Міжпредметні зв'язки при розв'язуванні задач алгебри з використанням геометрії

І. В. Житарюк, В. М. Лучко, В. С. Лучко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна

Paper received 09.02.18; Accepted for publication 20.02.18.

http://doi.org/10.31174/SEND-PP2018-162VI66-14

Анотація. У роботі розглянуто питання можливостей і переваг використання міжпредметних зв'язків алгебри та геометрії у межах програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів (ЗНЗ), проілюстрованих на прикладах розв'язування задач різного рівня складності. Зазначено, що використання запропонованих підходів розв'язування запропонованих задач алгебри з використанням геометрії, розширить кругозір і збагатить учнів ЗНЗ математичними ідеями, допоможе їм при поглибленому вивченні математики та підготовці до олімпіад з математики різного рівня.

Ключові слова: *алгебра, геометрія, задача, міжпредметні зв'язки.*

Постановка проблеми. Аналізуючи результати ЗНО з математики, олімпіад різного рівня, можна зробити висновок про формалізм і фрагментарність знань і вмінь учнів загальноосвітніх навчальних закладів, відсутності в них мотивації до вивчення програмних навчальних дисциплін, їх неспроможності належно використовувати знання і вміння творчо мислити в нестандартних завданнях, ситуаціях тощо. Однією з причин, на нашу думку, є функціонування загальноприйнятої наразі в ЗНЗ традиційної предметно-диференційованої системи навчання, оскільки в результаті тривалого вивчення учнями диференційованих навчальних дисциплін отримувані знання так і залишаються розрізненими відомостями, штучно розчленованими за предметною ознакою. Потреба подолати зазначені наслідки традиційної системи навчання у ЗНЗ сприятиме активному пошуку можливостей використання у диференційованому навчанні внутрішньо- та міжпредметних зв'язків. Це стосується й вивчення таких дисциплін як алгебра і геометрія.

Особливої уваги заслуговують можливості і переваги використання зв'язків між алгеброю і геометрією в межах програми з математики для ЗНЗ, проілюстрованих на прикладах розв'язування задач різного рівня складності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Пошуки ефективних шляхів підвищення рівня процесу навчання привертають увагу педагогів, учених і практиків до проблеми міжпредметних зв'язків.

Міжпредметні зв'язки алгебри і геометрії були обєктом вивчення як вітчизняних так і зарубіжних дослідників, зокрема Козко А.І., Колесника С.Г., Хазіна А.І., Хазіна Г.А., Чирського В.Г. та ін.

Як зазначають Хазін А.І., Хазін Г.А. [4, с. 334], серед міжпредметних зв'язків у системі предметного навчання варто виокремити зв'язки між алгеброю і геометрією. Проте, з певних міркувань може виникнути думка, що такі зв'язки й не потрібно кваліфікувати як міжпредметні, оскільки алгебра і геометрія – це математика. Проте, як би це не кваліфікувати, вони є потрібними, оскільки і в алгебрі, і в геометрії трапляються ситуації, з яких вийти, покладаючись на закономірності лише однієї з них, іноді надто складно або навіть неможливо.

Хазін А.І., Хазін Г.А. у [3, 4] розглядають питання щодо можливостей і переваг використання зв'язків між алгеброю і геометрією в межах програми з математики для ЗНЗ. Розглянуто дидактичні прийоми щодо їх використання на конкретних прикладах, зокрема пов'язаних з поняттям "рівняння" і геометричним поняттям "пряма", питаннями, щодо побудови графіків лінійної і квадратичної функцій, перетвореннями графіків функцій в основній школі.

Козко А.І., В.Г. Чирський у [1] на розв'язуванні конкретних прикладів демонструють зв'язок між алгеброю і геометрією, не проводячи його методичного аналізу.

Метою статті є дослідження особливостей розв'язування задач алгебри з використанням геометрії.

Виклад основного матеріалу дослідження. Реалізація міжпредметних зв'язків "як результат" необхідна для забезпечення навчання іншого предмета, але при цьому вони сприяють і глибшому вивченню даного предмета. Зв'язки між елементами знань і вмінь алгебри та геометрії сприяють формуванню всебічно розвиненої творчої особистості, яка озброєна системними знаннями, загальнонауковими вміннями та навичками і вміє здійснювати міжпредметне перенесення знань і умінь при розв'язуванні різних задач. Зокрема є досить оригінальним прийом розв'язування задач алгебри з використання певних понять координатної геометрії. Проілюструємо це на прикладах розв'язування конкретних задач з алгебри.

Задача 1. Знайти найменше значення виразу $\sqrt{(x-6)^2+36}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-6)^2+9}$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану задачу з використанням певних понять геометрії. Введемо позначення

$$d_1=\sqrt{x^2+y^2}, \quad d_2=\sqrt{(x-6)^2+36}, \quad d_3=\sqrt{(y-6)^2+9}.$$

Розглянувши прямокутну декартову систему координат на площині, стає очевидним з введених позначень, що d_1, d_2, d_3 – відстані між деякими точками цієї системи координат. В якості цих точок можна взяти точки O(0; 0), A(x; y), B(6; 6+y), C(9; 12) (див. рис. 1).

Справді,

$$OA=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=d_1,$$
$$AB=\sqrt{(6-x)^2+(y+6-y)^2}=\sqrt{(x-6)^2+36}=d_2,$$
$$BC=\sqrt{(9-6)^2+(12-6-y)^2}=\sqrt{(y-6)^2+9}=d_3.$$

Найменше значення суми відстаней d_1, d_2 і d_3 буде досягатися, якщо точки A, B належатимуть відрізку OC (тобто точки O, A, B і C розташовані на одній прямій, див. рис. 2).

Зясуємо, чи таке розташування точок можливе. Складемо рівняння прямої, що проходить через точки O і C. Воно матиме вигляд $3y=4x$. Оскільки дана пряма повинна проходити через точку B(6; 6+y), то отримуємо систему

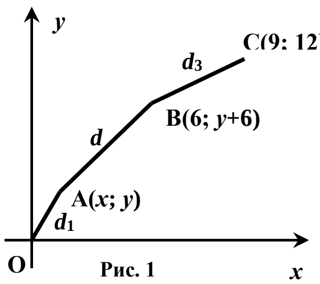

Рис. 1

$$\begin{cases} 4x = 3y, \\ 3(6+y) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Таким чином, точки A і B мають координати A(3/2; 2), B(6; 8) і належать прямій OC, причому точки A, B лежать всередині відрізка OC. Отже, найменше значення виразу

$$\sqrt{(x-6)^2+36}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-6)^2+9}$$

дорівнює довжині відрізка OC, а саме

$$OC = \sqrt{(9-0)^2+(12-0)^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15.$$

Зауваження. Дану задачу можна було б розв'язати, використовуючи поняття похідної, але наведене розв'язання є найпростішим та ілюструє міжпредметний зв'язок алгебри та геометрії й підтверджує доцільність вивчення використаних понять з геометрії.

Задача 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-2x-22y+122} = 2\sqrt{37}-\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}, \\ \log_{x+1}4+\log_y 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо перше рівняння заданої системи у вигляді

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-11)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} = 2\sqrt{37}.$$

Дана рівність означає, що у прямокутній декартовій

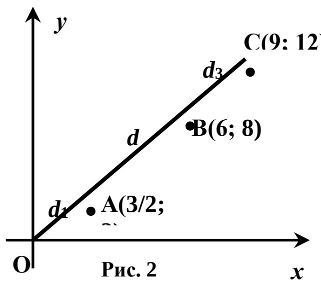

Рис. 2

системі координат площини сума відстаней від точки A(x, y) до точок B(1; 11), C(-1; -1) дорівнює $2\sqrt{37}$. Легко переконатися, що відстань між точками B і C також дорівнює $2\sqrt{37}$. Це означає, що точка A(x, y) належить відрізку BC. Тобто, координати точки A повинні задовольняти рівняння прямої BC, причому $x \in [-1; 1]$ (див. рис. 3, 4).

Отже, має виконуватися рівність $y=6x+5$ для $x \in [-1; 1]$. Таким чином, задана система рівносильна системі

$$\begin{cases} y = 6x+5, x \in [-1; 1], \\ \log_{x+1}4+\log_y 4 = 0. \end{cases}$$

Легко переконатися, що остання система має єдиний розв'язок $x=-1/2$, $y=2$, який є розв'язком й заданої системи.

Зауваження. Дану задачу можна було б розв'язати, використовуючи поняття похідної, але наведене розв'язання є найпростішим та ілюструє міжпредметний зв'язок алгебри та геометрії й підтверджує доцільність вивчення використаних понять з геометрії.

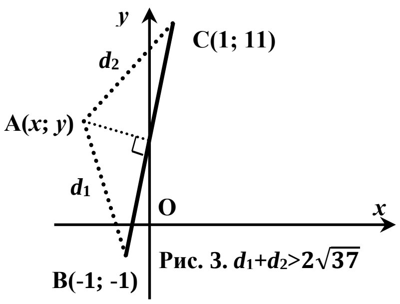

Рис. 3. $d_1+d_2>2\sqrt{37}$

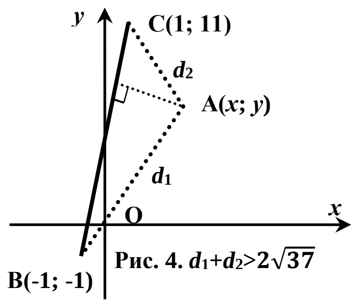

Рис. 4. $d_1+d_2>2\sqrt{37}$

Задача 3. При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2} = 3, \\ y^2-(2a+1)y+a^2+a-2 = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Очевидно, що $y_1=a+2$ і $y_2=a-1$ є коренями другого рівняння системи.

З першого рівняння системи випливає, що у прямокутній декартовій системі координат площини сума відстаней від точки A(x, y) до точок B(a; 0), C(a; 3) дорівнює 3 (див. рис. 5, 6). Легко переконатися, що відстань між точками B і C також дорівнює 3. Це означає, що точка A(x, y) належить відрізку BC, але пряма BC перпендикулярна до вісі Ox і її рівняння $x=a$ (в цьому легко переконатися), тоді $0 \le y \le 3$.

З $y_1=a+2$ і $0 \le y \le 3$ випливає, що $-2 \le a \le 1$, а з $y_2=a-1$ і $0 \le y \le 3 - 1 \le a \le 4$. Але при $a=1$ маємо, що $y_1=3$ і $y_2=0$, а й це означає, що задана система має два розв'язки. Таким чином, якщо $a \in [-2; 1)$ і $a \in (1; 4]$, то задана система має єдиний розв'язок.

Зауваження. Задачі 2 і 3 можна було б розв'язати, використовуючи алгебраїчні методи, але наведені розв'язання є найпростішими.

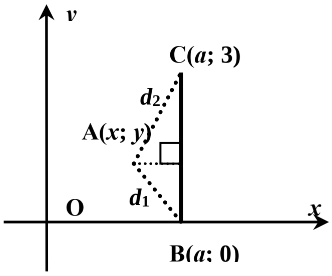

Рис. 5. $d_1+d_2>3$

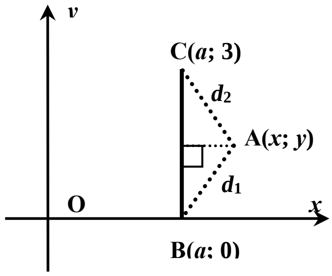

Рис. 6. $d_1+d_2>3$

Задача 4. Знайти усі дійсні значення параметрів a і b, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2+40=a^2-12x+4y, \\ x^2+(-2b-8)x+y^2=2by-8b-2b^2 \end{cases}$$

має два розв'язки (x_1; y_1) і (x_2; y_2), що задовольняють умову

$$\frac{x_1+x_2}{y_1-y_2}=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}.$$

Розв'язання. З останньої умови задачі випливає, що розв'язки (x_1; y_1) і (x_2; y_2) лежать на колі K(O, r) з центром в точці O(0; 0) деякого радіуса r, оскільки

$$\frac{x_1+x_2}{y_1-y_2}=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2.$$

Перепишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases} (x+6)^2+(y-2)^2=a^2, \\ (x-(b+4))^2+(y-b)^2=16. \end{cases}$$

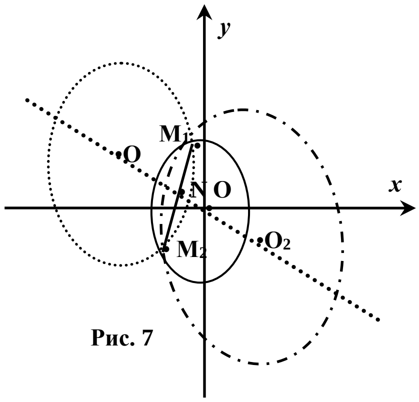

Рис. 7

Рівняння останньої системи визначають кола $K_1(O_1, r_1)$ і $K_2(O_2, r_2)$ з центрами в точках $O_1(-6; 2)$, $O_2(b+4; b)$ і радіусами $r_1=|a|$, $r_2=4$, відповідно. Таким чином, координати точок $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ повинні задовольняти одночасно рівняння трьох кіл, виписаних вище. Це означає, що усі вони мають перетинатися у цих точках (див. рис. 7).

Легко переконатися (див. рис. 7), що точки O, O_1 і O_2 лежать на одній прямій, що проходить через точку N і яка є серединним перпендикуляром до M_1M_2. Складемо рівняння прямої, що проходить через точки O_1 і O_2:

$$\frac{x+6}{b+10}=\frac{y-2}{b-2}.$$

Підставляючи у дане рівняння координати точки O(0; 0), отримаємо

$$\frac{0+6}{b+10}=\frac{0-2}{b-2}\Leftrightarrow 6(b-2)=-2(b+10)\Leftrightarrow b=-1.$$

Кола $K_1(O_1, r_1)$ і $K_2(O_2, r_2)$ перетинатимуться у двох точках тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$O_1O_2-r_2<r_1<O_1O_2+r_2 \Leftrightarrow O_1O_2-4<|a|<O_1O_2+4$.

Оскільки $O_1O_2=\sqrt{(3-(-6))^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$, то отримуємо

$3\sqrt{10}-4<|a|<3\sqrt{10}+4$.

Отже, якщо $b=-1$ і $3\sqrt{10}-4<|a|<3\sqrt{10}+4$, то задана система має два розв'язки (x_1; y_1) і (x_2; y_2), що задовольняють умову

$$\frac{x_1+x_2}{y_1-y_2}=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}.$$

Висновки. За сучасних умов уже недостатньо просто навчити учнів, дати їм певну, досить значну суму знань, а необхідно навчати їх застосовувати отримані знання з урахуванням міжпредметних зв'язків.

Посилюючи реалізацію міжпредметних зв'язків, можна точніше визначити роль алгебри і геометрії у навчальній діяльності учнів ЗНЗ.

Крім того, серед причин, які зумовлюють недоліки у використанні міжпредметних зв'язків при вивченні алгебри і геометрії, потрібно відзначити слабке забезпечення вчителів навчально-методичною літературою та й зменшенням кількості учнів, бажаючих поглиблено вивчати математику.

Вважаємо, що наведені приклади розв'язаних задач алгебри з використанням геометрії, допоможуть учителям при підготовці до занять, а учням розширять кругозір, збагатять математичними ідеями, допоможуть при поглибленому вивченні математики, підготовці до олімпіад і конкурсів з математики різного рівня.

ЛІТЕРАТУРА

1. Козко А.И. Задачи с параметрами и другие сложные задачи / А.И. Козко, В.Г. Чирский. – М. : МЦНМО, 2007. – 296 с.
2. Колесник С.Г. Про міжпредметні зв'язки в курсах алгебри та геометрії / С.Г. Колесник // Зб. наук. праць. Педагогічні науки. – Херсон, 2002. – Вип. 27. – С. 39-43.
3. Хазін А. Здійснення міжпредметних зв'язків між алгеброю та геометрією / А. Хазін // Математика в школі. – 2005. – № 2. – С. 25-28.
4. Хазін А.І. Приклади здійснення міжпредметних зв'язків між алгеброю та геометрією / А.І. Хазін, Г.А. Хазін // Теорія та методика навчання математики, фізики, інфолрматики : Збірник наукових праць. Випуск V : В 3-х томах. – Т. 1 : Теорія та методика навчання математики. – Кривий Ріг, Видавничий відділ, 2005. – С. 334-341.

REFERENCES

1. Kozko A.I. Problems with parameters and other complex problems / A.I. Kozko, V.G. Chirsky – M. : МЦММО, 2007. – 296 с.
2. Kolesnik S.G. On Intersubject Communications in Algebra and Geometry Courses / S.G. Kolesnik // Sb. sciences works. Pedagogical sciences. - Kherson, 2002. – Vip. 27. – P. 39-43.
3. Khazin A. Implementation of interdisciplinary connections between algebra and geometry / A. Khazin // Mathematics in school. – 2005. – № 2. – P. 25-28.
4. Khazin A.I. Examples of implementation of intersubject connections between algebra and geometry / A.I. Khazin, G.A. Khazin // Theory and methodology of mathematics, physics, infrarmatics training: Collection of scientific works. Issue V: In 3 volumes. – T. 1: Theory and methodology of mathematics teaching. – Kryviy Rih, Publishing Department, 2005. – P. 334-341.

Intersubject communications in solving algebra problems using geometry

I. V. Zhitaryuk, V. N. Luchko, V. S. Luchko

Abstract. The paper discusses the possibilities and advantages of using intersubject relations of algebra and geometry in the framework of the program on mathematics for general educational institutions (OUZ), illustrated by examples of solving problems of different levels of complexity. It is noted that the use of the proposed approaches to the solution of the proposed problems in algebra with the use of geometry, will broaden the horizon and enrich the students of the University with mathematical ideas i will help them with in-depth study of mathematics and preparation for the olympiads in mathematics of different levels.

Keywords: *algebra, geometry, problem, intersubject connections.*

Межпредметные связи при решении задач алгебры с использованием геометрии

И. В. Житарюк, В. Н. Лучко, В. С. Лучко

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы возможностей и преимуществ использования межпредметных связей алгебры и геометрии в рамках программы по математике для общеобразовательных учебных заведений (ОУЗ), проиллюстрированных на примерах решения задач разного уровня сложности. Отмечено, что использование предложенных подходов к решению предложенных задач алгебры с использованием геометрии, расширит кругозор и обогатит учеников ОУЗ математическими идеями и поможет им при углубленном изучении математики и подготовке к олимпиадам по математике разного уровня.

Ключевые слова: *алгебра, геометрия, задача, межпредметные связи.*