Методичні особливості розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами з використанням властивостей і графіків елементарних функцій

І. В. Житарюк, В. М. Лучко, В. С. Лучко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна

Paper received 22.04.19; Accepted for publication 07.05.19.

https://doi.org/10.31174/SEND-PP2019-198VII80-13

Анотація. У роботі розглянуто питання можливостей використання нестандартних підходів і графічного калькулятора вільного доступу від desmos.com для побудови графіків функцій, які використовуються при розв'язуванні ірраціональних рівнянь з параметрами з ітераціями. Зазначено, що використання запропонованого підходу розв'язування наведених задач розширить кругозір і збагатить учнів ЗНЗ математичними ідеями, допоможе їм при поглибленому вивченні математики та підготовці до олімпіад і турнірів з математики.

Ключові слова: *графічний калькулятор, ірраціональні рівняння з параметром з ітераціями, нестандартні підходи, олімпіада і турнір з математики.*

Постановка проблеми. Успішна самореалізація особистості за умов сьогодення певною мірою забезпечується зокрема й базовими знаннями з математики. Зважаючи на те, що переважна більшість майбутніх професій тісно пов'язані з останньою, постає потреба у повнішому опануванні поняттями, теоріями з використанням інноваційних технологій у навчанні та організації дослідницької й проектної діяльності у галузі математики, які сприяють формуванню високого рівня практичних компетентностей суб'єктів навчання, орієнтованих на розвиток особистості останніх. Крім того, результати олімпіад з математики різного рівня, турнірів юних математиків тощо дають підстави констатувати про недостатню спроможність учнів загальноосвітніх навчальних закладів належно використовувати нестандартні підходи при розв'язуванні, наприклад, ірраціональних рівнянь з параметрами. Потреба у застосуванні нестандартних прийомів при розв'язуванні ірраціональних рівнянь, особливо з параметрами, із використанням графічної ілюстрації збагачує учнів ЗНЗ математичними ідеями при поглибленому вивченні математики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Щоб успішно навчатися розв'язувати ірраціональні рівняння з параметрами, необхідно володіти загальними вміннями та навичками бачити математичні об'єкти, порівнювати їх з іншими, мати відповідний рівень уяви, бути кмітливим. Такі вміння і якості розвиваються та доповнюються творчими підходами вчителя й учня, а допомагає цьому використання інноваційні технології навчання.

Зауважимо, що пошуки ефективних шляхів підвищення рівня процесу навчання учнів нетрадиційним підходам розв'язування задач і підготовки їх до олімпіад з математики різного рівня, турнірів тощо привертають увагу педагогів, учених і практиків.

А.І. Козко, В.Г. Чирський у [2] на розв'язуванні ірраціональних рівнянь з параметрами, а Д.Т. Белешко у [1] на розв'язуванні ірраціональних рівнянь демонструють нестандартні підходи щодо їх розв'язування, проте не використовують можливостей застосування сучасних інноваційних технологій.

Метою статті є дослідження особливостей розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами.

Виклад основного матеріалу дослідження. На зовнішньому незалежному оцінюванні, олімпіадах з математики різного рівня і турнірах трапляються ірраціональні рівняння з параметрами, які потрібно виконати за обмежений час, при цьому їх учасникам доцільніше знайти найкоротший шлях розв'язання, застосувавши нетрадиційний, оригінальний метод тощо. Такі прийоми пов'язані з матеріалом, що вивчають у ЗНЗ і вимагають вдумливого підходу щодо пошуку їх оригінальних розв'язань.

У різних збірниках задач з математики наявні ірраціональні рівняння з параметрами, розв'язування яких стандартними способами є громіздким або неможливим, а застосування нестандартних підходів та властивостей функцій і сучасних інноваційних методів, сприяє простішому та раціональному їх розв'язанню.

Розглянемо теоретичне обґрунтування розв'язування рівнянь з параметрами, зокрема й ірраціональних, з ітераціями.

Нехай задано рівняння

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(x)))=x \qquad (1)$$

Теорема 1. Корені рівняння

$$f(x)=x \qquad (2)$$

є коренями рівняння (1).

Доведення. Нехай x_0 є коренем рівняння (2), тобто є правильною рівність $f(x_0)=x_0$. Покажемо, що x_0 є коренем рівняння (1).

Справді,

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(x_0))=\underbrace{f(f(\ldots f}_{n-1}(f(x_0)))=\underbrace{f(f(\ldots f}_{n-1}(x_0)))=\ldots=f(x_0)=x_0,$$

тобто

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(x_0))=x_0,$$

а це означає, що x_0 є коренем рівняння (1).

Теорему доведено.

Зауваження. Взагалі кажучи, рівняння (1) і (2) не є еквівалентними.

Теорема 2. Якщо функція f є строго монотонною (зростаючою чи спадною), то рівняння (1) і (2) є рівносильними.

Доведення. Для доведення теореми достатньо довести, що коли x_0 не є коренем рівняння (1), то x_0 не є коренем і рівняння (2).

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функція f є зростаючою. Тоді, використовуючи означення зростаючої функції, легко переконатися, що й функції $f(f)$, $f(f(f))$, $f(f(f(f)))$, … теж є зростаючими.

Оскільки x_0 не є коренем рівняння (1), то або $f(x_0)>x_0$ чи $f(x_0)<x_0$.

Розглянемо випадок $f(x_0)>x_0$, тоді

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{n}(x_0))=\underbrace{f(f(\dots f}_{n-1}(f(x_0)))>\underbrace{f(f(\dots f}_{n-1}(x_0)))=\underbrace{f(f(\dots f}_{n-2}(x_0)))>\dots>f(x_0)=x_0,$$

тобто

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{n}(x_0))>x_0.$$

Випадок $f(x_0)<x_0$ розглядається аналогічно випадку $f(x_0)>x_0$.

Отже, якщо функція f є строго монотонна (зростаюча чи спадною), то рівняння (1) і (2) є рівносильними.

Теорему доведено.

Проілюструємо викладене при розв'язуванні наступних задач.

Задача 1. Знайти усі значення параметра a, при яких рівняння

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x \qquad (3)$$

має розв'язки.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $\sin x\geq 0$, а з іншого боку значення синуса – не більші 1. Введемо у розгляд функцію, задану формулою $f(t)=\sqrt{a+t}$, де $t=\sin x$, причому $0\le t\le 1$, тоді задане рівняння можна подати у вигляді

$$f(f(t))=t.$$

Оскільки $t\in[0;1]$, то для кожного фіксованого t з цього проміжку, рівняння $t=\sin x$ має безліч розв'язків, а функція f, задана формулою $f(t)=\sqrt{a+t}$, є строго монотонна (зростаюча) (див. рис. 1), то рівняння $f(f(t)=t$ рівносильне рівнянню $f(t)=t$.

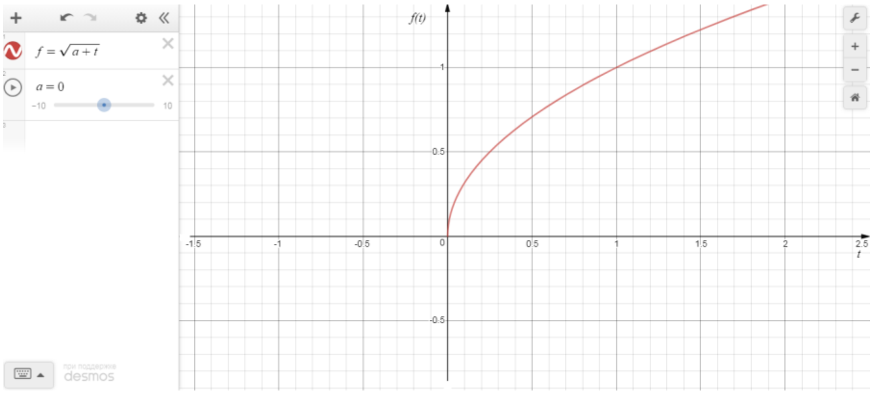

Рис. 1. Графік функції, заданої формулою $f(t)=\sqrt{a+t}$, при a=0.

Отже, маємо

$$\begin{cases} f(t)=t,\\ 0\le t\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a+t}=t,\\ 0\le t\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+t=t^2,\\ 0\le t\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-t-a=0,\\ 0\le t\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=a+\frac{1}{4},\\ 0\le t\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}},\\ a\geq-\frac{1}{4},\\ 0\le t_{1,2}\le 1.\end{cases}$$

Легко переконатися, що $t_{1,2}$ належать проміжку $[0;1]$ при $a\in\left[-\frac{1}{4};0\right]$.

Таким чином, при $a\in\left[-\frac{1}{4};0\right]$ існує принаймні одне значення t з проміжку $[0;1]$, що $f(f(t)=t$, а для кожного такого t існує принаймні одне значення x, що $t=\sin x$.

Відповідь. $a\in\left[-\frac{1}{4};0\right]$.

Зауваження. **1.** Дану задачу можна було б розв'язати, не користуючись даним підходом, але на нашу думку, наведене розв'язання є найпростішим.

2. Для побудови графіка функції, заданої формулою $f(t)=\sqrt{a+t}$, при a=0 ми використали графічний калькулятор вільного доступу від desmos.com за електронною адресою https://www.desmos.com/calculator.

Задача 2. Знайти усі значення параметра a, при яких рівняння

$$\sqrt{5a+\sqrt{5a-\frac{x^2}{4}-x}+\frac{x^2}{4}+x}=0 \qquad (4)$$

має розв'язки.

Розв'язання. Задане рівняння можна подати у вигляді

$$\sqrt{5a+\sqrt{5a-\frac{x^2}{4}-x}}=-\frac{x^2}{4}-x \qquad (5)$$

З умови задачі випливає, що $-\frac{x^2}{4}-x\geq 0$. Введемо у розгляд функцію, задану формулою $f(t)=\sqrt{5a+t}$, де $t=-\frac{x^2}{4}-x$, тоді задане рівняння можна подати у вигляді

$$f(f(t))=t.$$

Легко переконатися, що графіком функції, заданої формулою $t=-\frac{x^2}{4}-x$ є парабола з максимумом рівним 1 при x=-2. З врахуванням попереднього і того, що $-\frac{x^2}{4}-x\geq 0$, випливає що $t\in[0;1]$. Оскільки $t\in[0;1]$, то для кожного фіксованого t з цього проміжку, рівняння $t=-\frac{x^2}{4}-x$ має принаймні один розв'язок, а функція f задана формулою $f(t)=\sqrt{5a+t}$, є строго монотонна (зростаюча) (див. рис. 2), то рівняння $f(f(t)=t$ рівносильне рівнянню $f(t)=t$.

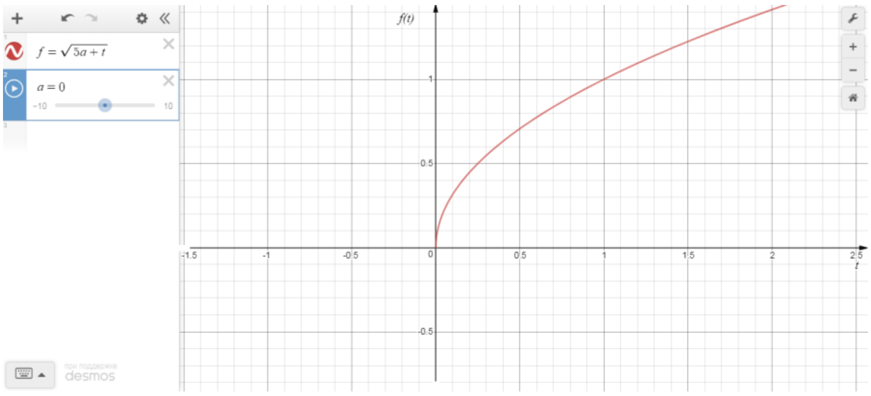

Рис. 2. Графік функції, заданої формулою $f(t) = \sqrt{5a+t}$, при a=0.

Отже, маємо

$$\begin{cases} f(t) = t, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5a+t} = t, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + t = t^2, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t^2 - t - 5a = 0, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 5a + \frac{1}{4}, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{5a + \frac{1}{4}}, \\ a \ge -\frac{1}{20}, \\ 0 \le t_{1,2} \le 1. \end{cases}$$

Легко переконатися, що $t_{1,2}$ належать проміжку [0; 1] при $a \in \left[-\frac{1}{20}; 0\right]$.

Таким чином, при $a \in \left[-\frac{1}{20}; 0\right]$ існує принаймні одне значення t з проміжку [0; 1], що $f(f(t)=t$, а для кожного такого t існує принаймні одне значення x, що $t = -\frac{x^2}{4} - x$.

Відповідь. $a \in \left[-\frac{1}{20}; 0\right]$.

Зауваження. **1.** Дану задачу можна було б розв'язати, не користуючись даним підходом, але на нашу думку, наведене розв'язання є найпростішим.

2. Для побудови графіка функції, заданої формулою $f(t) = \sqrt{5a+t}$, при a=0 ми використали графічний калькулятор вільного доступу від desmos.com за електронною адресою https://www.desmos.com/calculator.

Висновки. Сьогодні важливо оволодіти різними можливостями правильного оформлення алгоритму розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами з ітераціями, який би не містив громіздких викладок, але за допомогою останніх можна було б продемонструвати яскраві ефективні, а іноді й несподівані застосування теоретичного матеріалу, у нашому випадку стосовно розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами.

Вважаємо, що наведений теоретичний матеріал і приклади розв'язаних задач збагатить математичними ідеями, допоможуть при поглибленому вивченні математики, підготовці до олімпіад і конкурсів з математики різного рівня та вироблять потребу у користуванні сучасними графічними калькуляторами, які є у вільному електронному доступі, при розв'язуванні задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Белешко Д.Т. Розв'язуємо ірраціональні рівняння та нерівності: Навчальний посібник. Тернопіль : Навчальна книга. Богдан, 2012. 80 с.
2. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметрами и другие сложные задачи. М. : МЦНМО, 2007. 296 с.
3. Мерзляк А.Г., Мерзляк В.Б., Якир М.С. Неожиданный шаг или сто тридцать красивых задач. К. : Агрофирма «Александрия», 1993. 59 с.
4. Суконник Я.Н. Математические задачи повышенной трудности : Пособие для учителей. К. : Радянська школа, 1985. 176 с.

REFERENCES

1. Beleshko D.T. Solve irrational equations and inequalities: A manual. Ternopil : Educational book - Bogdan, 2012. 80 p.
2. Kozko A.I., Chirsky V.G. Problems with parameters and other complex problems. M. : MCNMO, 2007. 296 p.
3. Merzlyak A.G., Merzlyak V.B., Yakir M.S. An unexpected step or one hundred and thirty beautiful tasks. K. : Agrofirma "Alexandria", 1993. 59 p.
4. Sukonnik Ya.N. Mathematical problems of increased difficulty: A manual for teachers. K. : Radianska School, 1985. 176 p.

Methodical features of solving irrational equations with parameters using properties and graphs of elementary functions

I. V. Zhitaryuk, V. N. Luchko, V. S. Luchko

Abstract. The paper discusses the possibilities of using non-standard approaches and the graphical calculator of free access from desmos.com for constructing graphs of functions that are used in solving irrational equations with iterative parameters. It is noted that the use of the proposed approach to solving these problems will broaden the horizons and enrich the students with mathematical ideas, will help them with in-depth study of mathematics and preparation for Olympiads and tournaments in mathematics.

Keywords: *graphic calculator, irrational equations with iterative parameter, non-standard approaches, Olympiad and tournament on mathematics.*