PHYSICS

Зауваження до означення границі функції мовою послідовностей

О. О. Курченко, О. О. Синявська
https://doi.org/10.31174/SEND-NT2018-158VI18-01
Київський університет імені Тараса Шевченко, ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Corresponding author E-mail: olkurchenko@ukr.net, olga.synyavska@uzhnu.edu.ua

Paper received 06.01.18; Accepted for publication 13.01.18.

Анотація. У статті розглядаються два еквівалентні означення границі функції дійсної змінної: у термінах $\varepsilon - \delta$ (за Коші) та мовою послідовностей (за Гейне). Доведено, що на послідовності в означенні за Гейне можна накласти певні умови, зокрема умову строгої монотонності, без втрати еквівалентності означенню за Коші.
Ключові слова: *границя функції, гранична точка множини, означення границі функції.*

Вступ. Математичний аналіз є одним з основних предметів у фаховій підготовці математиків та фахівців інших спеціальностей, пов'язаних із застосуванням математичних методів. Основним змістом математичного аналізу є диференціальне та інтегральне числення. Поняття границі послідовності та границі функції є наріжним для логічного обґрунтування диференціального та інтегрального числення. Це поняття у неявній формі зустрічається ще у давніх греків, наприклад, метод вичерпування давньогрецького математика і астронома Евдокса Кнідського, викладений у десятій книзі «Начал» Евкліда [1]. Фундатори диференціального та інтегрального числення Готфрід Вільгельм Лейбніц та Ісаак Ньютон застосовували поняття границі на геометрично-інтуїтивному рівні. Історичні аспекти виникнення сучасного означення границі функції у точці як у термінах $\varepsilon - \delta$ так і мовою послідовностей, викладені, наприклад, у статтях [2,3]. У курсах математичного аналізу встановлюється еквівалентність цих підходів до означення границі функції. У деяких підручниках з математичного аналізу $\varepsilon - \delta$ означення границі функції називають означенням за Коші, а означення мовою послідовностей – означенням за Гейне [4,5]. Надалі у цій роботі ми будемо дотримуватися такої термінології.

Нехай A – підмножина множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, x_0 – гранична точка підмножини A. Функція $f: A \to \mathbb{R}$. У означенні за Гейне границі функції f у точці x_0 розглядаються всі можливі числові послідовності (x_n) такі, що для довільного натурального числа n має місце приналежність $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ та

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Розгляд такої сім'ї послідовностей може утруднювати застосування означення за Гейне у математичному аналізі.

Короткий огляд публікацій по темі. У курсах математичного аналізу (наприклад, у підручниках [4,5]) виклад теми «Границя функції» ґрунтується на двох означеннях границі функції у точці: у термінах $\varepsilon - \delta$ та мовою послідовностей. Встановлюється еквівалентність цих означень. У деяких підручниках з математичного аналізу (наприклад, [4,5]) ці означення називають відповідно означенням за Коші та означенням за Гейне. В інших підручниках (наприклад, [6,7]) ці означення не пов'язують з прізвищами Коші та Гейне. Ідея обмеження сім'ї послідовностей в означенні границі функції за Гейне використана у статті [8] для доведення правил Лопіталя із застосуванням теореми Штольца.

Мета. У означенні мовою послідовностей границі функції у точці розглядається певна сім'я послідовностей. Мета роботи полягає у звуженні цієї сім'ї таким чином, щоб означення границі функції мовою послідовностей залишаючись рівносильним означенню у термінах $\varepsilon - \delta$ стало більш конструктивним.

Матеріали і методи. Логічний аналіз означень у термінах $\varepsilon - \delta$ та мовою послідовностей границі функції у точці, метод від супротивного.

Гранична точка множини. Означенню границі функції у точці передує поняття граничної точки множини. Нехай $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset, x_0 \in \mathbb{R}$.

Означення 1. Точка x_0 називається граничною точкою множини A, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $y \in A,\ y \neq x_0$, такий, що

$$|y - x_0| < \varepsilon.$$

Означення 2. Символ $+\infty$ $(-\infty)$ називається граничною точкою множини A якщо для довільного $E \in \mathbb{R}$ існує $y \in A$ такий, що $y > E$ $(y < E)$.

Зауваження 1. Символ $+\infty$ $(-\infty)$ є граничною точкою множини A тоді й тільки тоді, коли множина A необмежена зверху (знизу).

Теорема 1 [5]. Число або символ $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ є граничною точкою множини A тоді й тільки тоді, коли існує числова послідовність (x_n) така, що:

1) $x_n \in A, x_n \neq x_0$ для довільного натурального n;
2) $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Для означень границі зліва і границі справа функції у точці потрібні поняття граничної точки множини зліва і справа.

Означення 3. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ називається граничною точкою зліва (справа) множини A, якщо x_0 є граничною точкою множини $A \cap (-\infty, x_0)$ $\big(A \cap (x_0, +\infty)\big)$.

Зауваження 2. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ є граничною точкою множини A, якщо виконується принаймні одна з таких умов:

1) точка x_0 є граничною точкою зліва множини A;
2) точка x_0 є граничною точкою справа множини A.

У теоремі про характеризацію граничної точки, на послідовність, про існування якої йде мова, можна накласти певні обмеження із збереженням характеризації. Через $E(a_n)$ позначимо множину значень послідовності (a_n). Надалі запис $(a_n) \subset A$ означає, що $E(a_n) \subset A$.

Теорема 2. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ є граничною точкою зліва множини A тоді й тільки тоді, коли для довільної послідовності $(a_n) \subset (-\infty, x_0)$, такої, що $a_n \to x_0$ при $n \to \infty$ існує строго зростаюча послідовність (x_n) така, що:

1) $x_n \in A \cap (-\infty, x_0)$ для довільного $n \geq 1$;
2) $x_n > a_n$ для довільного $n \geq 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка множини $A \cap (-\infty, x_0)$; $(a_n) \subset (-\infty, x_0)$ – задана послідовність. В означенні граничної точки покладемо $\varepsilon_1 = x_0 - a_1 > 0$. Для такого $\varepsilon_1 > 0$ існує $x_1 \in A \cap (-\infty, x_0)$ таке, що $x_0 - x_1 < \varepsilon_1 = x_0 - a_1$, звідки $x_1 > a_1$. На другому кроці в означенні граничної точки покладемо $\varepsilon_2 = \min(x_0 - a_2, x_0 - x_1) > 0$. Для такого $\varepsilon_2 > 0$ існує $x_2 \in A \cap (-\infty, x_0)$ таке, що $x_0 - x_2 < \varepsilon_2$, звідки $x_2 > a_2$ і $x_2 > x_1$. На третьому кроці в означенні граничної точки покладемо $\varepsilon_3 = \min(x_0 - a_3, x_0 - x_2) > 0$. Для такого $\varepsilon_2 > 0$ існує $x_3 \in A \cap (-\infty, x_0)$ таке, що $x_0 - x_3 < \varepsilon_3$, звідки $x_3 > a_3$ і $x_3 > x_2$. Продовжимо цей процес. В результаті отримаємо строго зростаючу послідовність $x_n \in A \cap (-\infty, x_0)$ таку, що $x_n > a_n$ для довільного $n \geq 1$.

Достатність випливає із теореми 1 та означення 3 граничної точки зліва. Теорема доведена.

Зауваження 3. Із умов теореми випливає, що $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Аналогічно можна характеризувати граничну точку справа та граничні точки $-\infty, +\infty$. Сформулюємо твердження для випадку граничної точки $+\infty$.

Теорема 3. Символ $+\infty$ є граничною точкою множини A тоді й тільки тоді, коли для довільної послідовності (a_n) такої, що $a_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, існує строго зростаюча послідовність (x_n), така, що:

1) $x_n \in A$ для довільного $n \geq 1$;

2) $x_n > a_n$ для довільного $n \geq 1$.

Із таких характеризацій граничних точок випливає наступний наслідок.

Наслідок 1. Число або символ $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ є граничною точкою зліва множини A тоді й тільки тоді, коли існує строго монотонна послідовність (x_n), така, що:

1) $x_n \in A, x_n \neq x_0$ для довільного $n \geq 1$;

2) $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Означення границі функції в точці. Нехай $A \subset \mathbb{R}, x_0$ – гранична точка множини A, функція $f: A \to \mathbb{R}$. Означення за Коші границі функції в точці $\lim_{x \to x_0} f(x) = p$ формулюється по-різному у залежності від того, будуть x_0, p числами чи символами $-\infty, +\infty$. Таким чином, маємо 9 варіантів означень. Сформулюємо два з них.

Означення 4. Нехай $x_0,\ p \in \mathbb{R}$. Число p називається границею функції $f: A \to \mathbb{R}$ при $x \to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільного $x \in A$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність

$$|f(x) - p| < \varepsilon.$$

Означення 5. Нехай $x_0 = +\infty, p \in \mathbb{R}$. Число p називається границею функції $f: A \to \mathbb{R}$ при $x \to +\infty$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\Delta \in \mathbb{R}$ таке, що для довільного $x \in A$, $x > \Delta$ виконується нерівність

$$|f(x) - p| < \varepsilon.$$

Формулювання означення за Гейне границі функції в точці охоплює всі 9 варіантів значень для x_0, p.

Означення 6. Нехай $x_0, p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Число або символ p називається границею функції $f: A \to \mathbb{R}$ при $x \to x_0$, якщо для довільної послідовності $(x_n) \subset A \backslash \{x_0\}$ такої, що $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ випливає, що

$$f(x_n) \to p \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 4 [5]. Означення за Коші і за Гейне границі функції в точці еквівалентні.

У випадку, коли гранична точка x_0 множини A є дійсним числом, розглядають границю зліва і границю справа в точці x_0 функції $f: A \to \mathbb{R}$. Сформулюємо означення за Коші границі зліва. Означення за Коші границі справа формулюється аналогічно.

Означення 7. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка множини $A \cap (-\infty, x_0)$, функція $f: A \to \mathbb{R}$. Число p називається границею зліва функції f у точці x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільного $x \in A \cap (-\infty, x_0), x_0 - x < \delta$ виконується нерівність

$$|f(x) - p| < \varepsilon.$$

Сформулюємо означення за Гейне границі зліва. Означення за Гейне границі справа формулюється аналогічно.

Означення 8. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка множини $A \cap (-\infty, x_0)$, функція $f: A \to \mathbb{R}$. Число або символ $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ називається границею зліва функції f у точці x_0, якщо для довільної послідовності $(x_n) \subset A \cap (-\infty, x_0)$ такої, що $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ випливає, що

$$f(x_n) \to p \text{ при } n \to \infty.$$

Із теореми 4, застосованої для звуження функції на множину $A \cap (-\infty, x_0)$ $\big(A \cap (x_0, +\infty)\big)$ випливає наступна теорема.

Теорема 5. Означення за Коші і за Гейне границі зліва (справа) функції в точці еквівалентні.

Обмеження на сім'ю послідовностей в означенні за Гейне границі функції.

Теорема 6. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка множини $A \cap (-\infty, x_0)$, функція $f: A \to \mathbb{R}$; $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, послідовність $(a_n) \subset (-\infty, x_0)$ і $a_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Нехай, далі, для довільної строго зростаючої послідовності (x_n) такої, що:

1) $x_n \in A \cap (-\infty, x_0)$ для довільного $n \geq 1$;

2) $x_n > a_n$ для довільного $n \geq 1$

випливає, що $f(x_n) \to p$ при $n \to \infty$. Тоді

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = p.$$

Зауваження 4. Із умов 1), 2) теореми 6 та збіжності $a_n \to x_0$ при $n \to \infty$ випливає, що що $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Доведення теореми. Нехай для визначеності $p \in \mathbb{R}$. Інші випадки розглядаються аналогічно.

Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, твердження теореми хибне. Це означає, що існує $\varepsilon_* > 0$, таке, що для довільного $\delta > 0$ існує $x \in A \cap (-\infty, x_0)$ таке, що $x_0 - x < \delta$, але $|f(x) - p| \geq \varepsilon_*$. На першому кроці для $\delta_1 = x_0 - a_1 > 0$ існує $x_1 \in A \cap (-\infty, x_0)$ таке, що $x_0 - x_1 < \delta_1 = x_0 - a_1$, але $|f(x_1) - p| \geq \varepsilon_*$. Із нерівності $x_0 - x_1 < x_0 - a_1$ випливає нерівність $x_1 > a_1$. На другому кроці для $\delta_2 = \min(x_0 - a_2, x_0 - x_1)$ існує $x_2 \in A \cap (-\infty, x_0)$ таке, що $x_0 - x_2 < \delta_2$, але $|f(x_2) - p| \geq \varepsilon_*$. Із нерівності $x_0 - x_2 < \delta_2$ випливають нерівності $x_2 > a_2, x_2 > x_1$. На третьому кроці для $\delta_3 = \min(\ x_0 - a_3, x_0 - x_2)$ існує $x_3 \in A \cap (-\infty, x_0)$ таке, що $x_0 - x_3 < \delta_3$, але $|f(x_3) - p| \geq \varepsilon_*$. Із нерівності $x_0 - x_3 < \delta_3$ випливають нерівності $x_3 > a_3, x_3 > x_2$. Продовжуючи цей процес, отримаємо строго зростаючу послідовність (x_n), що задовольняє умови 1), 2). Але $|f(x_n) - p| \geq \varepsilon_*$ для довільного $n \geq 1$, що суперечить збіжності $f(x_n) \to p$ при $n \to \infty$. Теорема доведена.

Аналогічні твердження мають місце для границі справа функції у точці та у випадках, коли гранична точка $x_0 = -\infty$ або $x_0 = +\infty$. Сформулюємо теорему для $x_0 = +\infty$.

Теорема 7. Нехай $+\infty$ – гранична точка множини A, функція $f: A \to \mathbb{R}$; $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, послідовність $(a_n) \subset \mathbb{R}$ і $a_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Нехай, далі, для довільної строго зростаючої послідовності (x_n), такої, що:

1) $x_n \in A$ для довільного $n \geq 1$;

2) $x_n > a_n$ для довільного $n \geq 1$

випливає, що $f(x_n) \to p$ при $n \to \infty$. Тоді

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = p.$$

Із наведених вище результатів випливає наступний наслідок.

Наслідок 2. Нехай $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – гранична точка множини A, функція $f: A \to \mathbb{R}$; $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Нехай, далі, $f(x_n) \to p$ при $n \to \infty$ для довільної строго зростаючої послідовності (x_n), такої, що:

1) $x_n \in A, x_n \neq x_0$ для довільного $n \geq 1$;

2) $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Тоді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = p.$$

Зауваження 5. Із теореми 4 випливає, що правильне й обернене твердження.

У статті [8] цей наслідок був застосований для доведення правил Лопіталя.

Застосування для доведення теореми про існування границі монотонної функції. Застосуємо отримані результати для доведення теореми про існування границі монотонної функції за допомогою теореми про існування границі монотонної послідовності.

Теорема 8. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка множини $A \cap (-\infty, x_0)$; функція $f: A \to \mathbb{R}$ – монотонна на множині $A \cap (-\infty, x_0)$. Тоді існує (число або символ $-\infty, +\infty$)

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x).$$

Доведення. Нехай $(a_n) \subset A \cap (-\infty, x_0)$ строго зростаюча послідовність, $a_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Тоді послідовність $f(a_n)$ монотонна і тому існує $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = p$. Розглянемо довільну строго зростаючу послідовність $(x_n) \subset A \cap (-\infty, x_0)$, таку, що $a_n < x_n$ для довільного натурального $n \geq 1$. Нехай, для визначеності, функція f неспадна. Тоді $f(a_n) \leq f(x_n)$ для довільного натурального $n \geq 1$. Оскільки $a_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то для довільного $n \geq 1$ існує натуральне число $m > n$, таке, що $x_n < a_m < x_0$, звідки $f(x_n) \leq f(a_m) \leq p$. Таким чином, $f(a_n) \leq f(x_n) \leq p$ для всіх натуральних n. За теоремою про три послідовності [5], $f(x_n) \to p$ при $n \to \infty$. Внаслідок теореми 6,

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = p.$$

Теорема доведена.

Висновки. У математичному аналізі є два еквівалентні означення границі функції у точці: у термінах $\varepsilon - \delta$ (за Коші) та мовою послідовностей (за Гейне). Виявляється, що на послідовності, які фігурують у означенні за Гейне, можна накласти певні обмеження без втрати еквівалентності означенню за Коші. Зокрема, на послідовності в означенні за Гейне можна накласти умову строгої монотонності. Така модифікація означення границі функції мовою послідовностей може бути використана у курсі математичного аналізу для варіативності доведень деяких теорем та у навчальній роботі зі студентами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Начала Евклида. ГТТИ. – Т. 2, 1949..
2. Grabiner J. V. Who Gave You the Epsilon? Caushy and the Origins of Rigorous Calculus // The American Mathematical Monthly, 1983, Vol. 90, no. 3, P. 185-194.
3. Шведенко С. В. Две заметки по математическому анализу // Математическое образование, 2011, Вып. 3 – 4, С. 34-37.
4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 720 с.
5. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина I. – Київ: Либідь, 1993. – 320 с.
6. Банах С. Дифференциальное и интегральное ичисление. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 424 с.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 608 с.
8. Курченко О. О. Застосування теореми Штольца для доведення правил Лопіталя // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка, 2004, Вип. 11 – 12, С.83-85.

REFERENCES

1. Euclid's Elements. STTP. – B. 2, 1949.
2. Grabiner J. V. Who Gave You the Epsilon? Caushy and the Origins of Rigorous Calculus // The American Mathematical Monthly, 1983, Vol. 90, no. 3, P. 185-194.
3. Shvedenko S. Two Notes on Calculus // Mathematical Education, 2011, Vol. 3–4, P. 34-37.
4. Il'in V. A., Sadovnichiy V. A., Sendov Bl. Kh. Mathematical analysis. – Moscow: Nauka, Home Edition physical and mathematical literature, 1979. – 720 p.
5. Dorogovtsev A. Ya. Mathematical analysis. Part I. – Kiev, Lubid', 1993. – 320 p.
6. Banach S. Differential and Integral Calculus. – Moscow: Nauka, Home Edition physical and mathematical literature, 1972.–424 p.
7. Fihtengol'tz G. M. Course of Differential and Integral Calculus. – Moscow: Nauka, Home Edition physical and mathematical literature, 1969. – 608 p.
8. Kurchenko A. A. Application of Stolz theorem to the proof of l'Hospital rules // Visnyk. Matematyka. Mekhanika. Taras Shevchenko National University of Kiev, 2004, Vol. 11-12, P. 83-85.

Remark to the definition of the limit of a function in terms of the sequences

O. O. Kurchenko, O. O. Syniavska

Abstract. In this paper we consider two equivalent definitions of limit of a function of a real variable: in term of $\varepsilon - \delta$ (Cauchy's definition) and in term of sequences (Heine's definition). We show that a condition of strictly monotonic we can be used to the sequences in the Heine's definition without loss of equivalence Cauchy's definition.

Keywords: *limit of a function,limit point, definition of limit of a function.*

Замечание к определению предела функции на языке последовательностей

О. О. Курченко, О. А. Синявская

Аннотация. В статье рассматриваются два эквивалентных определения предела функции действительной переменной: в терминах $\varepsilon - \delta$ (по Коши) и на языке последовательностей (по Гейне). Доказано, что на последовательности в определении по Гейне можно наложить определенные условия, в частности условие строгой монотонности, без потери эквивалентности определению по Коши.

Ключевые слова: *предел функции, предельная точка, определение предела функции.*