Дослідження системи з лінійно перетвореними аргументами і нелінійними інтегральними умовами

І. Д. Скутар

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
Corresponding author. E-mail: i.skutar@chnu.edu.ua

Paper received 26.01.21; Accepted for publication 12.02.21.

https://doi.org/10.31174/SEND-NT2021-250IX31-04

Анотація. Досліджено систему диференціальних рівнянь із запізненням на проміжку $[0, L]$ із n повільними та m швидкими змінними. Запізнення в системі характеризується лінійно перетвореними аргументами у повільних і у швидких змінних. Для повільних і швидких змінних задано інтегральні умови. Процедура усереднення за швидкими змінними здійснена як у системі рівнянь, так і в інтегральних умовах. Доведено існування єдиного розв'язку задачі та отримано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра.

Ключові слова: *лінійно перетворений аргумент, метод усереднення, малий параметр, резонанс, інтегральна умова, оцінка похибки.*

Вступ. Багаточастотні системи диференціальних рівнянь досліджувалися у працях В.І. Арнольда [1], Є.О. Гребенікова [2], М.М. Хапаєва [3], А.І. Нейштадта [4] та ін. Значний внесок у дослідження таких систем належить київській школі з нелінійних коливань і відображено в працях М.М. Боголюбова і Ю.О. Митропольського [5], А.М. Самойленка [6, 7]. Зокрема, новий підхід у дослідженні багаточастотних систем, які в процесі еволюції проходять через резонанс, висвітлено в працях А.М. Самойленка і Р.І. Петришина [7, 8].

Системи із m частотами і запізненням, яке задається лінійно перетвореними аргументами на $[0, L]$ у резонансному випадку з інтегральними умовами досліджені у працях [9,10]. Такого типу рівняння застосовуються у багатьох задачах, наприклад, при моделюванні зміни величини струму під час проходження електровозом контактних опор [11].

Значна кількість праць присвячена задачам із нелокальними умовами. У праці [12] досліджувалися властивості розв'язку скалярного диференціального рівняння другого порядку із сталим запізненням й інтегральною умовою

$$u(1)=\int_0^1 u(t)\,d\beta(t).$$

Задачі з іншими інтегральними умовами вивчалися в [13, 14] та ін.

Постановка задачі. У даній роботі розглянуто m-частотну систему диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами вигляду

$$\frac{da}{d\tau}=X\left(\tau,a_\Lambda,\varphi_\Theta\right), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+Y\left(\tau,a_\Lambda,\varphi_\Theta\right), \tag{2}$$

де $\tau\in[0,L]$, малий параметр $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $a_{\lambda_i}(\tau)=a(\lambda_i\tau)$, $\Lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$, $0<\lambda_1<\dots<\lambda_p\le 1$, $\varphi_{\theta_j}(\tau)=\varphi(\theta_j\tau)$, $\Theta=(\theta_1,\dots,\theta_q)$, $0<\theta_1<\dots<\theta_q\le 1$. Вектор-функції X, Y і ω достатньо гладкі за всіма аргументами при $\tau\in[0,L]$, $a\in D$, D – обмежена замкнена опукла область в R^n, $\varphi\in\mathrm{R}^m, m\ge 1$, 2π-періодичні за змінними φ_{θ_j}.

Для системи рівнянь (1), (2) задано інтегральні умови

$$a(0)=f\left(\int_0^L A(\tau)a(\tau)d\tau\right), \tag{3}$$

$$\varphi(0)=\int_0^L h\left(\tau,a_\Lambda,\varphi_\Theta\right)d\tau, \tag{4}$$

де вектор функція h того ж класу, що й X і Y, $A(\tau)$ — матриця порядку n.

Усереднена за швидкими змінними задача набуває вигляду

$$\frac{d\bar a}{d\tau}=X\left(\tau,\bar a_\Lambda\right), \tag{5}$$

$$\frac{d\bar\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+Y\left(\tau,\bar a_\Lambda\right), \tag{6}$$

$$\bar a(0)=f\left(\int_0^L A(\tau)\bar a(\tau)d\tau\right), \tag{7}$$

$$\bar\varphi(0)=\int_0^L h_0\left(\tau,\bar a_\Lambda\right)d\tau. \tag{8}$$

Отримана після усередненя задача значно простіша, ніж точна (1)–(4) , оскільки окремо розв'язується задача (5), (7). Якщо розв'язок $\bar a:=\bar a(\tau;\bar y)$, $\bar a(0;\bar y)=\bar y$, $\tau\in[0,L]$ знайдено, то розв'язок $\bar\varphi:=\bar\varphi(\tau;\bar y,\bar\psi,\varepsilon)$, $\bar\varphi(0;\bar y,\bar\psi,\varepsilon)=\bar\psi$, знаходиться шляхом інтегрування. Задача полягає у знаходженні достатніх умов існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(4) та отримання оцінки відхилення розв'язків задач точної й усередненої задач, яка явно залежить від малого параметра ε.

Позначення. Введемо такі позначення:

$$\tilde a(\tau):=\bar a(\tau;\bar y+\mu),\ z(a):=\int_0^L A(\tau)a(\tau)d\tau;$$

$V(\tau)$ – визначник Вронського порядку mq, побудований за системою функцій $\{\omega(\theta_1\tau),\ldots,\omega(\theta_q\tau)\}$.

Відомо [10], що

$$\|\tilde{a}(\tau)-\bar{a}(\tau)\|\le c_1\|\mu\|\le\rho/2, \tag{9}$$

якщо

$$\|\mu\|\le(2c_1)^{-1}\rho,\ c_1=L\exp(p\sigma_1). \tag{10}$$

Також виконується оцінка

$$\begin{aligned}&\|\kappa(\tau;y,\psi,\varepsilon)-\bar{\kappa}(\tau;y,\psi,\varepsilon)\|:=\\&:=\|a(\tau;y,\psi,\varepsilon)-\bar{a}(\tau;y)\|+\\&+\|\varphi(\tau;y,\psi,\varepsilon)-\bar{\varphi}(\tau;y,\psi,\varepsilon)\|\le\\&\le c_2\varepsilon^{\alpha},\ \tau\in[0,L],\end{aligned} \tag{11}$$

де $\alpha=(mq)^{-1}$, $\varepsilon\le\varepsilon_1\le\varepsilon_0,\ c_2>0$ і не залежить від ε. Така ж оцінка правильна і для похідних за початковими значеннями y і ψ [10].

Нехай I – одинична матриця порядку n,

$$P(\bar{y}):=I-\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}\int_0^L A(\tau)\frac{\partial\bar{a}(\tau,\bar{y})}{\partial\bar{y}}d\tau,$$

$$\gamma_k(\tau):=\sum_{\nu=1}^{q}(k_\nu,\omega(\theta_\nu\tau))\theta_\nu.$$

Резонанс в системі (1), (2) у точці τ задається умовою

$$\gamma_k(\tau)=0,\ k\ne0.$$

Центральною умовою в обґрунтуванні методу усереднення є умова "незастрягання" системи в малому околі резонансів і зводиться до накладання деяких умов на вектор частот.

Існування єдиного розв'язку та обґрунтування методу усереднення.

Терема. Нехай виконуються такі умови:

1) $(X,Y,g)\in C^{2,2,mq+2}_{\tau,a_\Lambda,\varphi_\Theta}(G,\sigma_1),G=[0,L]\times D^p\times R^{mq}$;

2) $\omega\in C^{mq-1}[0,L]$;

3) визначник Вронського $V(\tau)$ відмінний від нуля на [0, L];

4) існує єдиний розв'язок усередненої задачі (5)–(8), компонента $\bar{a}(\tau;\bar{y})$ якого належить області D із деяким ρ-околом;

5) матриця $P(\bar{y})$ невироджена і $\|P^{-1}(\bar{y})\|\le\sigma_2$;

6) $A_{ij}\in C[0,L],\ f\in C^2(G_1),\ \left\|\frac{\partial f}{\partial z}\right\|\le\sigma_3$;

$\left\|\frac{\partial f}{\partial z_i\partial z_j}\right\|\le\sigma_4,\ i,j=\overline{1,n}.$

Тоді для кожного досить малого $\varepsilon^*\in(0,\varepsilon_0]$, існує єдиний розв'язок задачі (1)–(4) і виконується оцінка

$$\|\kappa(\tau;y,\psi,\varepsilon)-\bar{\kappa}(\tau;\bar{y},\bar{\psi},\varepsilon)\|\le c_{12}\varepsilon^{\alpha},\forall\tau\in[0,L].$$

Доведення. Нехай $\varepsilon\le\varepsilon_2=\min\left(\varepsilon_1,(\rho/2c_2)^{1/\alpha}\right)$.

Тоді в класі $C^1[0,L]$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(4) із початковими умовами $(y,\psi):=(\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi)$, визначений при $\tau\in[0,L]$ і справджується оцінка [9]

$$\begin{aligned}&\|\kappa(\tau;\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon)-\bar{\kappa}(\tau;\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon)\|\le\\&\le c_2\varepsilon^{\alpha}/2.\end{aligned} \tag{12}$$

Покажемо, що цей розв'язок задовольняє для $\varepsilon\le\varepsilon_3$ інтегральну умову (3).

Із умов (1), (5) теореми маємо

$$\mu=f(z)-f(\bar{z})=$$

$$=\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(z-\tilde{z})+\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(\tilde{z}-\bar{z})+R_1(\mu,\xi,\varepsilon),$$

$$\tilde{z}-\bar{z}=\int_0^L A(\tau)(\tilde{a}-\bar{a})d\tau=$$

$$=\int_0^L A(\tau)\frac{\partial\bar{a}}{\partial y}(\tau;\bar{y})\mu d\tau+R_2(\mu),$$

де

$$R_1(\mu,\xi,\varepsilon)=f(z)-f(\bar{z})-\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(z-\bar{z}),$$

$$R_2(\mu)=\int_0^L A(\tau)[\tilde{a}-\bar{a}-\frac{\partial\bar{a}(\tau;\bar{y})}{\partial y}]d\tau.$$

Оскільки матриця $P(\bar{y})$ невироджена, то

$$\mu=\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon):=$$

$$:=P^{-1}(\bar{y})\left[\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(z-\tilde{z}+R_2(\mu))+R_1(\mu,\xi,\varepsilon)\right].$$

На підставі оцінок для розкладів вектор-функцій із монографії [2], одержимо

$$\|R_1\|\le\frac{\sigma_4n^2}{2}\|z-\bar{z}\|^2\le\frac{\sigma_4\sigma_5n^2}{2}\left(\|a-\tilde{a}\|+\|\tilde{a}-\bar{a}\|\right)^2.$$

Тоді на підставі (9) і (12) одержимо

$$\|R_1(\mu,\xi,\varepsilon)\|\le c_3\left(c_2^2\varepsilon^{2\alpha}+4c_1c_2\varepsilon^{\alpha}\|\mu\|+4c_1\|\mu\|^2\right),$$

$$c_3=\sigma_4\sigma_5n^2/8.$$

Аналогічно одержимо

$$\|R_2(\mu)\|\le\sigma_3c_4\|\mu\|^2,\ c_4=const>0.$$

Нехай

$$c_5=c_2\sigma_2\sigma_3\sigma_5,\ \ \mu\le c_5\varepsilon^{\alpha},\ \ \varepsilon\le\varepsilon_3=\min(\varepsilon_2,\bar{\varepsilon}_3),$$

$$\bar{\varepsilon}_3=\min\left(\rho(2c_1c_5)^{-1},\ c_5\left(4c_2^2c_3\sigma_2\right)^{-1},\ (32c_1c_2c_3)^{-1}\right).$$

Тоді

$$\begin{aligned}&\|\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)\|\le0.5\sigma_2[c_2\sigma_3\sigma_5\varepsilon^{\alpha}+\\&+2c_2^2c_3\varepsilon^{2\alpha}+8c_1c_2c_3\varepsilon^{\alpha}\|\mu\|+\\&+2(c_4\sigma_3\sigma_4+4c_1^2c_3)\|\mu\|^2\ ]\le c_5\varepsilon^{\alpha}.\end{aligned}$$

Отже, $\Phi_1:S_1\to S_1$, де $S_1=\left\{\|\mu\|:\|\mu\|\le c_5\varepsilon^{\alpha}\right\}$.

Покажемо, що відображення Φ_1 – стискаюче. Маємо,

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}=P^{-1}(\bar{y})\left[\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\mu}(z-\tilde{z})+\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}\frac{\partial R_2(\mu)}{\partial\mu}+\frac{\partial R_1}{\partial\mu}\right].$$

Оскільки $\left\|\frac{\partial R_2}{\partial \mu}\right\| = O\left(\|\mu\|\right)$, $\left\|\frac{\partial R_1}{\partial \mu}\right\| = O\left(\|\mu\| + \varepsilon^{\alpha}\right)$, то

$$\left\|\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu}\right\| \le \sigma_2\left[c_2\sigma_3\varepsilon^{\alpha}/2 + c_1\sigma_3\|\mu\| + c_7\left(\|\mu\| + \varepsilon^{\alpha}\right)\right] \le \frac{1}{2},$$

якщо

$$\varepsilon \le \varepsilon_4 = \min\left(\varepsilon_3, \left[\sigma_2\left(c_2\sigma_3 + 2c_5\left(c_1\sigma_3 + c_7 + 1\right)\right)\right]^{-mq}\right).$$

Отже, для кожного ξ і ε існує єдина нерухома точка μ відображення Φ_1, таке що $\|\mu\| \le c_5\varepsilon^{\alpha}$.

Розглянемо інтегральні умови (4) і (8). Маємо

$$\xi = \Phi_2(\xi(\mu),\varepsilon) :=$$

$$:= \int_0^L \left[g\left(\tau, a_{\Lambda}(\tau), \varphi_{\Theta}(\tau)\right) - g_0\left(\tau, \bar{a}_{\Lambda}(\tau)\right)\right] d\tau =$$

$$= \sum_{\|k\|>0} \int_0^L g_k\left(\tau, \bar{a}_{\Lambda}(\tau)\right) exp\left[i\sum_{\nu=1}^{q}\left(\kappa_{\nu}, \varphi_{\theta_{\nu}}\right)\right] d\tau +$$

$$+ \int_0^L \left[g_0\left(\tau, a_{\Lambda}(\tau)\right) - g_0\left(\tau, \tilde{a}_{\Lambda}(\tau)\right)\right] d\tau +$$

$$+ \int_0^L \left[g_0\left(\tau, \tilde{a}_{\Lambda}(\tau)\right) - g_0\left(\tau, \bar{a}_{\Lambda}(\tau)\right)\right] = R_3 + R_4 + R_5.$$

Із гладкості вектор-функції g за змінними $\tau, a_{\lambda_{\nu}}, \nu = \overline{1,p}$, до другого порядку і за змінними $\varphi_{\theta_{\nu}}, \nu = \overline{1,q}$ до порядку *mq+2* для осциляційних інтегралів

$$I_k\left(\tau; y, \psi, \varepsilon\right) =$$

$$= \int_0^{\tau} g_k\left(s, a_{\Lambda}\left(s; y, \psi, \varepsilon\right)\right) exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\int_0^{s} \gamma_{\theta}\left(s_1\right) ds_1\right] ds$$

для $\varepsilon \le \varepsilon_5$ правильні оцінки [9]

$$\left\|I_k\left(\tau, y, \psi, \varepsilon\right)\right\| \le$$

$$\le \sigma_6\varepsilon^{\alpha}[(1 + \frac{1}{\|\kappa\|_{\theta}})\sup_{\tau,\varepsilon}\left\|g_k\left(s, a_{\Lambda}\left(s, y, \psi, \varepsilon\right)\right)\right\| + \quad (13)$$

$$+ \frac{1}{\|\kappa\|_{\theta}}\sup_{\tau,\varepsilon}\left\|\frac{\partial g_k\left(s, a_{\Lambda}\left(s, y, \psi, \varepsilon\right)\right)}{\partial s}\right\|],$$

де $\|k\|_{\Theta} := \sum_{\nu=1}^{q} \theta_{\nu}\|k_{\nu}\|$.

На підставі оцінки (13) й аналогічної оцінки для похідної $I_k\left(\tau, y, \psi, \varepsilon\right)$ за змінними ψ одержимо

$$\left\|R_3\left(\mu, \xi, \varepsilon\right)\right\| \le c_8\varepsilon^{\alpha},\ \varepsilon \le \varepsilon_5. \quad (14)$$

Застосувавши оцінку (12), отримаємо

$$\left\|R_2\left(\mu, \xi, \varepsilon\right)\right\| \le$$

$$\le \sigma_1\sum_{\nu=1}^{p}\int_0^L \left\|A(\tau)\right\|\left\|a_{\lambda_j}(\tau) - \tilde{a}_{\lambda_j}(\tau)\right\| d\tau \le \quad (15)$$

$$\le c_2\sigma_1\sigma_5\varepsilon^{\alpha}/2.$$

На підставі оцінки (9) маємо

$$\left\|R_3\right\| \le c_1\sigma_1\sigma_5\|\mu\| \le c_1c_5\sigma_1\sigma_5\varepsilon^{\alpha}, \quad (16)$$

якщо $\varepsilon \le \left(2c_2\sigma_3\right)^{-mq} = \varepsilon_6$.

Отже,

$$\left\|\Phi_2\left(\xi(\mu), \varepsilon\right)\right\| \le \left(c_8 + \frac{\sigma_1\sigma_5\left(c_2 + 2c_1c_5\right)}{2}\right)\varepsilon^{\alpha} =: c_9\varepsilon^{\alpha}.$$

Для $\xi \in \mathrm{R}^m$ такого, що $\xi \le c_9\varepsilon^{\alpha}$ маємо $\Phi_2 : S_2 \to S_2$, $S_2 = \left\{\xi : \|\xi\| \le c_9\varepsilon^{\alpha}\right\}$.

Розглянемо матричну функцію

$$\frac{\partial \Phi_2\left(\xi(\mu), \varepsilon\right)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}R_3\left(\mu, \xi, \varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}R_2\left(\mu, \xi, \varepsilon\right).$$

Із оцінки похідної по ξ осциляційного інтеграла й відхилення розв'язків $a\left(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon\right) - \bar{a}\left(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon\right)$ одержимо

$$\left\|\frac{\partial \Phi_2\left(\xi(\mu), \varepsilon\right)}{\partial \xi}\right\| \le c_{10}\varepsilon^{\alpha} + c_1\sigma_1\sigma_5\varepsilon^{\alpha} =: c_{11}\varepsilon^{\alpha}.$$

Отже, $\forall \varepsilon \le \varepsilon^* = \min\left(\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \left(2c_{11}\right)^{-mq}\right)$ на підставі теореми про стискаючі відображення [15] існує єдине значення $\left(\mu, \xi\right)$ таке, що $\|\mu\| \le c_5\varepsilon^{\alpha}, \|\xi\| \le c_9\varepsilon^{\alpha}$ для якого задовольняються умови (2) і (3), тобто існує єдиний розв'язок задачі (1)-(4).

Відповідна оцінка для похибки методу усереднення випливає із такої нерівності

$$\left\|\kappa\left(\tau, y, \psi, \varepsilon\right) - \bar{\kappa}\left(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon\right)\right\| \le$$

$$\le \left\|\kappa\left(\tau, y, \psi, \varepsilon\right) - \tilde{\kappa}\left(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon\right)\right\| +$$

$$+ \left\|\tilde{\kappa}\left(\tau, y, \psi, \varepsilon\right) - \bar{\kappa}\left(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon\right)\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2}c_2\varepsilon^{\alpha} + c_1\varepsilon^{\alpha} =: c_{12}\varepsilon^{\alpha}$$

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо одночастотну систему з одним лінійно перетвореним аргументом

$$\frac{da}{d\tau} = b_1 + b_2\cos\left(k\varphi + l\varphi_{\theta}\right),\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\left(d_1 + d_2\tau\right).$$

де $0 < k < -l, \theta = -k/l$, b_{ν} і d_{ν} – додатні числа, $\nu = 1,2$.

Інтегральні умови мають вигляд

$$a(0) = A\int_0^L a(\tau) d\tau,$$

$$\varphi(0) = \beta\int_0^L \cos\left(k\varphi + l\varphi_{\theta}\right) d\tau,$$

де сталі $A > 0$, $\beta > 0$, $1 - \alpha L \ne 0$.

Резонанс досягається при $\tau = 0$, оскільки $\gamma_{kl}(\tau) = d_2\left(k + \theta^2 l\right)\tau$. Визначник Вронського $V(\tau) = d_1d_2\left(1 - \theta\right) \ne 0$, тобто умова 3 теореми виконується, як і 1,2 та 4.

Розв'язки точної задачі і відповідної їй усередненої задачі

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = b_1,\ \bar{a}(0) = A\int_0^L \bar{a}(\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}(d_1 + d_2\tau),\ \bar{\varphi}(0) = 0,$$

набувають вигляду

$$a(\tau,\mu,\xi,\varepsilon) = \bar{y} + \mu + b_1\tau + b_2\int_0^T \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right)d\tau,$$

$$\varphi(\tau,\xi,\varepsilon) = \xi + \frac{d_1 + d_2\tau}{\varepsilon} + \int_0^T \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right)d\tau,$$

$$\bar{a}(\tau) = \bar{y} + b_1\tau,\ \ \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon) = \frac{d_1 + d_2\tau}{\varepsilon},$$

де $y = \dfrac{Ab_1L^2}{2(1-AL)}$, $c = d_2(k + l\theta^2)/2$.

Початкове значення знаходиться із рівняння

$$\xi = \beta\int_0^1 \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right)d\tau =: \Phi_2(\xi).$$

Якщо

$$\varepsilon \le \varepsilon_0 = c\,/\left(8\pi\beta^2(k+l)^2\right),$$

то з асимптотики інтеграла Френеля [16] випливає, що виконується умова стиску відображення Φ_2, тобто існує єдина нерухома точка з відображення $\Phi_2 : S_2 \to S_2$. Тут $S_2 = \left\{\xi : |\xi| \le c_1\sqrt{\xi},\ c_1 = \beta\sqrt{\pi}\,/\,\sqrt{2c}\right\}$.

Значення набуває вигляду

$$\mu := \Phi_1(\xi) = \frac{A}{|1-AL|}\int_0^1 \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi\right)d\tau.$$

З асимптотики інтеграла Френеля випливає, що при $\tau = 0$

$$\left|a(\tau,\mu,\xi,\varepsilon) - \bar{a}(\tau)\right| \le c_2\sqrt{\varepsilon},$$

$$\left|\varphi(\tau,\xi,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\right| \le c_1\sqrt{\varepsilon},$$

де $c_2 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2|c|}}\left(\dfrac{A}{|1-AL|} + |b_2|\right)$.

Зауважимо, що для одночастотної системи без запізнення оцінка похибки має порядок ε, при $\varepsilon \to 0$.

Висновки. Для спрощення m-частотної системи диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами й нелінійними інтегральними умовами застосовано процедуру усереднення за швидкими змінними. Доведено існування єдиного розв'язку точної задачі. Одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра та кількості швидких змінних і лінійно перетворених аргументів у них. Побудовано приклад одночастотної системи з інтегральними умовами, на якому проілюстровано отриманий результат.

ЛІТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: УРСС, 2002. 416 с.
2. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в небесной механике. Москва: Наука, 1971. 444 с.
3. Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости. Москва: Наука, 1986.
4. Neishtadt A.I. Averaging, passage through resonances and capture into resonance in two-frequency system. *Russian Mathematical Surveys.* 2014, 69 (5), p.771-843.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 503 с.
6. Самойленко А.М. К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем. *Дифференц. уравнения*. 1987, 23 (2), с.267-278.
7. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наукова думка, 2004. 475 с.
8. Самойленко А.М., Петришин Р.И. Метод усреднения в некоторых краевых задачах. *Дифференц. уравнения.* 1989, 25 (6), с.956-964.
9. Бігун Я.Й. Існування розв'язку та усереднення багатоточкових крайових задач для багаточатотних систем із лінійно перетвореним аргументом. *Нелінійні коливання*. 2008, 11 (4), с.462-471.
10. Бігун Я.Й., Краснокутська І.В., Петришин Р.І. Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і багатоточковими та інтегральними умовами. *Буковинський математичний журнал.* 2016, 4 (3-4), с.30-35.
11. Гребенщиков Б.Г., Ложников А.Б. Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывание. *Дифференц. уравнения.* 2004, 40 (12), с.1587-1595.
12. Dingyong Rai, Yuantong Xu. Positive solution and eigenvalue intervals of nonlocal boundary value problem with delays. *Math. Analysis and Appl.*, 2007, 334, p.1152–1166.
13. Johnny Henderson and Rodica Luca. Boundary Value Problems for Systems of Differential, Difference and Fractional Equation. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, Netherlands, 2016.
14. Jankowski T. First-order differential equations with nonlocal boundary conditions. *Dynamic Systems and Applications.* 2015, 24, p.195-210.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1981. 544 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Москва: Наука, 1974, том 2. 296 с.

REFERENCES

1. Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I., Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. Moscow: URSS, 2002, 416 pp.
2. Grebenikov E.A., Ryabov Yu.A. New quality methods in celestial mechanics. Moscow: Nauka, 1971. 444 pp.
3. Khapaev M.M. Averaging in stability theory. Moscow: Nauka, 1986.
5. Bogoliubov, N. N., Mitropolskii Yu. A. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. Moscow: Nauka, 1974. 503 pp.
6. Samoilenko A.M. On the question of substantiating the averaging method for multifrequency oscillatory systems. *Differential Equations*, 1987, vol. 23 (2), pp.267-278.
7. Samoilenko A.M., Petryshyn R.I. Mathematical aspects of the theory of nonlinear oscillations. Kyiv: Naukova Dumka, 2004. 475 pp.
8. Samoilenko A.M., Petryshyn R.I. Averaging method in some boundary value problems. *Differential Equations*, 1989, vol. 25 (6), pp.956-964.

9. Bigun Y. I. On existence of solution and averaging for multipoint boundary-value problems for many-frequency systems with linearly transformed argument. *Nonlinear Oscillation,* 2008, vol. 11 (4), pp. 462-471.
10. Bihun Ya.Y., Krasnokutska I.V., Petryshyn R.I., Averaging in multifrequency systems with linearly transformed arguments and with multipoint and integral conditions. *Bukovinian Mathematical Journal.* 2016, vol. 4 (3-4), pp.30-35.
11. Grebenshchikov, B.G., Lozhnikov, A.B. Stabilization of a system with a constant and a linear delay. *Differential Equations,* 2004, vol. 40 (12), pp. 1587–1595.
15. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka, 1981. 544 pp.
16. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. Moscow: Nauka, 1974, vol. 2. 296 p

Investigation of a system with linearly transformed arguments and nonlinear integral conditions

I. D. Skutar

Abstract. The system of differential equations with delay on the interval [0, L] with n slow and m fast variables is investigated. The delay in the system is characterized by linearly transformed arguments in slow and fast variables. Integral conditions are given for slow and fast variables. The procedure of averaging over fast variables is carried out both in the system of equations and in integral conditions. The existence of a unique solution to the problem is proved and the accuracy of the averaging method is estimated, which obviously depends on the small parameter.

Keywords: *linearly transformed argument, averaging method, small parameter, resonance, integral condition, estimation of accuracy.*