, & D_{\min} \leq D_d, t_{zij} \leq 0, \end{cases}$$

где t_{zij} - интервал времени до попадания судна в подмножество недопустимых позиций.

Значениям ситуационного возмущения ω соответствуют первая, вторая и третья области взаимных обя-

занностей.

В зависимости от степени опасности ситуации сближения, т. е. значения ситуационного возмущения $\omega > 0$, на четвертом этапе принятия решения следует выбрать стратегию расхождения.

В качестве показателя эффективности аналитических систем предупреждения столкновений судов целесообразно предложить вероятность безопасного завершения процесса расхождения P_S , которая является произведением вероятностей P_i успешного исхода этапов процесса принятия решения по выбору стратегии расхождения:

$$P_S = P_1 P_2 P_3 P_4.$$

Результаты и их обсуждение. Исходя из анализа особенностей системы координации, которая реализована в МППСС-72, в данной работе рассмотрим вероятность успешного исхода второго и третьего этапов, как вероятность P_k корректного определения типа взаимодействия судов.

Неопределенность во взаимодействии судов возникает еще на этапе определения уровня опасности ситуации сближения. Мерой опасного сближения судов является соотношение дистанции кратчайшего сближения и предельно - допустимой дистанцией кратчайшего сближения. И, хотя величину предельно-допустимой дистанции кратчайшего сближения МППСС – 72 не регламентируют, в морской практике в открытом море принята величина этой дистанции равная примерно двум милям.

Отсутствие алгоритма определения ситуации опасного сближения ведет к тому, что в реальных условиях плавания величина предельно-допустимой дистанции кратчайшего сближения определяется субъективно судоводителем, причем на одном из судов сближение могут расценивать как опасное, а на втором считать, что суда расходятся чисто.

Последствия такой совместной противоречивой оценки могут оказаться непредсказуемыми и привести к аварийной ситуации.

В случае определения области взаимных обязанностей возможны два варианта: оба судна определили одну и ту же область или разные смежные области. Если обозначить через S_1 и S_2 области взаимных обязанностей, которые определены соответственно первым и вторым судами, то возможны следующие исходы Z_i , как показано в табл. 1.

При наличии исхода Z_0 , когда одно из судов расценивает ситуацию сближения безопасной, а второе судно полагает наличие первой области взаимных обязанностей, возможны следующие типы взаимодействий:

Таблица 1. Возможные исходы

Исход Z_i	S_1	S_2
Z_0	0(1)	1(0)
Z_1	1	1
Z_2	2	2
Z_3	3	3
Z_4	1	2
Z_5	2	1
Z_6	2	3
Z_7	3	2

- одно из судов следует с неизменными параметрами ($S_i=0$), а второе судно полагает, что оно пассивное ($S_j=0$);

- одно из судов следует с неизменными параметрами ($S_i=0$), а второе судно полагает, что оно активное ($S_j=1$).

В первом случае (исход Z_{01}) допустим первое из судов оценило сближение как опасное, и таким, как судно, которому уступают дорогу. Второе же судно считает сближение безопасным и вообще не намерено маневрировать. Через некоторое время первое судно, согласно Правилу 17, предпринимает меры по предупреждению столкновения и начинает маневрировать вблизи второго судна, вызывая возможную реакцию второго судна, что может ухудшить ситуацию вплоть до столкновения.

Во втором случае (исход Z_{02}) второе судно выполняет маневр расхождения и столкновение предупреждается.

Если каждое из судов определило первую область взаимных обязанностей, т. е. реализовался исход Z_1 , то судам необходимо определить свои маневры, которые составляют стратегию расхождения.

В первой области взаимных обязанностей одной из наиболее неопределенных является ситуация расхождения двух судов, имеющих, согласно Правилу 18, одинаковый повышенный приоритет, например, двух рыбаков, либо судов, ограниченных своей осадкой и т. п. В такой ситуации МППСС – 72 не координируют взаимодействие расходящихся судов, что усугубляет и без того их затруднительное положение, увеличивая риск опасности столкновения при их расхождении.

Данную ситуацию будем характеризовать не координируемым исходом Z_{11} .

Однако и в случае расхождения судов с механическим двигателем возникает ряд неопределенных ситуаций. Одной из таких ситуаций является ситуация, когда суда с механическим двигателем движутся прямо навстречу друг другу. Согласно Правилу 14 два судна с механическим двигателем, следующие навстречу друг другу (на контркурсах) должны отвернуть вправо и чисто расходясь левыми бортами. Отметим, что такой маневр расхождения требует определенной синхронизации в маневрировании обоих судов, что Правилами никак не регламентировано. Поэтому возможно возникновение опасности столкновения. Описанная ситуация соответствует исходу Z_{12} .

Также возможна ситуация, в которой два судна с механическим двигателем находятся на встречных параллельных курсах, однако курсовые углы превосходят значения, характерные для ситуации Правила 14, причем дистанция кратчайшего сближения меньше предельно-допустимой дистанции. К примеру, если дистанция между судами около трех миль, то при предельно-допустимой дистанции 0.5 мили курсовые углы могут достигать не менее 10 градусов. Такая ситуация сближения является опасной и может характеризоваться первой областью взаимных обязанностей. Однако приведенная ситуация не попадает ни под Правило 14, ни под Правило 15 (пересекающиеся курсы). Следовательно, такая ситуация МППСС – 72 не регламентируется четкой и однозначной координацией, что создает неопределен-

ность при маневрировании и появляется угроза столкновения расходящихся судов. Рассмотренную ситуацию отнесем к исходу Z_{13} .

Рассмотрим исход Z_2 , когда оба судна идентифицировали вторую область взаимных обязанностей. Объективные критерии оценки такой области в МППСС – 72 отсутствуют, зато имеются субъективные критерии для второй области взаимных обязанностей «... это другое судно, когда для него становится очевидным, что судно обязанное уступить дорогу, не предпринимает соответствующего действия, ..., может предпринять действие, чтобы избежать столкновения только собственным маневром» [10].

Неопределенные требования в условиях взаимодействия двух судов, с учетом индивидуальных субъективных оценок судоводителей каждого из судов, прежде всего, аннулирует основной принцип координации МППСС – 72, т. е. возможность четкого прогноза в поведении каждого из взаимодействующих судов, в результате чего действие судов будут не согласованы, что может повести к тяжелым последствиям. Правило 17, определяющее вторую область взаимных обязанностей и разрешающее пассивному судну маневрировать для расхождения, лишает прогноза каждое из расходящихся судов в части поведения партнера. Так судно, которое должно уступать дорогу, во второй области взаимных обязанностей лишено информации о предполагаемом поведении пассивного судна, которое, согласно МППСС – 72, имеет право, как продолжать движение с неизменными параметрами, так и предпринять маневр для расхождения собственными силами. С другой стороны судно, которому должны уступать дорогу, намереваясь предпринять маневр расхождения, может ожидать как маневрирования со стороны другого активного судна, так и его дальнейшего неизменного движения. Потеря прогноза в усложняющейся ситуации опасного сближения и фактическое отсутствие координации во второй области взаимных обязанностей резко снижает безопасность процесса расхождения. Следовательно, исход Z_2 является не координируемым исходом.

В ситуации, когда оба судна идентифицировали третью область взаимных обязанностей, реализуется исход Z_3 , который характеризуется полной неопределенностью во взаимодействии судов и отсутствием координации. В такой ситуации очень большой риск столкновения судов.

Рассмотрим исход Z_4 , когда одно из судов определяет первую область взаимных обязанностей и должно уступить дорогу, а второе судно идентифицировало вторую область взаимных обязанностей и себя как пассивное судно. В такой ситуации Правилами не координируется взаимодействие судов и маневр второго судна может повести к возникновению риска столкновения. Следовательно, исход Z_4 относится к не координируемым исходам.

В случае реализации исхода Z_5 , при котором одно из судов определяет первую область взаимных обязанностей и себя как пассивное судно, а другое судно - вторую область взаимных обязанностей и должно уступить дорогу, действуя согласно Правилам суда произведут согласованный маневр расхождения. Поэтому исход Z_5 является координируемым исходом.

Исходы Z_6 и Z_7 имеют место, когда одно из судов идентифицировало вторую область взаимных обязанностей, а другое - третью область. Если судно во второй области взаимных обязанностей является активным, то реализован исход Z_6 , причем маневры обоих судов не координируемые. Если же судно со второй областью взаимных обязанностей является пассивным, то возникает исход Z_7 , при котором не возникает риск столкновения судов.

Следует отметить, что МППСС – 72 координирует взаимодействие только двух судов в условиях открытого моря, т.е. наличие второй опасной цели или мешающего судна, как и навигационных опасностей, в Правилах не предусмотрено. Поэтому возможны еще два исхода - Z_8 , в ситуации опасного сближения судов при наличии третьего судна и Z_9 , в случае, если в районе проведения маневра расхождения находятся навигационные опасности. Перечисленные два исхода нарушают координируемость взаимодействия судов при расхождении.

Подведем итоги относительно рассмотренных исходов, поместив результаты в табл. 2.

Таблица 2. Результаты анализа исходов

№ п/п	Исход	Характеристика координируемости	Показатель
1	Z_{01}	частично координируемый	0,5
2	Z_{02}	координируемый	1
3	Z_{11}	отсутствие координации	0
4	Z_{12}	частично координируемый	0,5
5	Z_{13}	частично координируемый	0,5
6	Z_2	отсутствие координации	0
7	Z_3	отсутствие координации	0
8	Z_4	отсутствие координации	0
9	Z_5	координируемый	1
10	Z_6	отсутствие координации	0
11	Z_7	координируемый	1
12	Z_8	частично координируемый	0,5
13	Z_9	частично координируемый	0,5

Следует отметить, что исходы, предусмотренные Правилами 9-15, являются координируемыми с показателями равными 1. Всего число исходов равно 20. Сумма показателей координируемости равна 12,5, следовательно, средний показатель равен 0,625. Поэтому МППСС – 72, как система бинарной координации, согласно среднему показателю, ближе всего характеризуется частичной координируемостью. Исходя из изложенного, можно допустить, что при отсутствии координируемости два из трех случаев завершаются благополучно, а при полной координации все три случая благополучны, поэтому вероятность благополучного завершения этого этапа P_k может быть оценена, как отношение $2,625/3$, т. е. $P_k = 0,875$.

Выводы

1. Рассмотрены причины появления неопределенности во взаимодействии судов в процессе расхождения,

возникающие из-за недостатков МППСС-72.

2. Произведена формализация возможных исходов оценки начальной ситуации сближения судов, исходя из субъективной интерпретации требований МППСС-72.

3. Показано, что система бинарной координации МППСС-72 характеризуется частичной координируемостью и оценена вероятность корректного определения типа взаимодействия судов при их расхождении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tam C. Review of collision avoidance and path planning methods for ships in close range encounters / C.Tam, R.Bucknall, A.Greig //The Journal of Navigation. - 2009. - 62 (3). - P. 455-476.
2. Пятаков Э.Н. Взаимодействие судов при расхождении для предупреждения столкновения / Пятаков Э.Н., Бужбецкий Р.Ю., Бурмака И.А., Булгаков А.Ю. – Херсон: Гринь Д.С., 2015. - 312 с.
3. A. Volkov. Appraisal of the Coordinability of the Vessels for Collision Avoidance Maneuvers by Course Alternation / A. Volkov, E.Pyatarov & A. Yakushev// Activites in Navigation.-Adam Weintrit/ - 2015, P. 195 – 200.
4. Пятаков Э.Н. Оценка эффективности парных стратегий расходящихся судов / Э.Н. Пятаков., С.И. Заичко // Судовождение: Сб. научн. трудов. / ОНМА, – Вып.15. - Одесса: "Изда-тИнформ", 2008. – С. 166 – 171.
5. Statheros T. Autonomous ship collision avoidance navigation concepts, technologies and techniques / T. Statheros, G. Howells, K. M. Maier //Journal of Navigation. - 2008. - 61(1). - P.129–142.
6. Kuwata Y. Safe maritime autonomous navigation with colregs, using velocity obstacles / Y. Kuwata, M. T. Wolf, D. Zarzhitsky, T. L. Huntsberger // IEEE Journal of Oceanic Engineering. - 2014. - 39(1). - P. 110–119.
7. Woerner K.L. Collision avoidance road test for colregs-constrained autonomous vehicles / K.L.Woerner, M.R.Benjamin, M.Novitzky, J. J.Leonard // OCEANS 2016 MTS/IEEE Monterey. IEEE. - 2016. - P. 1–6.
8. Hirayama K. DSSA+: Distributed Collision Avoidance Algorithm in an Environment where Both Course and Speed Changes are Allowed / K.Hirayama, K.Miyake, T.Shiota, T.Okimoto //TransNav, the International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation. - 2019. - 13(1). - P. 23-29.
9. Петриченко Е.А. Вывод условия существования множества допустимых маневров расхождения с учетом навигационных опасностей / Петриченко Е.А. // Судовождение. – 2003. – №.6. – С. 103 - 107.
10. Цымбал Н.Н. Гибкие стратегии расхождения судов / Н.Н. Цымбал, И.А. Бурмака, Е.Е. Тюпиков. - Одесса: КП ОГТ, 2007. – 424 с.
11. Бурмака И.А. Управление судами в ситуации опасного сближения / И.А. Бурмака., Э.Н. Пятаков., А.Ю. Булгаков - LAP LAMBERT Academic Publishing, - Саарбрюккен (Германия), – 2016. - 585 с.
12. Вагущенко Л.Л. Улучшение поддержки решений по предупреждению столкновений //Л.Л.Вагущенко, А.А.Вагущенко //Судовождение: Сб. науч. трудов НУ «ОМА». – 2018. – Вып. 28. - С. 24-34.
13. Янчецкий А.В. Способ оценки эффективности аналитических систем предупреждения столкновений судов / Янчецкий А.В.// Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті (MINTT-2020): Матеріали XII Міжнародної наук.-практ. конф., 27-29 травня. 2020 – Херсон: ХДМА, 2020. – С. 127–130.

REFERENCES

2. Pyatakov E.Cooperation of vessels at divergence for warning of collision / Pyatakov E., Buzhbetskiy R., Burmaka I., Bulgakov A., Kherson: Grin D.S., 2015. - 312 p.
4. Pyatakov E. N. Estimation of efficiency of pair strategies of going away vessels / Pyatakov E. N., Zaichko S.I.// Sudovozhdenie.- 2008.- №15.- P. 166 – 171.
9. Petrichenko E.A. Conclusion of condition of existence of great number of possible manoeuvres of divergence taking into account navigation dangers/ Petrichenko E.A. // Sudovozhdenie.- 2003.- №6.- p. 103 – 107.
10. Tsymbal N. Flexible strategies of divergence of vessels / N. Tsymbal, I. Burmaka, E. Tyupikov, Odessa: KP OGT, 2007. – 424 p.
11. Burmaka I. Management by vessels in the situation of dangerous rapprochement / Burmaka I., Pyatakov E., Bulgakov A.- LAP LAMBERT Academic Publishing, - Saarbrücken (Germany), – 2016. - 585 p.
12. Vagushchenko L.L. Improved collision avoidance support /L.L.Vagushchenko, A.A.Vagushchenko //Sudovozhdenye: sb. nauchn. trudov NU OMA. - 2018.- №28. - P. 24 – 34.
13. Yanchetskiy A. Method of estimation of efficiency of the analytical collision avoidance systems vessels / Yanchetskiy A.// Modern information and innovative technologies on a transport (MINTT-2020): Materials XII International sciences. conf., 27-29 apr., 2020. – P. 127–130.

Estimation of probability of correct determination of type of cooperation of vessels in the situation of dangerous rapprochement

O. V. Yanchetskiy

The reasons of appearance of vagueness in cooperation of vessels in the process of divergence are considered, arising up from the Colregs failings. Formalization of possible ends of estimation of initial situation of rapprochement of vessels is produced, coming subjective interpretation of the Colregs requirements from. It is shown that the system of the binary coordination Colregs is characterized partial coordination and probability of correct determination of type of cooperation of vessels at their divergence is appraised.

Keywords: safety of navigator, divergence of vessels, binary coordination, Colregs, types of cooperation of vessels.

Model of dynamic tariffing Microgrid's electricity consumption in local energy markets

V. Y. Zhuikov, I. Y. Boiko, S. P. Denysiuk

National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine
Corresponding author E – mail: catbug1488@gmail.com

Paper received 04.02.21; Accepted for publication 16.02.21.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-11>

Abstract. In order to calculate the cost of electricity, the urgent task is to create a dynamic model that will calculate the change in the cost of electricity with a dynamic change in its level. The article considers an example of a local system based on an autonomous diesel generator. The resulting model allows us to study the change in cost indicators of the economic system when the level of electricity generated by the generator is changed. The obtained equation allows to calculate the price of the base part of energy depending on the studied level of energy produced by the generator and its value at a certain point of rest.

Keywords: *Microgrid; local generating system; dynamic model; Fisher equation.*

Introduction. In December 2019, the European Commission presented The Green European Deal, an ambitious program that describes the transition to a climate-neutral, circular economy by 2050. This program symbolizes significant changes in EU policy.

The new political and energy doctrine of the European Union, adopted in December 2020, describes the rules of reforming the European Union in the energy sector and the creation of a trans-European energy network - TEN-E. The EU's priorities are shifting from fossil fuels to clean generation to ensure a fully decarbonised economy by 2050. A Smart Grid is defined in the TEN-E Regulation (European Commission) as an electricity network that can integrate in a cost-efficient manner the behavior and actions of all users connected to it, including generators, consumers and those that both generate and consume, in order to ensure an economically efficient and sustainable power system with low losses and high levels of quality, security of supply and safety. The TEN-E Regulation has identified smart grid deployment as one of 12 trans-European energy infrastructure priority corridors and areas.

Modern European policy Smart Grid provides the following priority areas: the introduction of renewable energy sources (RES); construction of local systems (Microgrid) for various purposes; new business processes in liberalized local markets with the participation of electricity aggregators. The problem of system flexibility needs to be solved, the role of aggregators at all levels in the formation of energy as service policy is growing: national, regional, local (combination of several energy supply systems) and individual (specific system containing active prosumer or virtual power plant, (VPP)). In addition to new technical and technological solutions, there is a need to improve the mechanisms of Microgrid in local markets. This encourages the consideration of the operation of Microgrid facilities in liberalized local markets, the implementation of flexible tariff policies, in particular, dynamic tariffing procedures. If at the national level the price correction (change of tariffs) is carried out at intervals of 15 minutes (Germany) and 5 minutes (USA), then at the local and individual levels, changes in the price of generation and consumption in Microgrid should be considered at a much shorter interval.

Using a shorter billing interval Δt , even to fractions of minutes allow: more accurately optimize energy processes in the system; to form adequate price signals that will allow

to make more accurate settlements, to conduct technical and commercial accounting with greater accuracy; the ability to refine the signals of the control system by introducing into the control scheme of the economic component for the use of primary fuel, production and consumption of electricity. At the same time, a more accurate summing up of the balance of energy components in the modes of generation, accumulation and consumption is carried out, when it is possible to distinguish energetically constant states of the system operation and take into account the bidirectionality of electricity transmission. At the same time, there is a second level of cash flow balancing associated with the first, energy.

A brief overview of publications on the topic. A significant amount of scientific research and publications is devoted to the problem of Microgrid's functioning in local energy markets. Thus, as a result of research [1,2], have been developed integrated models of consumer response and the theory of tariff price forecasting in dynamic conditions, which are created through dynamic tariffing of electricity. In [3] is presented a new algorithm for planning restrictions imposed for network security reasons on one basic normally functioning system and the formation of a list of possible unforeseen circumstances (linear excess, block loss, load increase) of the system. A mathematical model of distribution system planning was also created, which includes three variants of system expansion planning [4]. The real-time tariffing scheme of the power generator presented in [5] is based on the current states of the system, which are forecast in hourly scenarios, and the calculated tariff prices for these states. The disadvantage of this model is its linearity. One of the approaches to creating dynamic tariffing is also the regulation of tariffing mechanisms based on optimal management [6]. In the model [7] the functions are linear and do not take into account the dynamic change of the generated power.

The disadvantages of the considered models [1, 2, 5, 7] are the use of linearized characteristics and a significant sampling interval over time.

The purpose of the work is to build a model of dynamic tariffing and an algorithm for implementing this model for Microgrid systems, which should ensure the optimal functioning of such systems in today's local markets.

Materials and methods. Consider the construction of a mathematical model for determining the price of the base part of electricity, which can be used for tariff pricing for a

fairly short time interval for a single generator, such as a diesel generator, and the consumer. The system under consideration is essentially nonlinear, but to build a mathematical model of process analysis in "small", we use the description of processes in this system by linear algebraic and differential equations [8].

Determining the cost of electricity for dynamic tariffing depends on two components: economic and technical. We analyze the economic component on the basis of Fisher equation, which describes the balance of the economic system [9]:

$$M \cdot V = C_Q \cdot Q, \tag{1}$$

where M – money supply, which makes one revolution for some time T_V , V – the number of revolutions of the money supply for the studied period of time; C_Q – product price; Q – number of products.

To calculate the cost of energy generated, the right side of expression (1) should include all costs associated with energy generation, such as primary fuel costs, for materials, depreciation, wages, and others determined by the operating characteristics of the generating equipment. For simplicity and clarity of presentation of material we will lower all expenses, except for expenses for fuel which is necessary for production of the electric power by the certain generator (in our case the diesel generator).

Taking as a base value the part of energy expressed in ($W \cdot sec$) we rewrite the Fisher equation in the form:

$$M \cdot V = C_B \cdot B + C \cdot W \tag{2}$$

where C, C_B – the cost of the base part of energy and unit of fuel; W, B – volumes of consumed electricity and primary fuel.

For further operation with the cost of electricity, we introduce the coefficient $\sigma = C_B/C$, equation (2) writes with increments Δ relative to variable values M, C, B, W . If we neglect the members of the higher (second) order of minority, it is obtained:

$$(M + \Delta M) \cdot V = C \cdot \sigma \cdot B + C \cdot \sigma \cdot \Delta B + \Delta C \cdot \sigma \cdot B + C \cdot W + C \cdot \Delta W + \Delta C \cdot W. \tag{3}$$

Subtracting from equation (3) equation (2) is obtained: $\Delta C \cdot (W + \sigma \cdot B) = V \cdot \Delta M - C \cdot \sigma \cdot \Delta B - C \cdot \Delta W$. $\tag{4}$

Going from the operator Δ to d/dt for increments in small functions $C(t)$ and $W(t)$ and bringing the left and right parts of the equation to the same dimension given the time of change of increments, obtained:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{V \cdot \Delta M}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot \tau} - \frac{C_B \cdot \Delta B}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot \tau} - \frac{C(t)}{W(t) + \sigma \cdot B(t)} \cdot \frac{dW(t)}{dt}, \tag{5}$$

where τ – the time of deviation of the amount of electricity and its cost relative to the selected values W_0 and C_0 at point of stability.

If considering the operation of the generating system for some time interval $[0, T]$, when increments $\frac{dC(t)}{dt}, \frac{dW(t)}{dt} \neq 0$, then expression (5) can be converted to the form:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{V \cdot \Delta M - C_B \cdot \Delta B}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot \tau} - \frac{C(t)}{W(t) + \sigma \cdot B(t)} \cdot \frac{dW(t)}{dt}. \tag{6}$$

After performing algebraic transformations, relation (5) can be represented in the form:

$$\frac{1}{C(t)} \cdot dC(t) = \frac{V \cdot \Delta M - C_B \cdot \Delta B}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot \tau \cdot C(t)} \cdot dt - \frac{1}{W(t) + \sigma \cdot B(t)} \cdot dW(t). \tag{7}$$

where $W(t)$ i $C(t)$ – the value of electricity produced and the cost of its base part at the investigated time moment;

W_0 – the value of energy generated by the generator at point of stability and C_0 – its cost; T – the duration of the studied time interval.

To solve equation (7), the integration of the left part is performed within $C(t)$ to C_0 . The first term of the right part from 0 to T , the second part from $W(t)$ to W_0 . As a result of integration, it is received:

$$\int_{C(t)}^{C_0} \frac{1}{C(t)} \cdot dC(t) = \int_0^T \frac{V \cdot \Delta M - C_B \cdot \Delta B}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot \tau \cdot C(t)} \cdot dt - \int_{W(t)}^{W_0} \frac{1}{W(t) + \sigma \cdot B(t)} \cdot dW(t). \tag{8}$$

The following replacements have been introduced:

$$(V \cdot \Delta M - C_B \cdot \Delta B) = A. \quad ((W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot C(t)) = B,$$

if the value of the functions $W(t), B(t), C(t)$ taken averaged over the interval $[0; T]$.

$$\int_0^T \frac{V \cdot \Delta M - C_B \cdot \Delta B}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot \tau \cdot C(t)} \cdot dt = \int_0^T \frac{A}{B \cdot \tau} \cdot dt.$$

On condition that $T = \tau$, the definite integral is equal to: $\frac{A \cdot T}{B \cdot T} - \frac{A \cdot 0}{B \cdot T} = \frac{A}{B}$. Note that according to equation (8), the duration of the interval $[0, T]$ must be equal τ , because during this time there are deviations of energy values and the value of its base unit from the values at the point of stability.

Replacement performed: $\frac{A}{B} = D$. Then:

$$\int_{C(t)}^{C_0} \frac{1}{C(t)} \cdot dC(t) = D - \int_{W(t)}^{W_0} \frac{1}{W(t) + \sigma \cdot B(t)} \cdot dW(t), \text{ and accordingly:}$$

$$\ln(C_0) - \ln(C(t)) = - (\ln(W_0 + \sigma \cdot B(t)) - \ln(W(t) + \sigma \cdot B(t))) + D, \tag{9}$$

$$\ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right) = \ln\left(\frac{W_0 + \sigma \cdot B(t)}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot e^{D \cdot T}}\right). \tag{10}$$

Performing the potentiation of both parts of equation (10) obtained expression (11), which determines the dynamic change in the cost of the base part of the energy when changing the volume of its production:

$$C(t) = \frac{W_0 + \sigma \cdot B_0}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot e^{D \cdot T}} \cdot C_0. \tag{11}$$

Taking into account that $T = \tau$:

$$C(t) = \frac{W_0 + \sigma \cdot B_0}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot e^{\frac{V \cdot \Delta M - C_B \cdot \Delta B}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot C(t)} \cdot \tau}} \cdot C_0. \tag{12}$$

Here and after, taken into account that the values of the functions $W(t), B(t), C(t)$ taken averaged over the studied interval, function (12) will look like:

$$C(t) = const \cdot \frac{1}{e^{\chi}},$$

where $const = \frac{(W_0 + \sigma \cdot B_0) \cdot C_0}{(W(t) + \sigma \cdot B(t))}$, $\chi = \frac{V \cdot \Delta M - C_B \cdot \Delta B}{(W(t) + \sigma \cdot B(t)) \cdot C(t)}$ are constants. Taking into account that $\sigma = \frac{C_B}{C}$, in the point of of stability $C = C_0$ and in study time $C = C(t)$ received:

$$const = \frac{W_0 \cdot C_0 + C_B \cdot B_0}{W(t) + \sigma \cdot B(t)}, \quad \chi = \frac{V \cdot \Delta M - C_B \cdot \Delta B}{W(t) \cdot C(t) + C_B \cdot B(t)}.$$

Using the substitutions made, an expression is obtained to determine the value $C(t)$:

$$C(t) = \frac{W_0 \cdot C_0 + C_B \cdot B_0}{W(t) + \sigma \cdot B(t)} \cdot e^{-\frac{V \cdot \Delta M - C_B \cdot \Delta B}{W(t) \cdot C(t) + C_B \cdot B(t)}}. \tag{13}$$

Relation (13) for different cases of system operation can be simplified when in the equation of exchange a certain number of increments of values is equal to zero. Thus we will receive a necessity of performance of a condition $V \cdot \Delta M = C_B \cdot \Delta B$, which allows to convert equation (7) to the form $\frac{dC(t)}{dt} = - \frac{C(t)}{W(t) + \sigma \cdot B(t)} \cdot \frac{dW(t)}{dt}$, from which it is obtained

$\frac{dC(t)}{dt} = - \frac{dW(t)}{W(t) + \sigma \cdot B(t)}$. Thus it is checked that the gains $\frac{dC(t)}{dt}$, $\frac{dW(t)}{dt}$ must be equal to zero to perform equation (7) under

the new conditions, and calculation $C(t)$ should be performed at the point of stability. For a state of stability can be noted that when $\frac{dC(t)}{dt} = 0$ and $\frac{dW(t)}{dt} = 0$, $V \cdot \Delta M = C_B \cdot \Delta B$, which corresponds to the condition of economic balance, which is described by Fisher equation.

Within from $C(t)$, $W(t)$ to C_0 , W_0 , where $W(t)$ i $C(t)$ – the value of produced electricity and the cost of its base part at the studied time, W_0 – the value of the the energy produced by the generator at point of stability, and C_0 – its cost, integrated both parts of the simplified equation (7), ie:

$$\int_{C(t)}^{C_0} \frac{1}{C(t)} \cdot dC(t) = - \int_{W(t)}^{W_0} \frac{1}{W(t) + \sigma \cdot B(t)} \cdot dW(t), \quad (14)$$

and accordingly:

$$\ln(C_0) - \ln(C(t)) = - (\ln(W_0 + \sigma \cdot B(t)) - \ln(W(t) + \sigma \cdot B(t))). \quad (15)$$

Performing the potentiation of both parts of equation (15), obtained expression (16), which determines the dynamic change in the cost of the base part of the energy when the volume of its production changes:

$$C(t) = \frac{W_0 + \sigma \cdot B_0}{W(t) + \sigma \cdot B(t)} \cdot C_0. \quad (16)$$

Due to the fact that with small deviations $B(t)$ from the level B_0 in equation (16) it is sufficient to take into account only the value $W(t)$ in the denominator, which deviates slightly from the state of stability:

$$C(t) = \frac{W_{0i} + \sigma \cdot B_{0i}}{W(t) + \sigma \cdot B_{0i}} \cdot C_{0i} \Big|_{W_{0i} \in \Delta W_i}. \quad (17)$$

Therefore, the calculated expression (17) is obtained for the dynamic calculation of the cost of the base part of the electricity at small deviations from the point of stability. The using of expression (17) involves a preliminary division of the range of changes in levels of electricity consumption into zones, within which there is a current control of consumption of primary fuel and electricity generation at constant tariffs (relative to the point W_0 with cost C_0). When leaving this zone, it is necessary to adjust tariffs for the cost of electricity.

The figure shows the i – th interval of change in the generated energy.

For the above presentation of interval $W_i \equiv W_0$, $C_i \equiv C_0$.

The determination of the cost can be demonstrated by the example of its calculation for small deviations from some static level of energy generated at the output of an autonomous diesel generator type Teksan TJ138PE5C [15], namely, with deviations of $\pm 5\%$ from the generation mode

of 50% of the rated power. The diesel generator is designed for a power of 100 kW. When generating 50% of the rated power, fuel consumption is 15.52 l/h, that taking into account only the market value of diesel fuel costs $22.34 \cdot 15.52 = 347 \text{ uah} / \text{h}$, and received power level is 50 kW · h. Then $C_{0i} = \frac{347}{50} = 6,9 \frac{\text{uah}}{\text{kW}\cdot\text{h}}$. For example it was calculated $C(t)$ by expression (17), ie not taking into account the deviation of fuel consumption $B(t)$ from the fuel level B_{0i} , and considering, when $B(t) \neq B_{0i}$ that the expression (16). It is accepted that expressions $\sigma \cdot B_{0i}$ and $\sigma \cdot B(t)$ are equal to the energy at the input of the generator for the selected operating mode.

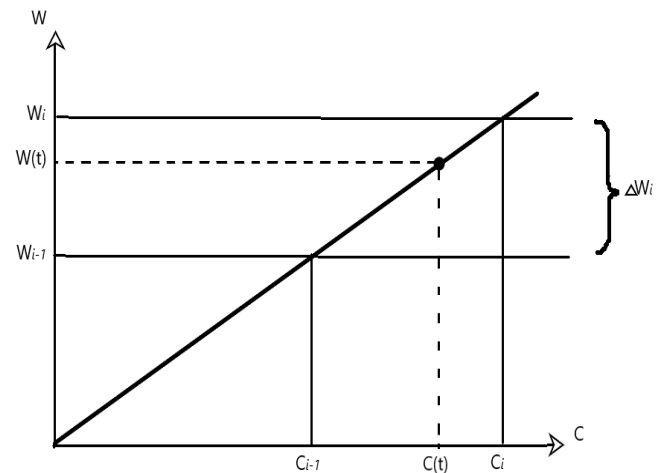


Figure – The studied interval

The values of fuel consumption and energy at the input of the generator will have the values given in table. Also in table. 1 shows the results of calculations of the cost of the base part of the energy in the nominal generation mode of 50 kWh and with a deviation of 5% from the generation mode. In rates of fuel consumption liters must be converted to grams, using the conversion factor of fuel, and hours to seconds, since when creating per-second tariffing, rate of fuel consumption must be taken into account and paid every second. On the basis of the calculations was showed that the deviation from some small value set for the selected mode of generating energy tariff value will change accordingly: will increase with a decrease in the value of energy, and will fall with increasing in the value of energy.

Table. 1. Calculation data

Calculation by expression (17)				Calculation by expression (16)				Δ(%)
Fuel consumption ($\frac{g}{s}$)	Input energy ($\text{kW} \cdot \text{h}$)	Output energy ($\text{kW} \cdot \text{h}$)	$C(t)$ ($\frac{\text{uah}}{\text{kW}\cdot\text{h}}$)	Fuel consumption ($\frac{g}{s}$)	Input energy ($\text{kW} \cdot \text{h}$)	Output energy ($\text{kW} \cdot \text{h}$)	$C(t)$ ($\frac{\text{uah}}{\text{kW}\cdot\text{h}}$)	
3,62	154,2	47,5	6,98	3,44	146,5	47,5	7,29	4,25
3,62	154,2	50	6,9	3,62	154,2	50	6,9	0
3,62	154,2	52,5	6,81	3,8	161,9	52,5	6,57	3,52

Given the fact that the output time of the diesel generator to the operating mode is greater than the interval of 1s. and the error (Δ (%)) between the calculations of the dynamic change $C(t)$ by two methods is about 4%, in the future it is advisable to perform the calculation only by expression (17).

Also, for the given model was developed the algorithm of dynamic tariffing for Microgrid which works in an isolated mode. Let the load be connected to a meter that registers the change in the amount of energy received in dynamic mode. If there are several loads and each is connected to its own

generator, which is equipped with a microcontroller MC_{gi} , and each load has its own built-in meter M_i . Also, each load has a microcontroller MC_{li} .

Using of dynamic tariffing when changing the modes of operation of the generator should provide an adequate price for this system for consumers and producers of electricity.

The steps of the developed algorithm are given below:

1. At each time interval, data on the total amount of electricity produced by all generators is collected $W_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n W_i$. The time interval is selected from the technically

acceptable conditions of dynamic change in the amount of electricity produced.

2. In asynchronous mode, each load microcontroller receives information about the amount of electricity consumed W_i and calculates the weight coefficient $W_{wi} = \frac{W_i}{W_\Sigma}$, the cost of the base part of electricity C_i according to the equation (17).

3. Microcontroller MC_{gi} calculates the weight coefficient of the cost of the base part of electricity $C_{wi} = C_{oi} \cdot W_{wi}$ for specific generator. Where $C_{oi} = \frac{C_{B \cdot B_{oi}}}{W_{oi}}$.

4. Based on the calculated weight coefficients and obtained values of cost of base part of electricity C_i the general microcontroller MC determines the total cost of the base part of the electricity:

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^n C_{bar i} \cdot C_i.$$

5. The microcontroller of each load forms a word for the exchange protocol via the ethernet network with the server. The word indicates the weight coefficient of each generator. The network number N_i is also written in each word, as well as the operating time of the corresponding generator t_i , the amount of generated energy W_i and the calculated cost of the base part of the energy C_i .

6. Based on the obtained data on the weight of this generator, the share of its use and the corresponding cost of the base part of the electricity are determined.

7. The common microcontroller MC connected to the server generates a response word and sends it to the microcontroller MC_{gi} of this particular generator.

8. Word containing the command to increase or decrease the amount of electricity generated based on W_i , as well as the new calculated cost of the base part of the electricity $C_{new i} = C_i \cdot C_{wi}$ based on data of the deviation of the level of generated energy and the weight coefficient of the cost of the base part of the energy C_{wi} this generator.

Features of the general exchange protocol: the microcontroller of each load generates a word in binary code which receives the general microcontroller MC , generates the word of the answer and sends to the microcontroller of the

corresponding generator.

Results and discussion. The developed mathematical model allows to receive a ratio for calculation of cost of base part of the electric power of the generator at dynamic change of level of the generated electric power. Also, model allows to study the influence of rather fast change of level of power of the generator and power of consumption of the electric power on change of cost indicators of economic system. This model will further allow the development of flexible dynamic tariffing for different types of Microgrid system. The dynamic influence of the parameters of the generating system and the levels of energy consumption on the economic indicators of the system is a significant factor in the rejection of the generally accepted hourly tariffs in the power grids of Ukraine due to its unprofitability. It is important to use the model of flexible dynamic tariffing, which will ensure adequate tariff price of electricity for consumers and producers.

Conclusions.

1. The analysis of scientific research shows that the regulation of prices in the energy market now occurs in most cases in statics, which does not allow for an adequate assessment of the dynamic change in the tariff price of electricity local systems Microgrid.

2. The urgent task is to create a dynamic model that combines, on the one hand, the energy performance of the energy generating system, and on the other - the economic performance of a closed macroeconomic system. Based on the equations of increase in the cost of electricity of the local Microgrid system, an electro - cost model is proposed, which allows to calculate the cost of the base part of energy depending on the level of electricity consumption.

3. The proposed model allows the use of dynamic tariffing when changing the modes of operation of the generator, to provide an adequate price for consumers and producers of electricity. Also the algorithm of technical realization of calculation of cost of base part of energy at change of its volume in a dynamic mode is offered, on the basis of which the estimation of cost in a dynamic mode for a microgrid of various functional purpose can be carried out.

ЛІТЕРАТУРА

1. A.K. David, Y.C. Lee. Dynamic tariffs : theory of utility-consumer interaction // IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 4, No. 3, August 1989
2. Goran Koreneff, Anssi Seppala, Matti Lehtonen, Veikko Kekkonen, Erkki Laitinen; Jukka Heli and Erkki Antila. Electricity spot price forecasting as a part of energy management in de-regulated power market // Energy Management and Power Delivery, 1998
3. Jie Chen, James S. Thorp, Robert J. Thomas, Timothy D. Mount. Locational Pricing and Scheduling for an Integrated Energy-Reserve Market // System Sciences, 2003
4. M. Siah, S. Porkar, A. Abbaspour-Tehrani-Fard, P. Poure and S. Saadate. Competitive distribution system planning model integration of dg, interruptible load and voltage regulator devices // Iranian Journal of Science and Technology Transaction B: Engineering 34(6):619-635 December 2010
5. Steven Wong and J. David Fuller. Pricing Energy and Reserves Using Stochastic Optimization in an Alternative Electricity Market // IEEE Transactions on Power Systems (Volume:22 , Issue: 2) – 2007
6. Joshua A. Taylor, Ashutosh Nayyar, Duncan S. Callaway, and Kameshwar Poolla. Consolidated Dynamic Pricing of Power System Regulation // IEEE Transactions on Power Systems (Volume:28 , Issue: 4) – 2013
7. Inam Ullah Nutkani, Wang Peng, Poh Chiang Loh, Frede Blaabjerg. Autonomous Economic Operation of Grid Connected DC Microgrid // 2014 IEEE 5th International Symposium on Power Electronics for Distributed Generation Systems
8. В.Я.Жуйков, д-р. техн. наук, проф., І.Ю.Бойко, асп. Застосування лінеаризованої електро-вартісної моделі для дослідження характеру перехідних процесів у ізольованій генеруючій системі // Енергетика: економіка, технології, екологія. 2018. № 4-с.41-49.
9. M. D. Bordo, «"Equation of exchange"». The New Palgrave: A Dictionary of Economics. № v. 2, pp. 175–77., 1987.
10. Дизельная электростанция 100 кВт расход топлива. URL: <https://1kwt.com/>

REFERENCES

8. V. Zhuikov, Dr. tech. sciences, prof., I. Boiko, Ph.D. student, Using of linearized electro – cost model for a transient processes research in isolated generating system // Energy: economics, technology, ecology. 2018. № 4 - p.4 - 49.
10. Diesel power plant 100 kW fuel consumption. URL: <https://1kwt.com/>

Editor-in-chief: Dr. Xénia Vámos

The journal is published by the support of
Society for Cultural and Scientific Progress in Central and Eastern Europe

Készült a Rózsadomb Contact Kft nyomdájában.
1022 Budapest, Balogvár u. 1.
www.rcontact.hu