MATHEMATICAL SCIENCES

Про існування розв'язку задачі Коші одного класу стохастичних диференціально-різницевих рівнянь в частинних похідних із зовнішніми випадковими збуреннями

І. В. Юрченко, В. С. Сікора

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
Corresponding author. E-mail: i.yurchenko@chnu.edu.ua

Paper received 08.01.19; Accepted for publication 15.01.19.

https://doi.org/10.31174/SEND-NT2019-193VII23-23

Анотація. Розглянуто питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу. Отримано достатні умови на коефіцієнти нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу, які гарантують існування з імовірністю одиниця його розв'язку. Методика доведення грунтується на результатах О.М. Станжицького та А.О. Цуканової щодо існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу.

Ключові слова: *стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних, задача Коші, існування розв'язку, випадкові збурення.*

Вступ. Питання існування та єдиності розв'язку стохастичних диференцальних рівнянь з деякими початковими та граничними умовами в різних функціональних просторах, зокрема і рівнянь у частинних похідних, досліджувалося багатьма авторами [1–7]. У працях [3, 4] О.М. Станжицький та А.О. Цуканова одержали теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. Дана робота розглядає питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу.

Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному базисі $\left(\Omega, F, \{F_t, t \ge t_0, 0\}, \mathbf{P}\right)$ [1] задано нелінійне дифузійне стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НДСДРРНТ) в частинних похідних під дією випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу

$$d\left(u(t,x)+\int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,y)u(t-\tau,y)dy\right)= =\sum_{j=1}^{r}\varphi_j\left(\gamma_j\right)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2}dt+ +\varphi_{r+1}\left(\gamma_{r+1}\right)\sigma\left(t,u(t-\tau,x)\right)dw(t,x), \quad (1)$$

для $t\in(0,T]$, $x\in\mathbf{R}^r$ за початковими даними

$$u(t,x)=\psi(t,x), \quad \forall t\in[-\tau,0], \quad (2)$$

де $\varphi_j(\cdot)$ – одновимірні беровські функції; $\gamma_j\equiv\gamma_j(\omega)\in\mathbf{R}^1$, $j=\overline{1,r+1}$, незалежні попарно та незалежні від вінерівського процесу $w(t,x)$ випадкові величини; $T\in(0,\infty)$ – фіксований дійсний час, $\tau>0$, випадковий r-вимірний оператор Лапласа

$$\Delta_x(\omega)\equiv\sum_{j=1}^{r}\varphi_j\left(x_j\right)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2}, \quad (3)$$

$w(t,x)$ – $L_2\left(\mathbf{R}^r\right)$-вимірний Q-вінерівський процес [2]; $\sigma:[0,T]\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ і $b:[0,T]\times\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ – деякі конкретні функції, які будуть визначені під час дослідження; $\psi:[-\tau,0]\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ – функція початкових даних.

Обговорення попередніх результатів та означення. Наведемо декілька тверджень з праць [3–6].

Лема 1. [6, с.188]. *Оператор*

$$S(t):L_2\left(\mathbf{R}^r\right)\to L_2\left(\mathbf{R}^r\right) \quad (4)$$

генерує розв'язок однорідної задачі Коші для рівняння тепла (лема 1, [9]) з імовірністю 1

$$d\left(u(t,x)\right)+\int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz=\Delta_x u(t,x)dt, \quad (5)$$

за початковими даними (2) за правилом

$$u(t,x)=\left(s(t)g(\square)\right)(x)=\int_{\mathbf{R}^r}K(t,x-y)g(\square)dy, \quad (6)$$

та утворює C_{0-} напівгрупу операторів, інфінітезимальним оператором якої є випадковий лапласіан $\Delta_x(\omega)$ (3). А ця напівгрупа $S(t)$ є стискаючою, тобто

$$\left\|\left(S(t)g(\square)\right)(x)\right\|^2_{L_2\left(\mathbf{R}^r\right)}\le\left\|g(x)\right\|^2_{L_2\left(\mathbf{R}^r\right)}. \quad (7)$$

Уведемо потік (фільтрацію) σ-алгебр $\{F_t, t\ge t_0\ge 0\}$, який породжений $L_2\left(\mathbf{R}^r\right)$-значним Q-вінерівським процесом

$$w(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}e_n(x)\beta_n(t), \quad (8)$$

де $\{\beta_n(t)\equiv\beta_n(t,\omega)\}\subset\mathbf{R}^1$ – незалежні стандартні одновимірні вінерівські (броунівські) процеси, а

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\equiv\lambda<\infty. \quad (9)$$

При цьому система векторів $e_n(x)\equiv\overline{e}_n(x)$ утворюють ортонормований базис у $L_2\left(\mathbf{R}^r\right)$ такий, що

$$\sup_{n\in\{1,2,...\}} ess\sup_{x\in\mathbf{R}^r}\left|e_n(x)\right|\le 1. \qquad (10)$$

Уведемо простір Банаха $\mathrm{B}_{2,T}$ всіх $L_2(\mathbf{R}^r)$-значних F_t-вимірних та неперервних з імовірністю одиниця випадкових процесів $\Phi(\cdot)\equiv\Phi(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to L_2(\mathbf{R}^r)$ з нормою

$$\left\|\Phi(\cdot)\right\|_{B_{2,T}}\equiv\sqrt{\sup_{0\le t\le T}\mathbf{E}\left\|\Phi(t,\omega)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}}. \qquad (11)$$

Означення 1 [3]**.** Неперервну випадкову функцію $u\equiv u(t,x,\omega):[-\tau,T]\times\mathbf{R}^r\times\Omega\to\mathbf{R}^1$ назвемо м'яким розв'язком задачі (1), (2), якщо виконуються умови:

1) u є F_T-вимірною для майже всіх $t\in[-\tau,T]$ та фіксованих $x\in\mathbf{R}^r$, $\omega\in\Omega$;

2) u задовольняє умову (інтегральне рівняння)

$$u(t,x,\omega)=$$
$$=\int_{\mathbf{R}^r}K(t,x-y)\left(\psi(0)+\int_{\mathbf{R}^r}b(0,y,z)\psi(-\tau,z)dz\right)dy-$$
$$-\int_{\mathbf{R}^r}b(0,x,y)u(t-\tau,y)dy-$$
$$-\int_0^t\left(\sum_{j=1}^r\varphi_j(\gamma_j)\Delta_x(\omega)\int_{\mathbf{R}^r}K(t-s,x-y)\times\right.$$
$$\left.\times\int_{\mathbf{R}^r}b(s,y,z)u(s-\tau,z)dzdy\right)ds+$$
$$+\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left(\int_{\mathbf{R}^r}K(t-s,x-y)\varphi_{r+1}(\gamma_{r+1})\times\right.$$
$$\left.\times\sigma(s,u(s-\tau),y)e_n(y)dy\right)d\beta_n(s) \qquad (12)$$

для $t\in[0,T]$, $x\in\mathbf{R}^r$ за початковою умовою (2);

3) існує норма

$$E\left\{\int_0^T\left\|u(t,x,\omega)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}dt\right\}<\infty. \qquad (13)$$

Лема 2 [3,4]. *Вираз (13) для випадкової функції $u(t,x,\omega)$ є нормою.*

Основний результат. Будемо надалі вважати, що ймовірнісний базис $(\Omega,F,\{F_t,t\ge t_0\},\mathbf{P})$ побудований для задачі (1), (2), яка є предметом дослідження цієї статті.

Основне твердження

Нехай для задачі (1), (2) виконано умови:

1) коефіцієнт $\sigma\equiv\sigma(t,u,x)$ є:

1а) вимірним за всіма аргументами;

1б) задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом

$$\left|\sigma(t,u,x)-\sigma(t,v,x)\right|\le L|u-v|$$

для $\forall t\in[0,T]$, $u,v\in\mathbf{R}^1$, $x\in\mathbf{R}^r$;

2) початкова функція $\psi(t,x,\omega)$ є:

2а) F_0-вимірною відносно аргумента $t\in[0,T]$;

2б) незалежною від вінерівського процесу $w(t)\equiv w(t,\omega)\in\mathbf{R}^1$ для $\forall t\in[0,T]$;

2в) незалежною від зовнішних збурень $\varphi_j(\gamma_j)$, $j=\overline{1,r+1}$;

2г) має норму

$$\sup_{-\tau\le t\le 0}\mathbf{E}\left\|\psi(t,x,\omega)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}<\infty; \qquad (14)$$

3) функція $b\equiv b(t,x,y)$ задовольняє умови:

3а)

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbf{R}^r}\sqrt{\int_{\mathbf{R}^r}b^2(t,x,y)dy}\,dx=K_1; \qquad (15)$$

3б)

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}b^2(t,x,y)dydx=K_2; \qquad (16)$$

3в) для кожної точки $x\in\mathbf{R}^r$ існують частинні похідні $\partial_{x_i}b$, $\partial_{x_ix_j}b$, де $\{i,j\}\subset\{1,2,...,r\}$;

3г) матриця Гессе D^2_xb задовольняє умову

$$\left|\nabla_xb(t,x,y)\right|+\left\|D^2_xb(t,x,y)\right\|\le Z(t,x,y), \qquad (17)$$

для $\forall t\in[0,T]\subset[0,\infty)$, $\{x,y\}\subset\mathbf{R}^r$, де функція $Z:[0,T]\times\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^r\to[0,\infty)$ задовольняє умову обмеженості інтегралу

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}Z(t,x,y)dxdy=K_3<\infty; \qquad (18)$$

4) для функції $Z(t,x,y)$ виконується аналог умови Ліпшиця за другим аргументом

$$\left|Z(t,x,z)-Z(t,x_0,z)\right|\le\zeta(t,z,x_0,\delta)|x-x_0|,$$

де для кожної точки $x_0\in\mathbf{R}^r$ існує її окіл $B_\delta(x_0)$ та невід'ємна функція $\zeta\equiv\zeta(t,z,x_0,\delta)$ для $\forall t\in[0,T]$, $|x-x_0|<\delta$; $z\in\mathbf{R}^r$, де

$$\sup_{0\le t\le T}\zeta(t,\cdot,x_0,\delta)\in L_2(\mathbf{R}^r),\quad \delta\in\mathbf{R}_+; \qquad (19)$$

5) зовнішні збурення $\varphi_j(\gamma_j)$, $j=\overline{1,r+1}$,

5а) попарно незалежні;

5б) незалежні від вінерівського процесу та від початкової функції $\psi(t,x)\equiv\psi(t,x,\omega)\in\mathbf{R}^1$;

5в) виконується умова обмеженості математичних сподівань квадратів зовнішних збурень $\mathbf{E}\{\varphi^2_{r+1}\}\le K_4<\infty$.

Тоді задача (1), (2) для НДСДРНТ має єдиний м'який розв'язок $u\equiv u(t,x,\omega)\in\mathrm{B}_{2,T}$ з імовірністю одиниця для $\forall t\in[0,T]$, якщо

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}b^2(t,x,y)dxdy\equiv K_5<\frac{1}{4}. \qquad (20)$$

Доведення основного твердження. Доведення розіб'ємо на етапи, що містяться в теоремі Банаха, яка застосована для встановлення з імовірністю одиниця єдиного розв'язку задачі (1), (2) (задачі Коші). Будемо використовувати методику, викладену в [3, 4, 7].

Розглянемо оператор $S:\mathrm{B}_{2,T}\to\mathrm{B}_{2,T}$, який діє за правилом для $t\in[0,T]$, $x,y\in\mathbf{R}^r$

$$(Su)(t)=$$
$$=\int_{\mathbf{R}^r}K(t,x-y)\left[\psi(0)+\int_{\mathbf{R}^r}b(0,y,z)\psi(-\tau,z)dz\right]dy-$$
$$-\int_{\mathbf{R}^r}b(t,y,z)u(t-\tau,y)dy-\int_0^t\sum_{j=1}^r\varphi_j(\gamma_j)\Delta_x(\omega)\times$$

$$\times \int_{\mathbf{R}^r} \left(K(t-s,x-y) \int_{\mathbf{R}^r} b(s,y,z) u(s-\tau,z)dz \right) dy \Bigg] ds +$$

$$+\int_0^t \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\lambda_n} \times$$

$$\times \left[\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s,s-y)\sigma(s,u(s-\tau),y) e_n(y) dy \right] d\beta_n(s) \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=0}^3 I_j(t) \qquad (21)$$

за початковими даними (2).

Доведемо, що цей оператор є стискаючим. По-перше, доведемо, що $Su \in \mathrm{B}_{2,T}$ для $\forall u \in \mathrm{B}_{2,T}$. Для цього потрібно оцінити норми $\|I_j(s)\|^2_{\mathrm{B}_{2,T}} \equiv \sup \mathbf{E}\|I_j(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}$, $j=0,1,2,3.$

Використаємо нерівність (7) леми 1, нерівність Коші-Шварца та умови (14), (20) і одержимо оцінку для супремума математичного сподівання $I_0(s)$ з оператора $(Su)(t)$ (див. (21)), а саме:

$$\|I_0(s)\|^2_{\mathrm{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\|I_0(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^d)} \le$$

$$\le 2\mathbf{E}\|\psi(0)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\psi^2(-\tau,z)dz = 2\mathbf{E}\|\psi(0)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+2\Big(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(0,x,z)dzdx\Big)\mathbf{E}\|\psi(-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} = C<\infty.$$

Застосуємо нерівність Коші-Шварца та припущення (14), (20) при оцінюванні супремума математичного сподівання $I_1(s)$:

$$\|I_1(s)\|^2_{\mathrm{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|I_1(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv$$

$$= \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Big\|\int_{\mathbf{R}^r} b(s,x,y)u(s-\tau)dy\Big\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \cdot \sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx.$$

Далі спрацьовує очевидна нерівність на першому кроці відрізка $[0,\tau]$ для розв'язку $u(t)$ рівняння (1) для $t\in[0,T]$:

$$\mathbf{E}\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le \sup_{-\tau\le s-\tau\le 0}\mathbf{E}\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+ \sup_{0\le s-\tau\le t-\tau}\mathbf{E}\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}. \qquad (22)$$

З урахуванням (22) попередня нерівність дасть оцінку

$$\|I_1(s)\|^2_{\mathrm{B}_{2,t}} \le$$

$$\le \left(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx\right)\Big(\sup_{-\tau\le s\le 0}\mathbf{E}\|\psi(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|u(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\Big) = C_1<\infty.$$

Аналогічно слід оцінити супремум математичного сподівання квадрату інтеграла $I_2(s)$ у просторі $\mathrm{B}_{2,T}$ з відповідними нормами

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathrm{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|I_2(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{E}\{\varphi_j(\gamma_j)\}\right)^2 \times$$

$$\le t\left(\sum_{j=1}^r\mathbf{E}\{\varphi_j(\gamma_j)\}\right)^2\cdot\varepsilon(s), \qquad (23)$$

$$\varepsilon(s)\equiv\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_0^s\left(\square_x\int_{\mathbf{R}^r}K(s-\tau,x-y)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int_{\mathbf{R}^r}b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dy\right)^2 dl\right)dx. \qquad (24)$$

Змінюючи порядок інтегрування у $\varepsilon(s)$ (див. (24)), матимемо оцінку для $I_2(s)$ у просторі $\mathrm{B}_{2,T}$:

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathrm{B}_{2,t}} \le t\left(\sum_{j=1}^r\mathbf{E}\{\varphi_j(\gamma_j)\}\right)^2\cdot\varepsilon(s)\le$$

$$\le Ct\,\mathbf{E}\left\{\int_0^t\int_{\mathbf{R}^r}\left\|D_x^2\int_{\mathbf{R}^r}b(l,x,z)u(l-\tau,z)dz\right\|^2dxdl\right\}. \qquad (25)$$

У попередній оцінці

$$\nabla_x\equiv(\partial_{x_1}...\partial_{x_r})^T;\quad D_x^2=\begin{pmatrix}\partial^2_{x_1}&...&\partial^2_{x_1x_r}\\ ...&...&...\\ \partial^2_{x_rx_1}&...&\partial^2_{x_r}\end{pmatrix}; \qquad (26)$$

$\|\cdot\|$ – відповідна матрична норма.

Далі слід використати лему 1 [3, лема 4]. Якщо умови цієї леми для

$$u(l,x)=\int_{\mathbf{R}^r}K(s-l,x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^r}b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dy,$$

$$g(l,x)\equiv\int_{\mathbf{R}^r}b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz \qquad (27)$$

виконуються, то оператор $S(\cdot)$ є стискаючим (див. (7)).

Можна довести, що з імовірністю одиниця для кожного $l\in[0,t]$

$$\int_{\mathbf{R}^r}b(l,\cdot,z)u(l-\tau,z)dz\in L_1(\mathbf{R}^r); \qquad (28)$$

$$|\nabla_x g|\in L_2(\mathbf{R}^r),\ \|D_x^2 g\|\in L_2(\mathbf{R}^r). \qquad (29)$$

Остаточно з (25) матимемо оцінку

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathrm{B}_{2,t}} \le Ct^2\sup_{0\le t_1\le t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}Z^2(t_1,x,z)dzdx\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{-\tau\le t_1\le 0}\mathbf{E}\|\psi(t_1)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le t_1\le t}\mathbf{E}\|u(t_1)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right)\le C_2<\infty. \qquad (30)$$

Отримаємо оцінку для $I_3(s)$. Надалі під $\|\cdot\|$ будемо розуміти $\|\cdot\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}$. З урахуванням нерівності Коші-Шварца, теореми Фубіні та умов (7), (14) отримуємо для норми $I_3(s)$ у просторі $\mathrm{B}_{2,t}$ оцінку

$$\|I_3(s)\|^2_{\mathrm{B}_{2,t}} = \sup_{0\le s\le t}E\|I_3(s)\|^2\le 2L^2\left(\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\right)\times$$

$$\times\left(t+\tau\sup_{-\tau\le y\le 0}\mathbf{E}\|\psi(y)\|^2+\mathbf{E}\int_0^t\|u(y)\|^2dy\right)=C_3<\infty.$$

Об'єднавши чотири вищевикладені оцінки $I_0(s)-I_3(s)$, одержимо для $u\in\mathrm{B}_{2,t}$

$$\|(\Psi u)(t)\|^2_{B_{2,t}} \equiv$$

$$\equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\left\|\sum_{j=0}^{3} I_j(t)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le 4\sum_{j=0}^{3}\| I_j(t)\|^2_{B_{2,T}} .$$

Оскільки F_t-вимірність $(\Psi u)(t)$ очевидна, робимо висновок, що Ψ задано. Доведемо, що оператор Ψ має єдину стискаючу фіксовану точку. Дійсно, слід взяти до уваги чотири вищенаведені нерівності та властивість лінійності r-вимірного інтеграла, в результаті отримаємо для різниці $I_1(s)(u)-I_1(s)(v)$ у просторі $B_{2,t}$ оцінку

$$\| I_1(s)(u)-I_1(s)(v)\|^2_{B_{2,t}} \equiv$$

$$\equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\left\|I_1(s)(u)-I_1(s)(v)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv$$

$$\equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\left\|\int_{\mathbf{R}^r} b(s,x,y)\big(u(s-\tau)-v(s-\tau)\big)dy\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le \left(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)\,dydx\right)\|u-v\|^2_{B_{2,t}} .$$

Аналогічно, одержимо оцінку для різниці $I_2(s)(u)-I_2(s)(v)$ у просторі $B_{2,t}$, а саме:

$$\| I_2(s)(u)-I_2(s)(v)\|^2_{B_{2,t}} \le$$

$$\le Ct^2 \sup_{0\le\tau\le t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,x,y)\,dydx\right)\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} .$$

Попередні міркування слід провести для оцінки різниці $I_3(s)(u)-I_3(s)(v)$ у просторі $B_{2,t}$, тоді одержимо

$$\| I_3(s)(u)-I_3(s)(v)\|^2_{B_{2,t}} \le L^2C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)t\|u-v\|^2_{B_{2,t}} .$$

Врахувавши попередні оцінки, одержимо для $\{u,v\}\subset B_{2,t}$

$$\| \Psi u-\Psi v\|^2_{B_{2,t}} \equiv$$

$$\equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\| \sum_{j=0}^{3}(I_j(s)(u)-I_j(s)(v))\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le \gamma(t)\| u-v\|^2_{B_{2,t}} ,$$

$$\gamma(t)\equiv 4\left(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)\,dydx +\right.$$

$$\left.+Ct^2\sup_{0\le\tau\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,x,y)\,dydx + L^2ct^2 + L^2c\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)t\right),$$

Висновки. Згідно з (20), $K_5<\frac{1}{4}$, тобто перший доданок у $\gamma(t)$ менший за 1. Для наступних трьох доданків можна зауважити наступне: за рахунок вибору їх сума може бути зроблена рівною $\frac{3}{16}$. Отже, $\gamma(t_1)\in(0,1)$. Це означає, що оператор Ψ, визначений у просторі Банаха B_{2,t_1}, є стискаючим. А значить, згідно з теоремою Банаха про стискаюче відображення, оператор Ψ має єдину фіксовану точку – м'який розв'язок $u\in B_{2,t_1}$ задачі (1), (2) на відрізку $[0,t_1]$. Цю процедуру повторимо скінченну кількість разів на додатних малих інтервалах $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$, …, $[t_{n-2},t_{n-1}]$, $[t_{n-1},T]$, які в сумі дають відрізок $[0,T]$, де розв'язується задача (1), (2). В результаті розв'язок отримується як об'єднання розв'язків на цих малих інтервалах. Отже, основне твердження доведено.

REFERENCES

1. Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V. Stochastic Partial Differential Equations. A Collection of Sci. Papers.– Inst. Math. AN UkrSSR, Kyiv (1981), pp. 25–59.
2. Perun, G.M. and Yasynskyy, V.K. Investigation of the Cauchy problem for stochastic partial differential equations // Ukr. Math. Journal. – 1993. – Vol.45, № 9. – P.1773–1781.
3. Stanzhitskij, A.N. and Tsukanova, A.O. Existence and Uniqueness of the Solution to the Cauchy Problem for the Stochastic Reaction-Diffusion Differential Equation of Neutral Type // Journal of Mathematical Sciences.– 2017.– Vol. 226, № 3.– P.307–334. DOI 10.1007/s10958-017-3536-8
4. Tsukanova, A.O. On existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation of reaction-diffusion type in Hilbert space // Bukovynian mathematical journal.– 2016.– Vol.4, № 3–4.– P.179–189.
5. Tessitore, G. and Zabczyk, J. Invariant Measures for Stochastic Heat Equations // Probability and Mathematical Statistics.– 1998.– 18.– P.271–287.
6. Zabczyk, J. and Da Prato, G. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems // Dynamic Systems and Applications.– Cambridge Univ. Press.– 1996.– 449 p.
7. Yasynskyy, V.K. and Yurchenko, I.V. On existence of solution of the Cauchy problem for nonlinear diffusion stochastic partial differential-difference equations of neutral type with random external perturbations // System research and information technologies.– 2017.– №2.– C.103–114. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.2.10

On existence of solution of the Cauchy problem for one class of stochastic partial differential-difference equations with random external perturbations

I. V. Yurchenko, V. S. Sikora

Abstract. The question related to the existence of the Cauchy problem solution in the class of nonlinear diffusion stochastic partial differential-difference equations of a neutral type with random external disturbances which are independent from the Wiener process is considered. Sufficient conditions are obtained for the diffusion coefficients of nonlinear stochastic differential-difference equations of a neutral type that guarantee the existence of the solution with the probability of 1. The method of the proof is based on the results of O.M. Stanzhitsky and A.O. Tsukanova on the existence and uniqueness of the Cauchy problem solution for the stochastic differential reaction-diffusion equation of a neutral type.

***Keywords*:** *stochastic partial differential equation, Cauchy problem, existence of the solution, random perturbations.*