

## Математическое описание процесса измельчения и агломерации на основе вероятностной модели процесса

Н. Д. Орлова

Национальный университет “Одесская морская академия”, г.Одесса, Украина  
Corresponding author. E-mail: natorl2969@gmail.com

Paper received 25.06.18; Revised 29.06.18; Accepted for publication 30.06.18.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2018-171VI19-10>

**Аннотация.** Рассмотрен вероятностный подход к изучению процессов измельчения и агломерации в вибрационных мельницах. Качественный анализ процесса проведен с позиций неоднородных Марковских процессов непрерывных по времени и дискретных в пространстве. Исследование процесса, связано с функцией плотности вероятности разрушения и агломерации частиц. Предполагается, что обработка материалов не сопровождается химической реакцией и не учитываются физико-механические свойства материалов. В основном этот метод связан с оценкой экспериментальных данных и поиском оптимальных параметров обработки материалов.

**Ключевые слова:** вибрационное измельчение, агломерация, оптимальные параметры.

**Введение.** Из статистического анализа измельчения материалов в различных аппаратах, процесс измельчения можно рассматривать как случайный Марковский [4]. Такой подход впервые был использован в работах [1,2], где на основе математического аппарата случайных процессов и постулирования макрокинетических актов в соответствии с законами измельчения Кирпичева—Кикка, Риттингера, Бонда получено математическое описание процесса. Использование математического аппарата случайных Марковских процессов позволяет учесть и агломерацию (агрегирование измельчаемых частиц).

Аналогично [5] разделим процессы, протекающие при измельчении материалов на два типа - основные и побочные. К основным процессам относится – деформация и разрушение измельчаемых частиц; к побочным – агрегирование частиц. Отметим, что предложенное разделение условно так при вибрационном плакировании (порошка никеля порошком алюминия) [7] основной процесс агрегирование частиц, а побочный - измельчение. Анализ теоретических исследований [9] и экспериментальных данных [8] позволяет разбить сам процесс агрегирования на два этапа: этап неустойчивого образования агрегатов (образование физического контакта и активация контактных поверхностей) и этап устойчивого образования агрегатов (объемное взаимодействие). Если первый этапа характеризуется образованием точечных контактов между измельчаемыми частицами, которые легко и быстро разрушаются, то второй этап характеризуется молекулярно-плотным агрегированием тонкодиспергированных частиц материала. С увеличением степени дисперсности частиц измельчаемого материала возрастает доля энергии расходуемой на пластическую деформацию, в результате точечные контакты переходят в контакты по поверхности и прочность агрегатов возрастает. По своей сути процесс агрегирования снижает эффективность работы вибрационных мельниц при измельчении материала, но позволяет осуществлять процесс вибрационного плакирования.

**Математическая модель.** Представим измельчение материала  $A$  схемой

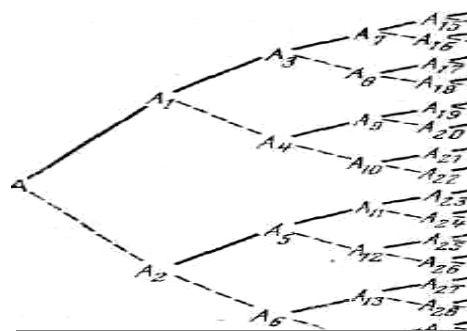


Рис.1

Аналогично [2] считаем, что процесс измельчения соответствует неоднородному Марковскому процессу рождения. В вибрационных агрегатах в данный момент времени измельчению подвержена не вся совокупность частиц, а только часть, на схеме сплошной линией отмечены частицы, подверженные измельчению, пунктиром не измельчающиеся в данный момент времени. Обозначив через  $X(t)$  случайную величину характеризующую число частиц (в совокупности) в момент  $t$  времени. Тогда  $P_x(t)=P(X(t)=x)$  вероятность того, что случайная величина  $X(t)$  примет целочисленное значение  $x$ .

При вибрационном измельчении относительная доля измельчающихся частиц, которые находятся в зоне воздействия рабочих органов, уменьшается и при предельном значении времени измельчения  $t=\tau$  становится равной нулю. Данный факт [2,4] можно охарактеризовать линейной функцией вида  $f(t)=1-\beta \cdot t$ , где  $\beta$  - параметр, определяющий долю частиц, находящихся в зоне воздействия рабочих органов. При достижении времени  $\tau$  произведение  $\beta \cdot \tau=1$  и процесс измельчения прекращается. Интенсивность неоднородного Марковского процесса равна  $\lambda_x=\lambda \cdot (1-\beta t) \cdot x$

где  $\lambda$  – коэффициент пропорциональности.

На ряду с интенсивностью  $\lambda_x$  характеризующей измельчение, представим интенсивность перехода из  $x \Rightarrow x-1$  за время  $\Delta t$  в виде  $\mu_x=\mu \cdot x$  характеризующего агломерацию; где  $\mu$  – коэффициент интенсив-

ности агрегирования. Тогда [4,2] для вероятностей имеет место уравнение

$$\frac{dP_x(t)}{dt} = \lambda_{x-1}P_{x-1}(t) - \lambda_x P_x(t) + \mu_{x+1}P_{x+1}(t) - \mu_x P_x(t)$$

$$x = x_0 \dots x_k$$

Если в полученном уравнении перейти к моментам распределения, считая, что  $x_0$  минимальное и  $x_n$

$$\frac{d(d_{cp}(t))}{dt} = -\frac{1}{3}\{\lambda(1 - \beta t) - \mu\}d_{cp}(t) \quad \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{1}{3}\{\lambda(1 - \beta t) - \mu\}S(t)$$

$$d(0) = d_0 \quad S(t_0) = S_0$$

Для идентификации коэффициента  $\mu$  – коэффициент агрегирования следует из эксперимента определить время начала второго этапа агрегирования. В этом случае удобнее воспользоваться дифференциальными уравнениями относительно удельной поверхности. Из эксперимента определяем удельную по-

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{1}{3}\{\lambda(1 - \beta t)\}S(t) \quad \text{после дезагрегации} \quad \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{1}{3}\{\lambda(1 - \beta t) - \mu\}S(t)$$

$$S(0) = S_0 \quad S(t_0) = S_1$$

где  $t_0$  - время начала второго этапа агрегирования,  $S_1$  - удельная поверхность в момент времени  $t_0$ , определяются из эксперимента.

**Результата эксперимента и их обсуждение.**

*Результаты вибрационной обработки X13M2C2.* Материал подвергался вибрационной обработке в течение 9 часов, набором мелющих тел №1 общий вес мелющих тел 55кг, обрабатываемый материал вес 6 кг, частота колебаний 2000об/мин., средняя амплитуда 1,5мм. Результаты обработки оценивались по удельной поверхности, измеряемой на приборе ПСХ-4, который соответствует стандартам - европейским (ГОСТ, DIN, ISO) и американскому (ASTM). Анализируя результаты опыта, видим, что удельная поверхность уменьшается (имеет место агрегация частиц) между 2,5 и 3,5 часами измельчения. Далее удельная поверхность возрастает.

По экспериментальным данным зависимости удельной поверхности от времени измельчения металлических порошков зависимости удельной поверхности от времени измельчения могут быть найдены [6]

Для X13M2C2

$$S(t) = 27.5e^{-0.113t + 0.072t^2}; \lambda = 0.339; \beta = 0.432$$

Рассмотрим нахождение изменения удельной поверхности при измельчении с учетом этапа устойчивого образования агрегатов. Началом второго этапа агрегирования будем считать точку перегиба кривой  $S=S(t)$

На рис.3 пунктирная линия типа ----- - экспериментальные данные [8,9]; сплошная линия значения рассчитанные по формуле

$$S(t) = -1.89t^3 + 6.48t^2 - 3.08t + 27.68;$$

пунктирная линия типа ---- - значения получены по методу Нелдера –Мида

$$S(t) = 27.5 \exp(0.072t^2 - 0.113t).$$

максимальное число частиц в совокупности в момент времени  $t$  и привести её к дифференциальным уравнениям относительно среднего диаметра частиц или удельной поверхности то получим уравнения вида

верхность обрабатываемого материала до появления агрегирования и изменение удельной поверхности с учетом агрегирования. При этом предполагаем, что дезагрегация тонкодиспергированных частиц (измельчение материала) описывается уравнением

Изменение удельной поверхности X13M2C2

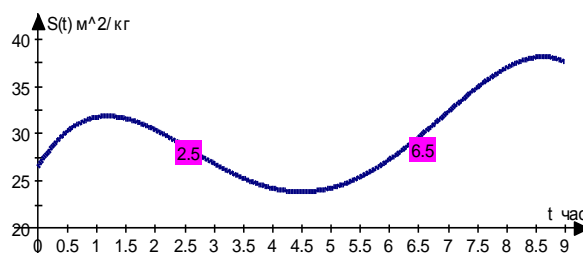


Рис.2

Изменение S(t) X13M2C2 при времени помола от 0 до 2.5

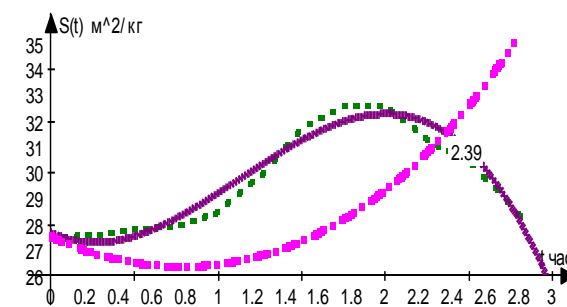


Рис.3

Агрегация измельчаемого материала X13M2C2 интервал от 2.5 до 6.5 час.

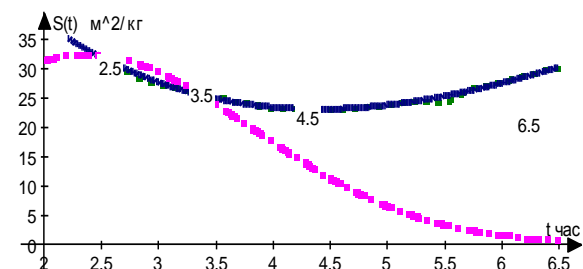


Рис.4

На рис.4 пунктирная линия типа ----- - экспериментальные данные [9] ; сплошная линия значения рассчитанные по формуле

$$S(t) = -0.2095t^3 + 4.8206t^2 - 30.2489t + 80.6133$$

пунктирная линия типа ---- - значения получены по методу Нелдера –Мида

$$S(t) = S(2.5) \exp\left(-\frac{\lambda}{3}t + \frac{\mu}{3}t + \frac{\beta}{6}t^2\right) \quad \lambda = 1.0875;$$

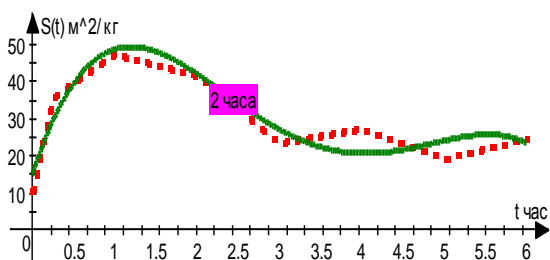
$$\beta = -1.3886; \mu = 2.1911$$

$$S(t) = 8.8195 \exp(-0.2310t^2 + 1.0929t).$$

Результаты вибрационной обработки терморреагирующего порошка ПГСП- +3% алюминиевой пудры.

Материал подвергался вибрационной обработке в течение 6 часов, в барабане объёмом - 2.3 дм<sup>3</sup>, установленном на вибрационной машине ВУПП-200. Мелющие тела стальные шары (ШХ-15) диаметром - 22мм и весом - 7.95кг; обрабатываемый материал - 2 кг; частота колебаний - 25Гц; средняя амплитуда - 2,5мм. Содержание алюминиевой пудры - 3%(60г). Результаты обработки оценивались по удельной поверхности.

Терморреагирующий порошок ПГСП-2



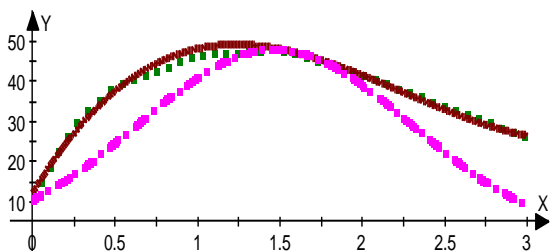
Содержание алюминиевой пудры 3% от массы порошка

Рис.5

На рис.5 пунктирная линия типа ----- - экспериментальные данные [8,9]; сплошная линия значения, рассчитанные по формуле

$$S(t) = -0.643t^4 + 9.2378t^3 - 43.5262t^2 + 68.9334t + 14.4627.$$

Терморреагирующий порошок ПГСП-2 2.5 часа



Содержание алюминиевой пудры 3% от массы порошка

Рис.6

На рис.6 (измельчение) пунктирная линия типа ---- - экспериментальные данные [8,9] ; сплошная линия значения рассчитанные по формуле

$$S(t) = 5.6881t^3 - 38.4441t^2 + 68.9874t + 11.7219;$$

пунктирная линия типа ---- - значения получены по методу Нелдера –Мида

$$S(t) = 10 \exp(-0.7201t^2 + 2.12t).$$

Из эксперимента определено время начала агрегирования 2.5 часа.

Агрегация ПГСП-2 +3%

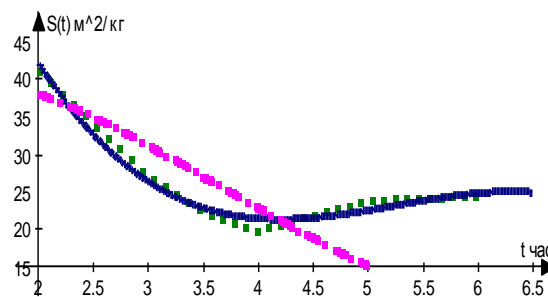


Рис.7

На рис.7 пунктирная линия типа ----- - экспериментальные данные [8,9] ; сплошная линия значения рассчитанные по формуле

$$S(t) = 0.8025t^3 + 12.6502t^2 - 63.8256t + 1256.6232;$$

пунктирная линия типа ---- - значения получены по методу Нелдера –Мида

$$S(t) = S(2) \exp\left(-\frac{\lambda}{3}t + \frac{\mu}{3}t + \frac{\beta}{6}t^2\right) \quad \lambda = 2.12;$$

$$\beta = -0.3168; \mu = 2.327$$

$$S(t) = 41.19 \exp(-0.0528t^2 + 0.069t);$$

Расхождение между значениями полученными методом Нелдера –Мида

и экспериментальными данными можно объяснить тем, что не учтено изменение физико-механических свойств агрегирующего материала, но время начала и окончания агрегации материала совпадают в допустимых пределах.

**Выводы.** Полученные из экспериментальных данных значения параметров  $\beta, \lambda, \mu$  дают возможность оптимизации режимов работы вибрационной мельницы, но только для определенного типа материала. Расхождение между значениями, полученными теоретическими и экспериментальными данными можно объяснить

тем, что данный метод, не учитывает физико-механические свойства обрабатываемого материала. При обработке материалов подверженных агломерации физико-механические свойства оказывают влияние на процесс обработки материала. В предложенной математической модели процесса агрегирования коэффициент агрегирования  $\mu$  следует считать не постоянной величиной, а функцией от времени и удельной поверхности  $\mu = \mu(t, S)$ . Последнее служит признаком не полного соответствия вероятностной математической модели процесса измельчения и агломерации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Непомнящий Е.А. Закономерности тонкодисперсного измельчения, сопровождаемого агрегированием частиц. – Теоретические основы химической технологии. – 1978. т.12. №4 – С. 576-580.
2. Кафаров В.В. О механизме дробления частиц дисперсной фазы в двухфазной системе/Дорохов И.Н., Кольцова Э.М., Арутюнов С.Ю. – Докл. АН СССР: 1982.т.264.№2. – С.377-440.
3. Овчинников П.Ф. Виброреология – Киев: Наукова Думка.1983. – 271с.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. М.: – Мир – 1967.т.1 – 484с.
5. Паходин В.А. Исследование процесса агломерации при измельчении материалов в вибромельнице/. Афанасьева Т.А, Блиничев В.Н., Афонин С.Б.– Известия вузов. Химия и химическая технология – 1980 – т.23,№9 –С.1174-1176.
6. Бурденко А.Ф. Определение коэффициентов дифференциальных уравнений по экспериментальным данным./Орлова Н.Д. – Деп.в ВИНТИ №3895 – В89 от 12.06.89.
7. Орлова Н.Д. О некоторых оценках результатов вибрационного измельчения материалов. Вісник національного технічного університету „ХПІ” Збірник наукових праць. Тематичний випуск „Хімія, хімічна технологія та екологія» – Харків:НТУ „ХПІ” . – 2007 – №31. – С.120 – 127.
8. Орлова Н.Д. Описание возможной математической модели виброплакирования порошков алюминия и кремния. Отчет о научно-исследовательской работе "Разработка технологии виброизмельчения металлических порошков для коррозионно-стойких и антифрикционных покрытий гос. регистрации 018600062335, 1986г., стр.7-10
9. Красулин Ю.Л. Взаимодействие металла с полупроводником в твердой фазе. М.: – Наука – 1978, 288С.

#### REFERENCES

1. Nepomnyashchiy EA Regularities of finely dispersed grinding, accompanied by aggregation of particles. Theoretical basis of chemical technology. - 1978. Vol.12. №4 – pp. 576-580.
2. Kafarov V.V. About the mechanism of fragmentation of particles of a disperse phase in a two-phase system / Dorokhov I.N., Koltsova E.M., Arutyunov S.Y. - Dokl. Academy of Sciences of the USSR: 1982.t.264.№2. – pp.377-440.
3. Ovchinnikov P.F.Vibrorheology - Kiev: Naukova Dumka.1983. – 271p.
4. Feller V. Introduction to the theory of probability and its applications. M. : - The world - 1967.t.1 – 484p.
5. Pakhodin. V.A. Investigation of the agglomeration process in grinding materials in a vibratory mill / Afanasyeva T.A. , Blinichev V.N., Afonin S.B. - Proceedings of universities. Chemistry and Chemical Technology - 1980 - Vol. 23, No.9 pp.1174-1176.
6. Burdenko A.F. Determination of the coefficients of differential equations from experimental data. / Orlova N.D. - Dep.v VINITI № 3895 - B89 from 12.06.89.
7. Orlova N.D. About some estimates of the results of vibrational grinding of materials. Bulletin of the National Technical University "KhPI" Collection of scientific works. Thematic issue "Chemistry, chemical technology and ecology" - Kharkiv: NTU "KhPI". - 2007 - No. 31. - pp.120 – 127.
8. Orlova. N.D. Description of a possible mathematical model of vibration plating of aluminum and silicon powders. Report on the research work "Development of the technology of vibration of metal powders for corrosion-resistant and antifriction coatings of state registration 018600062335, 1986, pp.7-10 .
9. Krasulin Yu.L. Interaction of a metal with a semiconductor in the solid phase. M. : - Science - 1978.- 288p.

#### Mathematical description of the process of milling and agglomeration based on probability model of the process N. D. Orlova

**Abstract.** A probabilistic approach to the study of milling and agglomeration processes in vibrating mills is considered. A qualitative analysis of the process was carried out from the standpoint of inhomogeneous Markov processes that are continuous in time and discrete in space. Investigation of the process associated with the function of the probability density of destruction. With an increase in the degree of dispersion of the particles of the material being crushed, the fraction of the energy consumed by the plastic deformation increases, as a result, point contacts pass into contacts over the surface and the strength of the aggregates increases. At its core, the aggregation process reduces the efficiency of vibratory mills when grinding material, but allows the process of vibration cladding. It is assumed that the processing of materials is not accompanied by a chemical reaction and the physical and mechanical properties of the materials are not taken into account. Basically, this method is associated with the evaluation of experimental data and the search for optimal parameters for processing materials.

**Keywords:** vibratory grinding, agglomeration, optimal parameters.

#### Математическое описание процесса измельчения и агломерации на основе вероятностной модели процесса Н. Д. Орлова

**Аннотация.** Рассмотрен вероятностный подход к изучению процессов измельчения и агломерации в вибрационных мельницах. Качественный анализ процесса проведен с позиций неоднородных Марковских процессов непрерывных по времени и дискретных в пространстве. Исследование процесса, связанно с функцией плотности вероятности разрушения и агломерации частиц. Предполагается, что обработка материалов не сопровождается химической реакцией и не учитываются физико-механические свойств материалов. В основном этот метод связан с оценкой экспериментальных данных и поиском оптимальных параметров обработки материалов.

**Ключевые слова:** вибрационное измельчение, агломерация, оптимальные параметры.