Когнитивният процес запомняне при обучението по математика

Д. В. Милушева-Бойкина

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски", гр. Пловдив, България
Corresponding author. E-mail: boikina@uni-plovdiv.bg

Paper received 03.02.21; Accepted for publication 16.02.21.

https://doi.org/10.31174/SEND-PP2021-246IX97-05

Резюме. Запомнянето се разглежда като важен когнитивен компонент на учебната дейност при обучението по математика. Предложени са различни идеи за мотивиране на нуждата от запомняне на основното учебно съдържание по математика. Акцентът е поставен на ролята на запомнянето при изграждане на идеи за решаване на задачи, за откриване на евентуални грешки във формулировките на определения или теореми. Представени са илюстриращи примери, свързани с ролята на запомнянето при конкретни задачи. Разработката е предназначена за начинаещи учители и студенти, които се подготвят за учители по математика.

Ключови думи: *обучение по математика, запомняне, понятие, теорема, задача.*

Въведение. Настоящата разработка се явява част от общата тема „Когнитивни компоненти на самоорганизацията на учебния процес по математика". Самоорганизацията, като един от основните компоненти на рефлексивния подход, отнесен специално към обучението по математика и насочен главно към формиране на праксиологическа рефлексия у учещите (ученици, студенти, докторанти), както и с оглед реализиране на идеалната цел на обучението – достигане самоактуализация на субектите, включва психичните процеси възприемане, осмисляне, обобщаване, разбиране и запомняне. Първите четири от тези психични процеси сме разгледали в други разработки [2]. Предмет на изследване в настоящата статия е последният компонент – запомнянето, което е съществена част от мисловните компетентности на всеки човек. Разбира се, както мисленето и въобще ученето, така и запомнянето е свързано с усилена волева дейност.

Способността на човека да запаметява е не просто съхранение на мисли и преживявания. Това е един динамичен процес, който според Х. Смитманс започва „със забелязване и преминава през степените на запаметяване в паметта, разпознаване и възпроизвеждане в определен обем и завършва със забравяне" [3, с. 44].

А. Мавродиев счита, че „Ценността на паметта се състои именно в това, че ние можем да пазим в нея – за кратко време или за по-продължителен период – огромни количества най-разнообразна информация, която при необходимост можем да възпроизведем, без да се обръщаме например към записките си (или подходящи справочници – *добавено от мене, Д. М.-Б.*). Обаче това забележително свойство на паметта може да бъде използвано само при условие, че възприетата информация е не само запаметена, но и затвърдена така, че да се запази в паметта по-продължително време" [1].

В обучението по математика, въпреки наличието на множество справочници, както и правото на учениците да могат да ги използват в уроците, по време на класни и контролни работи, при провеждане на външно оценяване, матури и конкурсни изпити, не е възможно те ефективно да бъдат използвани, ако учещият не е запомнил определени основни знания, придобити по-рано.

Целта на статията е мотивиране на необходимостта от запомняне, от затвърдяване на изученото учебно съдържание в училище, представяне на някои начини за осъществяване и илюстриране чрез примери върху конкретно учебно съдържание.

Изложение на основния материал. Най-общо казано, учебното съдържание по математика в училище включва: математически понятия с техните определения, теореми с техните доказателства и математически или практически задачи с техните решения. Както се вижда, научните понятия съставляват основна част от учебното съдържание поради което, техните определения трябва да бъдат трайно запомняни. Кое налага това? Причините са няколко.

Първо, математическите понятия са абстрактни, поради което, ако не се запомнят трайно техните определения, те се забравят бързо, а това води до намаляване на тяхната приложимост.

Второ, понякога значението на изучените математически понятия се основава не само на съдържателни, но и на формално-логически признаци, а тяхната взаимовръзка и единство не се усвоява лесно от обучаемите, което налага извършване на разнообразни и съдържателни упражнения.

Трето, термините, с които се именуват отделните понятия, се запомнят от учениците по-лесно, отколкото самите понятия и техните съществени признаци и характеристични свойства, с които те се определят.

Четвърто, съществуват много и разнообразни връзки между отделните понятия от дадена тема, от различни теми и дори различни учебни дисциплини, което налага усвояване и затвърдяване на цялата система от понятия.

За да бъде усвояването на учебното съдържание осъзнато и трайно, трябва, освен тези причини, да се разграничават близките по наименование понятия, особено тези, за които се употребяват тъй нар. термини-омоними. Всичко това води до необходимост от системно затвърдяване на учебния материал, едно от основните средства за което е запомнянето. Затова за съзнателно усвояване на определено знание, след като вече е възприето и разбрано от субекта, то трябва и да се запомни. Това запомняне може да бъде неволно или преднамерено. Последното означава, че при такова запомняне се осъществява съзнателно рационално преработване на възприетите мисли, сетивни усещания, чувства и пр. в съзнанието на субекта. За да се запамети съзнателно и трайно дадена информация, е необходимо известно време, а също и регулярно повторение.

Ще отбележим, че при ученето на преден план стои преднамереното запомняне. В обучението по математика не е възможно изучаването на даден материал без знания за друг, свързан с него, по-рано изучен материал. Например, решаването на показателни уравнения е невъзможно без познанията на учениците за степени и действия с тях, без познаване на алгоритъма за решаване на рационални уравнения.

Пример 1. Решете уравненията:

а) $2^{2x} + 3.4^{x} = 64$

б) $3^{2x} + 7.3^{x} - 30 = 0$

Решение. В уравнение а) първото събираемо може да се представи във вида $2^{2x} = 4^{x}$. Като се замести и направи приведение на подобните едночлени, се получава следното уравнение $4.4^{x} = 64$. Прилагайки знания за умножение на степени и представяне на свободния член като степен с основа 4, се получава $4^{x+1} = 4^{3}$, откъдето следва, че $x + 1 = 3$, т.е. $x = 2$. Или, ако пък ученикът забележи, че двете страни на уравнението $4.4^{x} = 64$ имат общ множител 4, то той първо може да предпочете да съкрати на 4, в резултат на което се получава по-просто основно показателно уравнение: $4^{x} = 4^{2}$, откъдето се получава отговорът $x = 2$.

При уравнение б), като се положи $3^{x} = u$, се получава квадратното уравнение $u^2 + 7.u - 30 = 0$, чийто начин за решаване е известен на учениците още от 8. клас. Корените на квадратното уравнение са $u_1 = 3$ и $u_2 = -10$. Като се върнем в полагането, прилагайки отново свойства на степени, от $3^{x} = 3$, се получава: $x = 1$, а показателното уравнение $3^{x} = -10$ няма решение, защото 3^{x} винаги приема само положителни стойности (от свойството на показателната функция: $a^{x} > 0$ при $a > 0$ за всяко x). Разбира се, ако още при полагането $3^{x} = u$ бъде наложено ограничението $u > 0$ за новото неизвестно, то още с намирането на $u_2 = -10$ може да приключат разсъжденията по решаването на задачата и да се избегне разглеждането на уравнението $3^{x} = -10$.

Както се вижда от илюстриращия пример, за да може да се справи безпрепятствено с решаването на предложените показателни уравнения, ученикът трябва да е запомнил свойствата на степените с положителна основа и действията с тях, както и алгоритъма за решаване на квадратни уравнения, а също да са формирани съответните умения за прилагане на посочените знания.

„Като процес запомнянето е дълбоко личностно мотивирано психично явление. Какво, колко и как ще запомни личността даден материал, до голяма степен зависи в каква степен го включва в сферата на мотивацията и потребностите си, доколко и в каква степен е било в обсега на дейността на човека” [4, с. 79]. Поради това процесът на запаметяване трябва да започне с целесъобразно групиране и структуриране на учебния материал. За целта трябва да се има пред вид, че всеки ученик мисли индивидуално, има свой специфичен стил на възприемане и мислене, което влияе съществено на процеса запомняне. Това може да подпомага запомнянето, но може и да го възпрепятства. Затова целесъобразното прегрупиране и структуриране на учебния материал представлява добра възможност за по-лесно и по-трайно запазване на съответното знание в паметта. За целта учебното съдържание, което предстои да се изучава, се обособява в няколко логически завършени части (точки, подточки) и всяка част/точка се именува така, че да отразява същината на включеното в нея учебно съдържание.

Паметта е зависима от езика. Степента на запомняне съществено зависи от първото впечатление, от първото самостоятелно придобито знание, от формулировките на изучаваните определения, свойства, теореми. Затова е важно да се знае, че ако невярно или неточно е формулирана някоя дефиниция, теорема, формула, правило и пр., тази формулировка се възпроизвежда, докато не се отстрани недостатъкът. Това налага да се следи за прецизност при изказването на формулировките и, в случай на допусната неточност или грешка, тя своевременно да бъде коригирана и отстранена. Трябва да се има пред вид, че допуснатата или проявена небрежност при запомнянето на учебния материал си „отмъщава“, докато чистото езиково изложение се отблагодарява не само с успешно и трайно запаметяване, а и с добро разбиране.

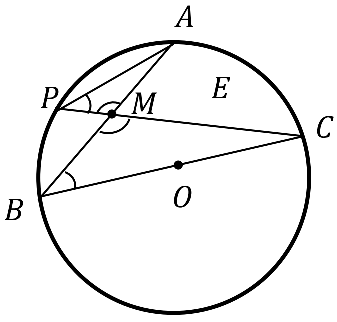
Важно при запаметяването е още и разпознаването.

Пример 2. Разглеждаме изразите $(a^2 + ab + b^2).(a - b)$ и $a^3 - b^3$. В резултат на тяхното анализиране, съпоставяне, пресмятане и сравняване на резултатите, може да се достигне до съответно идентифициране, което означава, че в тези изрази по същество е разпозната следната теорема: $a^3 - b^3 = (a - b).(a^2 + ab + b^2)$, която представя една от формулите за съкратено умножение. Тя трябва да се запомни като основна математическа формула, защото намира редица приложения не само в същия и в следващите уроци, но и през целия курс на обучение по математика в средното училище, а също и в повечето специалности във ВУЗ – например икономически, технически, физически, химически, математически, информатични и други специалности.

Разпознаването показва ефективността на запомнянето. В този случай паметта не възпроизвежда заученото, а мисловното и свързаното с езика възпроизвеждане. Освен това разпознаването трансформира по определен начин запазеното в паметта. Степента на запаметяване на учебния материал се определя и обуславя и от други фактори. Основният от тях е повторението. Тук ще отбележим само, че когато ние (нашите поколения) бяхме ученици, преобладаваше и действаше мнението: „Повторението е майка на знанието” – това разбира се важи, когато изучаваният материал е правилно разбран и трайно запомнен. Разбира се, в днешно време достъпът до нужната информация е значително улеснен, но въпреки това, без наличие на добре запомнени основни знания, формули, свойства, признаци и пр., субектът трудно може да се ориентира в многообразната и обемиста информация, от която да подбере само нужната и правилно да я използва. Ще отбележим още, че чрез съзнателно повторение може да се постигне по-висок ефект на запомняне. Някои автори препоръчват повторението да се извършва през определени интервали от време, които да не са много големи. Всъщност всеки обучаван, ако е възможно, сам трябва да прецени какъв да бъде този интервал. Необходимо е също така да се отдели онова знание, което трябва да се запомни за кратък период от време (например биографии на математици, исторически сведения за математиката и т.н.), от това знание, което трябва да остане в паметта за дълъг период (като например дефиниции на понятия, характеристични свойства, основни твърдения и пр.). Освен това трябва да се отдели и това знание, което ще е необходимо да се помни за цял живот (знания, приложими в практиката и живота). Запомнянето на определенията на математическите понятия, на формулировките на теоремите се подпомага съществено и от оперирането с понятията или със съответните теореми. Опериране с понятия се осъществява при тяхното използване за дефиниране на нови понятия, при извършване на логически операции с понятия като: делене на понятия, класифициране на понятия, подвеждане под понятие. Оперирането с теореми включва различни дейности, като например: формулиране на обратното твърдение, на противоположното или контрапозитивното на дадена теорема; обсъждане и обосноваване на тяхната вярност или невярност, или еквивалентност; разглеждане на въпроса за тъй нар. достатъчно условие (ДУ), необходимо условие (НУ), необходимо и достатъчно условие (НДУ) и коментиране на техни приложения върху конкретни примери (дори и съставяне на собствени примери), кои от изучените теореми се явяват теореми-свойства и кои са теореми-признаци; прилагане на дадена теорема за доказване на други теореми и т.н.

При реализиране на третия етап от методиката на изучаване на математически твърдения – „усвояване на теоремата", трябва съзнателно да се усвои и запомни формулировката – при това учениците могат да използват свои думи при изказването ѝ, но в никакъв случай не бива да променят смисъла на съответната теорема, защото това може да доведе до неверни изводи.

Пример 3. Ако при изказването на формулировката на втори признак за еднаквост на два триъгълника, ученикът я формулира така: „Ако страна и два ъгъла от единия триъгълник са равни на страна и два ъгъла от другия триъгълник, то тези триъгълници са еднакви" или по-кратко: „Два триъгълника са еднакви, ако имат по една страна и два ъгъла равни", тогава опитният учител може да отговори по следния начин: „Така ли? Тогава с този твой „признак" аз ще докажа, че произволна хорда в окръжност е равна на нейния диаметър". Разбира се, при тези думи на учителя учениците обикновено реагират: „Но това е невъзможно! Нали всяка хорда в една окръжност, която не минава през нейния център, е по-къса от диаметъра ѝ?". Учителят: „Да така е. Но, за да открием пропуска във формулировката на „признака", изказан от вашия съученик, нека да начертаем една окръжност и да построим една хорда – AB и през единия ѝ край да прекараме диаметъра BC, а след това да свържем точка C със средата M на хордата AB и да продължим отсечката CM до нейното пресичане с окръжността в точка P. Да построим хордата AP и да разгледаме триъгълниците AMP и BMC. Те имат: $AM=MB$ (по условие точка M е среда на AB), $\measuredangle AMP = \measuredangle BMC$ (връхни) и $\measuredangle APM = \measuredangle MBC$, защото $\measuredangle APM \equiv \measuredangle APC$ и $\measuredangle MBC \equiv \measuredangle ABC$, а пък $\measuredangle APC = \measuredangle ABC$ (вписани ъгли, измерващи се с половината от една и съща дъга $\widehat{AC}$ (черт. 1). Тогава, съгласно формулирания от вашия съученик „признак" за еднакви триъгълници (да имат по една страна и два ъгъла равни), би трябвало да заключим, че $\Delta AMP \cong \Delta BMC$. А щом са еднакви тези триъгълници, то страните, които лежат срещу равните им връхни ъгли, също са равни, а именно $AP = BC$, т.е. хордата AP е равна на диаметъра BC на тази окръжност"!?!



Черт. 1.

Моменталната реакция на всички ученици е: „Но това е абсурд, от чертежа се вижда, че $AP < BC$". А търпеливият учител, с оглед постигане на все по-осезаемо *осмисляне* от учениците на грешката, която е допуснал техният съученик, продължава разсъжденията си: „Да така е, драги ученици, но не можем да твърдим нещо, което се «вижда» от чертежа – той, чертежът, нищо не доказва, а може да се използва само за онагледяване на някаква определена ситуация. Затова в никакъв случай не бива да се казва текстът: «от чертежа ... се вижда, че ...». Да, наистина $AP \neq BC$ или по-точно $AP < BC$. Но по-важно е да изясним къде се крие грешката, поради която по-горе се стигна до извода, че е изпълнено равенството $AP = BC$. Действително тези две отсечки се явяват страни, лежащи срещу равни ъгли в разглежданите триъгълници, но самите триъгълници не са еднакви!!! Защо? Нека да проследим по-внимателно какви са техните елементи. Наистина $AM=MB$. Наистина $\measuredangle AMP$ и $\measuredangle BMC$ са връхни, поради което те са равни. Равни са още $\measuredangle APC$ и $\measuredangle ABC$, като вписани ъгли, които се измерват с половината от една и съща дъга $\widehat{AC}$, т.е. равни са $\measuredangle APM$ и $\measuredangle MBC$. Но обърнете внимание, докато $\measuredangle MBC$ е <u>прилежащ ъгъл</u> за страната BM в ΔBMC, то $\measuredangle APM$ е <u>срещулежащ ъгъл</u> за страната AM в ΔAMP. Ето защо, въпреки че е изпълнено равенството $\measuredangle APM = \measuredangle MBC$, тези ъгли **не са съответни един на друг** в разглежданите триъгълници!!! Затова последните не могат да бъдат еднакви. Е, стана ли ясно в какво се състои грешката на вашия съученик при изказването на формулировката на втория признак за еднаквост на два триъгълника? Учениците правилно отговарят, при това осъзнато: «Той пропусна в своята формулировка важната дума **съответно** равни ъгли».

Изводи. Следователно при изказване на формулировките, не само на втори признак за еднаквост на два триъгълника, но и за подобност, а също и на всички други теорема от училищния курс по математика е важно да не се променя смисълът, който е вложен в техните формулировки. Същият извод важи за формулировките и на определенията на математическите понятия, на различните им характеристични свойства, които съставляват необходими и/или достатъчни условия за съответното изучавано понятие.

Учебната практика показва, че за запомняне на дадена информация най-съществена роля играе нейното регулярно повторение и приложение. Това обаче ще бъде разгледано в друга публикация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мавродиев, А. Повторението като познавателен процес. // Българска наука, 2011. https://www.nauka.bg/povtorenieto-na-informatsiya/
2. Милушева-Бойкина, Д. Относно разбирането в обучението по математика. // Математика и математическо образование, Изд. СМБ, 2021. ISSN 1313-3330 (под печат)
3. Смитманс, Х. Да се учим, но как? Превод от немски Н. Боров. София: Профиздат, 1975. 84 с.
4. Трифонов, Т. М. Обща психология. Четвърто прераб. изд., София: Парадигма, 2018. 232 с. ISBN: 954-953-660-2

REFERENCES

1. Mavrodiev, A. Repetition as a cognitive process. // Bulgarian science. 2011. https://www.nauka.bg/povtorenieto-na-informatsiya/
2. Milusheva-Boykina, D. About Understanding in Mathematics Education. // Mathematics and mathematics education, UMB, 2021. ISSN 1313-3330 (in print)
3. Smitmans, H. Let's learn, but how? From German N. Borov. Sofia: Profizdat, 1975. 84 p.
4. Trifonov, T. General Psychology. Forth reworked edition. Sofia: Paradigma, 2018. 232 p. ISBN: 954-953-660-2

The Cognitive Process of Memorization in Mathematics Education

D. V. Millousheva-Boykina

Abstract. Memorization is considered as an important cognitive component of the learning activity in teaching mathematics. Various ideas for motivating the need to memorize the basic curriculum in mathematics have been proposed. The emphasis is placed on the role of memorization in creating ideas for solving problems, for detecting possible errors in the formulations of definitions or theorems. Illustrative examples related to the role of memorization in specific problems are presented. The article is intended for beginning teachers and students who are preparing for mathematics teachers.

Keywords: *education in mathematics, memorization, concept, theorem, problem.*