

## Математичне моделювання і задачі-моделі в контексті використання сучасних інноваційних комп'ютерних технологій

І. В. Житарюк, В. М. Лучко, С. Г. Блажевський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича м. Чернівці, Україна

Paper received 22.08.19; Accepted for publication 09.09.19.

<https://doi.org/10.31174/SEND-PP2019-203VII83-13>

**Анотація.** У статті розглянуто математичну модель задачі-моделі "залізничне місце точок" та її графічне розв'язання за допомогою відкритого програмного середовища Lazarus для розробки програми побудови графіка шуканої лінії за знайденою математичною моделлю мовою Object Pascal. Зазначено, що наведене розв'язання задачі-моделі розширить кругозір і збагатить учнів ЗНЗ та студентів ЗВО математичними ідеями щодо міждисциплінарних зв'язків математики й інформатики, допоможе їм при поглибленому вивченні зазначених предметів і підготовці до олімпіад і турнірів з математики.

**Ключові слова:** задачі-моделі, інноваційні комп'ютерні технології, математичне моделювання, програмне середовище.

**Постановка проблеми.** У сучасній науці відбувається чітке усвідомлення модельного характеру знань про оточуюче середовище, тобто нове знання певної галузі науки пов'язане з дослідженням не власне реальних процесів довкілля, а їхніх моделей, насамперед, математичних. В результаті цього, в межах освітньої парадигми виникає потреба використання методології та елементів математичного моделювання із застосуванням сучасних інноваційних комп'ютерних технологій (ІКТ) в різних галузях науки й природознавства. Крім того, на турнірах з математики часто пропонують розв'язувати задачі-моделі, які в реальному житті можуть і не існувати, але створення їх математичних моделей і дослідження останніх вимагає певної математичної підготовки і належного володіння сучасними ІКТ.

Аналіз діючих навчальних програм з математичних дисциплін як ЗНЗ, так і ЗВО, методичної літератури дає підстави зробити висновок про те, що проблема послідовного і систематичного формування в суб'єктів навчання умінь математичного моделювання з використанням сучасних ІКТ в процесі розв'язування задач довкілля є недостатньо розробленою.

Необхідність формування в суб'єктів навчання умінь математичного моделювання в процесі розв'язування реальних задач із застосуванням сучасних ІКТ, з одного боку, і недостатній рівень висвітлення цієї проблеми в методичній літературі – з іншого, визначають актуальність запропонованої статті.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Уміння математичного моделювання формується в суб'єктів навчання у процесі розв'язування задач з усіх предметів природничо-математичного циклу. Модельний підхід до розв'язування задач довкілля полягає в тому, що їх умови розглядаються як вербальний опис певних процесів. За результатами аналізу цих умов визначаються особливості цих процесів, їх параметри, накладаються певні обмеження на параметри, а потім обирається адекватний математичний апарат і створюється їх математичні моделі. Таким задачам присвячена низка як вітчизняних, так і закордонних публікацій.

Зокрема, В. Волошена в [1] розглядає цикл фізичних задач, основною метою яких є вивчення учнями відмінних особливостей (властивостей) моделей, формування в них окремих компонентів (складових)

загальнонавчального умінь математичного моделювання.

В.А. Кушнір у [2] описав загальний підхід щодо створення й розв'язування математичної моделі задачі конструювання певної функції із заданими властивостями з використанням ІКТ.

О.А. Самарський, О.П. Михайлов у [3] наводять методи і приклади побудови та аналіз математичних моделей для різних задач механіки, фізики, біології, економіки, соціології.

**Метою статті** є дослідження особливостей розв'язування задачі-моделі за допомогою математичного моделювання з використанням сучасних інноваційних комп'ютерних технологій.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** За допомогою модельних експериментів можна вивчати такі процеси, для яких реальні в принципі неможливі. Отримана при цьому математична модель є формальною схемою реального процесу, а аналіз результатів за допомогою сучасних інноваційних комп'ютерних технологій встановлює вплив введених параметрів на досліджуваний процес тощо.

Проілюструємо сказане на розв'язуванні задачі № 20 (Залізничне місце точок), запропонованої на XVII турнірі юних математиків імені Я.Й. Ядренка у 2014 році.

**Задача.** Із залізничної станції – точки  $S$  – виходять дві колії-промені, вздовж яких зі сталими швидкостями рухаються два поїзди-відрізки; промені не лежать на одній прямій. По одній з колій перший поїзд рухається у напрямку до станції  $S$ , а по іншій – другий поїзд віддаляється від цієї станції. Розглядатимемо рух поїздів-відрізків лише впродовж такого проміжку часу, протягом якого вони не виїжджають за межі колій-променів. У кожен фіксований момент часу розглядатимемо опуклі чотирикутники, вершинами яких є кінці поїздів-відрізків. З'ясуйте, за якої необхідної та достатньої умови всі точки перетину діагоналей таких чотирикутників лежатимуть на деякій параболі.

**Розв'язання.** У нашому випадку розглядається поступальний рух поїздів-відрізків певної довжини зі сталими швидкостями по заданих коліях-променях, які не лежать на одній прямій.

Виберемо декартову систему координат на площині як це зображено на рис. 1. Нехай кут між коліями-променями  $SA$  і  $SD$  дорівнює  $\alpha$  ( $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ) \cup (180^\circ;$

360°)), швидкість першого поїзда-відрезка АВ, який рухається до станції S, довжини  $b$  км є сталою і дорівнює  $u$  км/год., а швидкість другого поїзда-відрезка CD, який рухається від станції S, довжини  $d$  км є сталою і дорівнює  $v$  км/год. Будемо вважати, що у початковий момент часу кінець першого поїзда-відрезка (точка A) знаходиться на відстані  $p$  км від станції S.

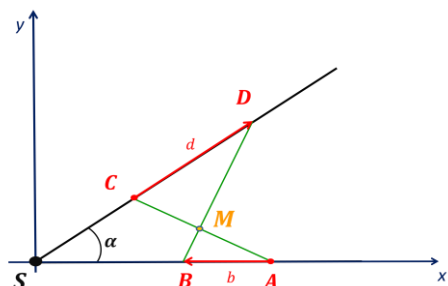


Рис. 1.

Після того, як визначено математичні величини, що описують процес руху поїздів-відрезків, переходимо до пошуку математичних співвідношень, які зв'язують ці математичні величини вимогою задачі. Зазначимо, що математичні співвідношення реалізуються на основі зроблених припущень, яким підпорядковується цей процес.

У довільний момент часу  $t$  год. поїзди-відрезки розташовані так, як це зображено на рис. 1. Тоді чотирикутник ABCD є опуклим і координати його вершин будуть такими

$$\begin{aligned} A(p-ut, 0), \\ B(p-ut-b, 0), \\ C(vt \cos \alpha, vt \sin \alpha), \\ D((vt+d) \cos \alpha, (vt+d) \sin \alpha). \end{aligned}$$

Запишемо рівняння прямих AC і BD, як прямих, що проходять через дві задані точки, координати яких відомі. В результаті одержимо

$$\begin{aligned} AC: \frac{x - vt \cos \alpha}{p - ut - vt \cos \alpha} &= \frac{y - vt \sin \alpha}{-vt \sin \alpha}, \\ BD: \frac{x - (vt + d) \cos \alpha}{p - ut - b - (vt + d) \cos \alpha} &= \frac{y - (vt + d) \sin \alpha}{-(vt + d) \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Будемо вважати, що у довільний момент часу  $t$  точка M має координати  $x$  та  $y$ . Знайдемо їх, розв'язавши систему

$$\begin{cases} \frac{x - vt \cos \alpha}{p - ut - vt \cos \alpha} = \frac{y - vt \sin \alpha}{-vt \sin \alpha}, \\ \frac{x - (vt + d) \cos \alpha}{p - ut - b - (vt + d) \cos \alpha} = \frac{y - (vt + d) \sin \alpha}{-(vt + d) \sin \alpha}. \end{cases}$$

З останньої системи отримуємо, що

$$x = \frac{btv(tv + d) \cos \alpha + d(p - ut)(p - ut - b)}{t(vb - ud) + dp}, \quad (1)$$

$$y = \frac{btv(tv + d) \sin \alpha}{t(vb - ud) + dp}. \quad (2)$$

Рівності (1), (2) визначають певну лінію, задану параметричними рівняннями, якій належать точки M(x; y) у довільний момент часу  $t$ . З'ясуємо за яких умов вона є параболою.

З (1) і (2) отримуємо

$$xbv^2 \sin \alpha - y(bv^2 \cos \alpha + du^2) = \frac{ut(-2pv + bv - du) + pv(p - b)}{t(vb - ud) + dp}. \quad (3)$$

Зуважимо, у чому легко переконалися, що при  $vb - ud \neq 0$  лінія, задана рівняннями (1) і (2), при  $t \rightarrow \infty$  має

асимптоту і не є параболою, оскільки параболою асимптот немає.

Якщо ж  $vb - ud = 0$ , тобто  $vb = ud$  чи  $\frac{u}{v} = \frac{b}{d}$ , то рівність (3) набуває вигляду

$$xbv^2 \sin \alpha - y(bv^2 \cos \alpha + du^2) = \frac{-2uvt + vp - vb}{d}. \quad (4)$$

Зазначимо, що рівність (4) можна подати у вигляді

$$tv = c_1 x + c_2 y + c_3, \quad (5)$$

де  $c_1, c_2, c_3$  – деякі константи, що залежать лише від  $p, b, d, u, v, \alpha$ .

Підставивши (5) у (2) при  $vb - ud = 0$ , отримаємо рівняння лінії, якій належать точки M. Після введення заміни змінних (невироджене лінійне перетворення)

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= c_1 x + c_2 y + c_3 + d/2, \\ \tilde{y} &= y, \end{aligned}$$

рівняння шуканої лінії матиме вигляд

$$\tilde{y} = \frac{b \sin \alpha}{dp} \left( \tilde{x}^2 - \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right). \quad (6)$$

Отже, (6) є рівнянням параболі.

Зуважимо, що умова  $vb = ud$  або  $\frac{u}{v} = \frac{b}{d}$  (пропорційність швидкостей поїздів-відрезків їх довжинам) є необхідною і достатньою умовою того, щоб точки M належали параболі.

Для побудови графіка лінії, заданої рівняннями (1) і (2) за умови, що швидкості поїздів-відрезків пропорційні їх довжинам, ми використали відкрите програмне середовище Lazarus для розробки програми побудови графіка шуканої лінії за знайденою математичною моделлю на мові Object Pascal.

Скориставшись даною програмою, ми на рис. 2-4, за відповідних заданих значень параметрів, визначених задачею ( $\alpha \in \{45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$ ,  $u = 60$  км/год.,  $v = 80$  км/год.,  $p = 500$  км,  $b = 0,12$  км,  $d = 0,16$  км), навели частини графіків парабол, отриманих при цих значеннях параметрів.

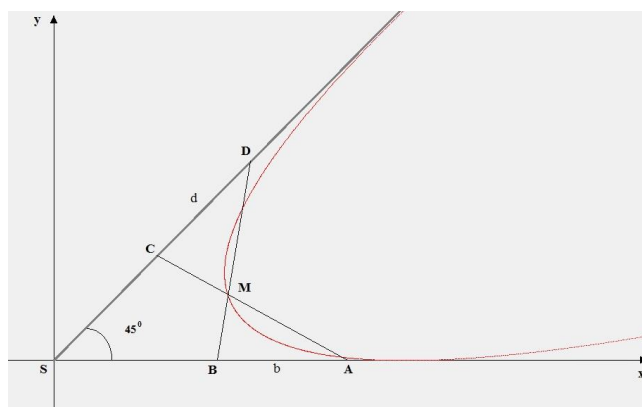


Рис. 2.

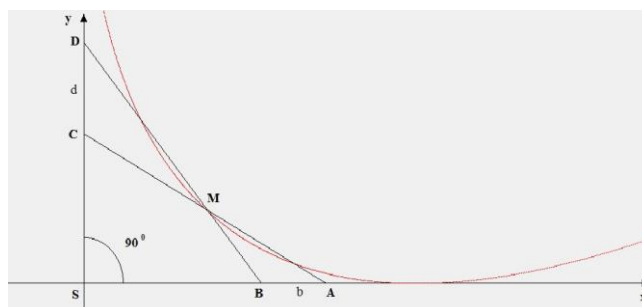


Рис. 3.

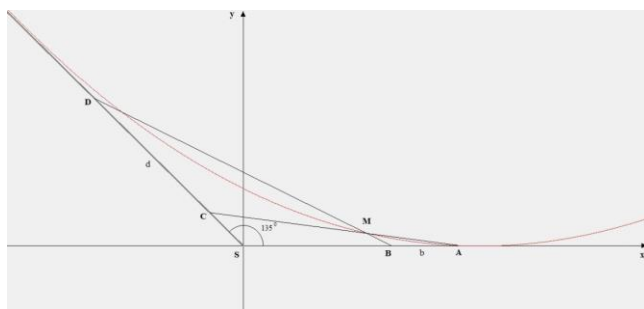


Рис. 4.

Варто зазначити, що наведене розв'язання задачі-моделі розширить кругозір і збагатить учнів ЗНЗ та

студентів ЗВО математичними ідеями щодо міждисциплінарних зв'язків математики та інформатики, допоможе їм при поглибленому вивченні математики й інформатики та підготовці до олімпіад і турнірів з математики.

**Висновки.** Формування вмінь математичного моделювання з використанням сучасних інноваційних комп'ютерних технологій при розв'язуванні реальних задач доквілля і задач-моделей сприяє міжпредметному узагальненню набутих суб'єктами навчання знань і вмінь, формуванню в них уявлень про універсальний характер математичних методів дослідження.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Волошена В. Математичне моделювання в процесі розв'язування фізичних задач. *Математика в рідній школі*. № 6. 2015. С. 30-32.
2. Кушнір В.А. Конструювання навчальних завдань з математики: математичні моделі, алгоритми, програми. *Інформаційні технології в освіті*. 2014. Вип. 18. С. 30-41.
3. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Физико-математическая литература, 2001. 320 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 343 с.

#### REFERENCES

1. Voloshena V. Matematychnе modeliuvannia v protsesi rozv'iazuvannia fizychnykh zadach. *Matematyka v ridnii shkoli*. № 6. 2015. S. 30-32.
2. Kushnir V.A. Konstruiuvannia navchalnykh zavdan z matematyky: matematychni modeli, alhorytny, prohramy. *Informatsiini tekhnologii v osviti*. 2014. Vyp. 18. S. 30-41.
3. Samarskij A.A., Mikhajlov A.P. Matematicheskoe modelirovanie. Idei. Metody. Primery. M.: Fiziko-matematicheskaya literatura, 2001. 320 s.
4. Sovetov B.Ya., Yakovlev S.A. Modelirovanie sistem. Uchebnik dlya vuzov. M.: Vysshaya shkola, 2001. 343 s.

#### Mathematical modeling and model problems in the context of the use of modern innovative computer technologies

I. V. Zhitaryuk, V. N. Luchko, S. G. Blazhevskiy

The article deals with the mathematical model of the problem railway model of the point of point and its graphical solution using the open source Lazarus software to develop a program for plotting the desired line using the mathematical model found in Object Pascal. It is stated that the given solution of the model problem will broaden the outlook and enrich the students of ZNZ and ZVO students with mathematical ideas on the interdisciplinary communication of mathematics and informatics, will help them in the in-depth study of these subjects and preparation for the Olympiad.

**Keywords:** model problems, innovative computer technologies, mathematical modeling, software environment.