Методичні особливості розв'язування задач з математики підвищеної складності з використанням властивостей і графіків елементарних функцій

І. В. Житарюк, В. М. Лучко, В. С. Лучко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна

Paper received 29.09.18; Accepted for publication 10.10.18.

https://doi.org/10.31174/SEND-PP2018-180VI74-17

Анотація. У роботі розглянуто питання можливостей використання нестандартних підходів і графічного калькулятора вільного доступу від desmos.com для побудови графіків функцій, які ілюструють приклади розв'язування задач різного рівня складності. Зазначено, що використання запропонованих підходів розв'язування наведених задач розширить кругозір і збагатить учнів ЗНЗ математичними ідеями, допоможе їм при поглибленому вивченні математики та підготовці до олімпіад з математики різного рівня і турнірів з математики.

Ключові слова: *графічний калькулятор, задачі різного рівня складності, нестандартні підходи, олімпіада і турнір з математики.*

Постановка проблеми. Аналізуючи результати олімпіад з математики різного рівня, турнірів юних математиків тощо можна констатувати про недостатню спроможність належно використовувати нестандартні прийоми при розв'язуванні задач підвищеної складності. Потреба у застосуванні нестандартних прийомів при розв'язуванні задач підвищеної складності з використанням графічної ілюстрації збагачує учнів ЗНЗ математичними ідеями при поглибленому вивченні математики.

На особливу увагу заслуговують можливості та переваги використання нестандартних підходів в межах програми з математики для ЗНЗ, проілюстрованих на прикладах розв'язування задач різного рівня складності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Щоб успішно навчатися розв'язувати нестандартні задачі з математики, необхідно володіти загальними вміннями та навичками бачити математичні об'єкти, порівнювати їх з іншими, мати відповідний рівень уяви, бути кмітливим. Такі вміння і якості розвиваються та доповнюються творчими підходами вчителя й учня, а допомагає цьому використання інтерактивних форм і методів навчання.

Головним засобом творчого мислення учнів є розв'язування нестандартних задач або задач стандартного вигляду, які розв'язують нестандартними методами.

Пошуки ефективних шляхів підвищення рівня процесу навчання учнів нестандартним підходам розв'язування задач і підготовки їх до олімпіад з математики різного рівня, турнірів тощо привертають увагу педагогів, учених і практиків.

Окремі нестандартні підходи розв'язування систем рівнянь розглядає О.Ю. Харік у [5, 6].

Л.В. Колеснікова, В.С. Бочарнікова у [2] вважають, що головним засобом розвитку творчого мислення учнів є розв'язування нестандартних задач або задач стандартного вигляду, які розв'язують нестандартними методами.

А.І. Козко, В.Г. Чирський у [1] на розв'язуванні конкретних прикладів демонструють нестандартні підходи щодо розв'язування задач, проте не використовують можливостей застосування сучасної комп'ютерної техніки.

Метою статті є дослідження особливостей розв'язування задач з математики підвищеної складності.

Виклад основного матеріалу дослідження. На зовнішньому незалежному оцінюванні, олімпіадах з математики різного рівня і турнірах трапляються нестандартні задачі, які потрібно виконати за обмежений час, при цьому їх учасникам доцільніше знайти найкоротший шлях розв'язання, застосувавши нетрадиційний, оригінальний метод тощо. Такі прийоми пов'язані з матеріалом, що вивчають у ЗНЗ і вимагають не задовольнятися стандартними підходами до розв'язування задач, а вдумливо підходити до пошуку їх оригінальних розв'язань.

У різних збірниках задач з математики зустрічаються задачі (рівняння), розв'язування яких стандартними способами є громіздким або неможливим. Тоді застосовують певні властивості функцій і сучасні інноваційні методи, що уможливлюють простіше та раціональне розв'язання. Проілюструємо викладене при розв'язуванні наступних задач.

Задача 1. Знайти усі значення параметра a, при яких рівняння

$$||x-a|+2x|+4x=8|x+1| \qquad (1)$$

немає коренів.

Розв'язання. Розглянемо функцію, задану формулою

$$y=8|x+1|-||x-a|+2x|-4x \qquad (2)$$

областю визначення для змінної x якої є множина усіх дійсних чисел. Очевидно, що дана область визначення для розглядуваної функції можна розбити на скінченне число інтервалів, на яких вона є лінійною. Зауважимо, що дані інтервали отримують після розкриття модулів.

Зазначимо, що коефіцієнт при першому модулі у (2) більший за модулем суми решти коефіцієнтів при x, з яким би знаком ми не розкривали решту модулів. Наприклад, якщо взяти усі коефіцієнти при x решти модулів з від'ємним знаком, то матимемо

$$8-1-2-4=1>0.$$

Очевидно, що з іншою комбінацією знаків решти коефіцієнтів при x, така сума теж буде додатною. Звідси випливає, що на усіх інтервалах до x=-1 коефіцієнти при x лінійної функції (2) є від'ємними, а на усіх інтервалах після x=-1 – додатними. Це означає, що функція, задана формулою (2), спадає при x<-1 і зростає при x>-1, а x=-1є абсцисою точки мінімуму (див. рис. 1). Отже, для того, щоб рівняння (1) не мало коренів, необхідно і досить, щоб виконувалася нерівність min$y(x)$>0, тобто $y(-1)>0$.

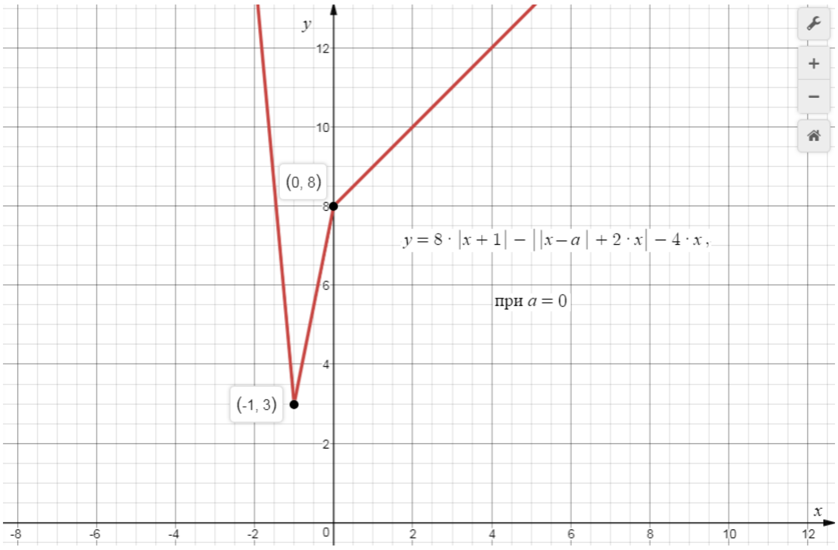

Рис. 1. Графік функції, заданої формулоюy=8|x+1|-||x-a|+2x|-4x, при a=0.

Для простоти розв'язування введемо позначення $t=|1+a|$, тоді

$y(-1)>0 \Leftrightarrow -||-1-a|-2|+4>0 \Leftrightarrow ||1+a|-2|<4 \Leftrightarrow |t-2|<4 \Leftrightarrow -4<t-2<4 \Leftrightarrow -2<t<6.$

Врахувавши заміну $t=|1+a|$, одержимо систему нерівностей

$$\begin{cases} |1+a|<6, \\ |1+a|>-2. \end{cases}$$

Друга нерівність даної системи виконується при $a\in\mathbb{R}$, а з першої отримуємо

$$-6<a+1<6,$$

звідки,

$$-7<a<5.$$

Отже, рівняння (1) не має коренів при $a\in(-7;5)$.

Відповідь. $a\in(-7;5)$.

Зауваження **1.** Дану задачу можна було б розв'язати, використовуючи поняття модуля, але наведене розв'язання, на нашу думку, є найпростішим.

2. Для побудови графіка функції, заданої формулою y=8|x+1|-||x-a|+2x|-4x, при a=0 ми використали графічний калькулятор вільного доступу від desmos.com за електронною адресою https://www.desmos.com/calculator.

Задача 2. Розв'язати нерівність

$$2\arcsin(\sin x)+\arccos(\cos x)\geq -x-3. \quad (3)$$

Розв'язання. Легко переконатися, що функції, задані формулами y=arcsin(sin$x$) і y=arccos(cos$x$), визначені на $\mathbb{R}$ і є періодичними з основним періодом 2π (див. рис. 2, 3). Зокрема є правильними співвідношення

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x-2k\pi, x\in[-\pi/2+2k\pi; \pi/2+2k\pi], k\in\mathbb{Z}, \\ \pi-x+2k\pi, x\in(\pi/2+2k\pi; 3\pi/2+2k\pi), k\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

і

$$\arcsin(\cos x) = \begin{cases} x-2k\pi, x\in[2k\pi; \pi+2k\pi], k\in\mathbb{Z}, \\ -x+2k\pi, x\in(-\pi+2k\pi; 2k\pi), k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

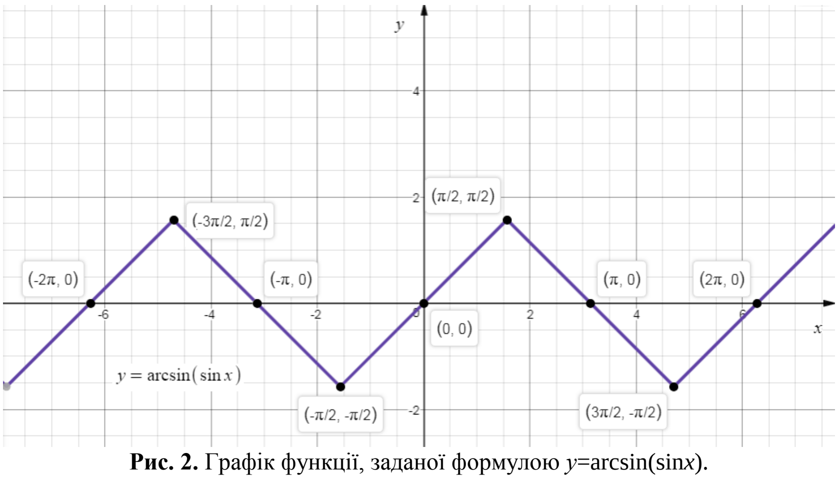

Рис. 2. Графік функції, заданої формулою y=arcsin(sin$x$).

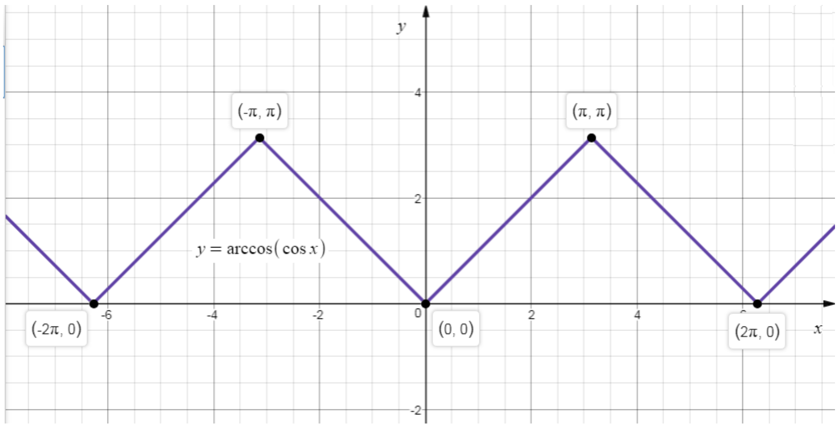

Рис. 3. Графік функції, заданої формулою y=arccos(cos$x$).

Побудуємо графік функції, заданої формулою y=2arcsin(sin$x$)+arccos(cos$x$) на відрізку [0; 2π]. Оскільки на відрізках [0; π/2], [π/2; π], [π; 3π/2], [3π/2; 2π] дана функція є лінійною, то будуємо точки (x; y(x)) з абсцисами x=0, x=π/2, x=π, x=3π/2, x=2π на координатній площині Oxy і з'єднуємо їх прямолінійними відрізками. Потім періодично продовжуємо дану функцію на ℝ і будуємо пряму, задану формулою y=-x-3 (див. рис. 4).

Розв'яжемо спочатку рівняння

2arcsin(sin$x$)+arccos(cos$x$)=-x-3, (4)

а потім, скориставшись методом інтервалів, розв'яжемо нерівність (3).

Легко переконатися, що розв'язки рівняння (4) належать інтервалам (-2π; -3π/2), (-π; -π/2) і (-π/2; 0). На цих інтервалах для функції, заданої формулою y=2arcsin(sin$x$)+arccos(cos$x$), справедливі співвідношення

$$y = 2\arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x) = \begin{cases} 3x + 6\pi, x\in[-2\pi; -3\pi/2], \\ -3x - 2\pi, x\in[-\pi; -\pi/2], \\ x, x\in[-\pi/2; 0]. \end{cases}$$

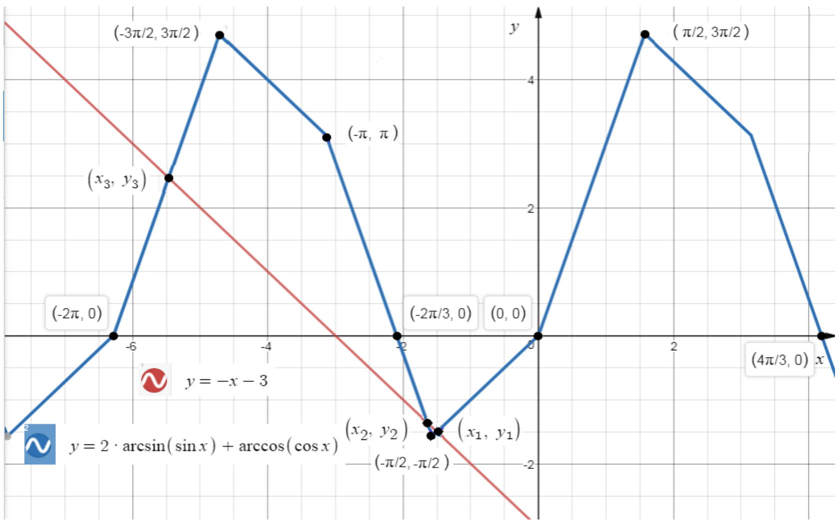

Рис. 4. Графік функції, заданої формулою y=2arcsin(sin$x$)+arccos(cos$x$).

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій, заданих формулами y=2arcsin(sin$x$)+arccos(cos$x$) і y=-x-3, в результаті отримуємо

x=-x-3⇔x_1=-3/2∈(-π/2; 0),

-3x-2π=-x-3⇔x_2=-π+3/2∈(-π; -π/2),

3x+6π=-x-3⇔x_3=-3π/2-3/4∈(-2π; -3π/2).

Застосуємо метод інтервалів для нерівності 2arcsin(sin$x$)+arccos(cos$x$)+x+3≥0 (див. рис. 5)

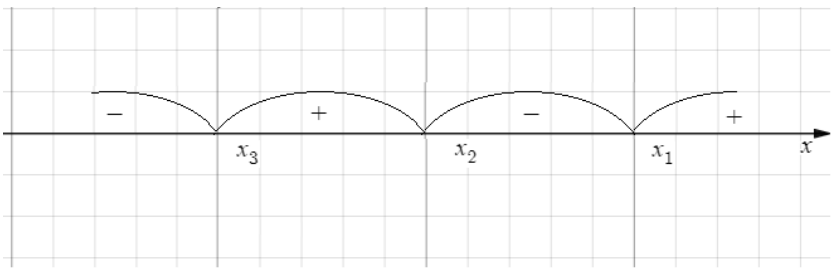

Рис. 5.

Отже, отримуємо, що нерівність (3) виконується при x∈[-3π/2-3/4; -π+3/2]U[-3/2; +∞).

Відповідь. x∈[-3π/2-3/4; -π+3/2]U[-3/2; +∞).

Зауваження. Для побудови графіків функцій, заданих формулами y=arcsin(sin$x$), y=arccos(cos$x$), y=2arcsin(sin$x$)+arccos(cos$x$) та y=-x-3 ми використали графічний калькулятор вільного доступу від desmos.com за електронною адресою https://www.desmos.com/calculator.

Висновки. Сьогодні важливо оволодіти різними можливостями правильного оформлення алгоритму розв'язування задач, який би не містив громіздких викладок, але за допомогою яких можна було б продемонструвати яскраві ефективні, а іноді й несподівані застосування теоретичного матеріалу.

За сучасних умов уже недостатньо просто навчити учнів, дати їм певну, досить значну суму знань, а необхідно навчати їх застосовувати й відповідне програмне забезпечення.

Застосування сучасних графічних калькуляторів при розв'язуванні задач з математики різної складності перетворює математику з об'єкту вивчення на засіб отримання нових знань.

Вважаємо, що наведені приклади розв'язаних задач допоможуть учителям при підготовці до занять, а учням розширять кругозір, збагатять математичними ідеями, допоможуть при поглибленому вивченні математики, підготовці до олімпіад і конкурсів з математики різного рівня та вироблять потребу у користуванні сучасними графічними калькуляторами, які є у вільному електронному доступі при розв'язуванні задач як з алгебри, так і з геометрії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Козко А.И. Задачи с параметрами и другие сложные задачи / А.И. Козко, В.Г. Чирский. – М. : МЦНМО, 2007. – 296 с.
2. Колеснікова Л.В. Нестандартні задачі – шлях до розвитку творчого мислення учнів / Л.В. Колеснікова, В.С. Бочарнікова // Математика в школах України. – № 8-9 (200-201). – 2008. – С. 12-15.
3. Мерзляк А.Г. Неожиданный шаг или сто тридцать красивых задач / А.Г. Мерзляк, В.Б. Мерзляк, М.С. Якир. – К. : Агрофирма «Александрия», 1993. – 59 с.
4. Суконник Я.Н. Математические задачи повышенной трудности : Пособие для учителей. – К. : Радянська школа, 1985. – 176 с.
5. Харік О.Ю. Про деякі нестандартні методи розв'язування систем рівнянь // Математика в школах України. – № 3 (195). – 2008. – С. 24-25.
6. Харік О.Ю. Про деякі нестандартні методи розв'язування систем рівнянь // Математика в школах України. – № 4 (196). – 2008. – С. 18-21.

REFERENCES

1. Kozko A.I. Problems with parameters and other complex problems / A.I. Kozko, V.G. Chirsky – M. : MCNMO, 2007. – 296 p.
2. Kolesnikova L.V. Non-standard tasks – the way to the development of students creative thinking / L.V. Kolesnikova, V.C. Bocharnikova // Mathematics in schools of Ukraine. – № 8-9 (200-201). – 2008. – P. 12-15.
3. Merzlyak AG An unexpected step or one hundred and thirty beautiful tasks / Merzlyak, V.B. Merzlyak, M.S. Yakir. – K. : Agrofirma "Alexandria", 1993. – 59 p.
4. Sukonnik Ya.N. Mathematical problems of increased difficulty: A manual for teachers. – K. : Radianska School, 1985. – 176 p.
5. Harik O.Yu. About some non-standard methods of solving equations systems // Mathematics in schools of Ukraine. – № 3 (195). – 2008. – P. 24-25.
6. Harik O.Yu. About some non-standard methods of solving equations systems // Mathematics in schools of Ukraine. – № 4 (196). – 2008. – P. 18-21.

Methodological peculiarities of problem solving in mathematics of increased complexity using properties and graphs of elementary functions

I. V. Zhitaryuk, V. N. Luchko, V. S. Luchko

Abstract. The paper discusses the possibilities of using non-standard approaches and the graphical calculator of free access from desmos.com for constructing graphs of functions that illustrate examples of solving problems of different levels of complexity. It is noted that the use of the proposed approaches to solving these problems will broaden the horizons and enrich the students with mathematical ideas, will help them with in-depth study of mathematics and preparation for Olympiads in mathematics of various levels and tournaments in mathematics.

Keywords: *graphic calculator, tasks of different levels of complexity, non-standard approaches, Olympiad and a tournament on mathematics.*