MATHEMATICS

Оцінювання параметра Хюрста дробових броунівського поля за спостереженнями з похибками

***Н. С. Аюбова, О. О. Курченко**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
*Corresponding author. E-mail: n.aiubova@gmail.com

Paper received 15.12.18; Accepted for publication 22.12.18.

https://doi.org/10.31174/SEND-NT2018-186VI22-07

Анотація. Отримана консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського поля за спостереженнями з адитивними похибками на дискретній множині точок. Наведені достатні умови сильної консистентності цієї оцінки та побудовані довірчі інтервали.

Ключові слова: *Параметр Хюрста, дробовий броунівський рух, дробове броунівське поле, консистентна оцінка, довірчі інтервали.*

1. Вступ. Випадковий гауссовий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B_H(s,t)=\frac{1}{2}\left(|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}\right),\ t,s\in \mathrm{R}$$

називається випадковим процесом дробового броунівського руху (ДБР) з параметром Хюрста $H\in(0,1)$. Цей випадковий процес застосовують у сучасних моделях гідрології, метеорології, фінансової і страхової математики та інших галузей науки і техніки. Одним із узагальнень ДБР є гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і коваріаційною функцією

$$r(s,t)=\frac{1}{2}(\|s\|^{2H}+\|t\|^{2H}-\|s-t\|^{2H}),s,t\in\mathbb{R}^d, \tag{1}$$

де параметр Хюрста $H\epsilon(0,1)$, $\|\cdot\|$ – евклідова норма у $\mathbb{R}^d$. Це випадкове поле назвемо дробовим броунівським полем (ДБП).

У сучасних застосуваннях теорії випадкових процесів та полів виникають задачі оцінювання за спостереженнями з похибками. Так, наприклад, у монографії [1] розглядаються застосування моделей регресії з похибками вимірювання до оцінювання радіаційних ризиків.

2. Короткий огляд публікацій по темі. У статті [2] за допомогою бакстерівських сум побудована консистентна оцінка параметра Хюрста ДБП та знайдені довірчі інтервали. Оцінювання параметра Хюрста ДБР за спостереженнями з похибками досліджувалося у статтях [3, 4]. При цьому у статті [3] отримана оцінка параметра Хюрста ДБР за спостереженнями з похибками вимірювань на обмеженому проміжку, а у статті [3] – за спостереженнями з похибками вимірювань на необмеженому проміжку, що дозволило отримати консистентність побудованої оцінки.

3. Мета роботи. Нехай $X(t)=X_H(t),t\in\mathbb{R}^d$ – ДБП з параметром Хюрста H, тобто гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією (1); $\bar{a}=(a,\dots,a)\in\mathbb{R}^d$, де додатне число $a\neq\frac{1}{\sqrt{d}}$. Випадкове поле $X(t),t\in\mathbb{R}^d$ спостерігається у точках $\{k\bar{a}|k\in\mathbb{N}\cup 0\}$, що лежать на промені $(t,\dots,t),t\geq 0$ у $\mathbb{R}^d$. При цьому значення ДБП у цих точках вимірюється з похибками $\delta_k,k\geq 0$. Відносно похибок зробимо такі припущення:

1.) $(\delta_k:k\geq 0)$ – послідовність незалежних однаково розподілених гауссових випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та відомою дисперсією σ^2;

2.) Послідовність випадкових величин $(\delta_k:k\geq 0)$ і ДБП $X(t),t\in\mathbb{R}^d$ незалежні.

Мета роботи – за спостереженнями випадкових величин $\eta_k=\eta_{k,H}=X_H(k\bar{a})+\delta_k,\ k\geq 0$ побудувати консистентну оцінку параметра Хюрста H.

4. Методи дослідження. У цій роботі використовуються методи теорії ймовірностей та математичної статистики, математичного аналізу, теорії гауссових випадкових функцій, а також методика оцінювання параметра Хюрста ДБР за спостереженнями з похибками на необмеженому проміжку, розвинута у статтях [3, 4].

5. Результати та їх обговорення.

Покладемо $\xi_k=\xi_{k,H}=\eta_{k+1,H}-\eta_{k,H}, \quad k\geq 0;$

$$S_n=S_{n,H}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^2, \quad n\geq 1.$$

Обчислимо математичне сподівання випадкової величини S_n. Маємо

$$E\xi_k^2=E(\eta_{k+1}-\eta_k)^2=E\big(X\big((k+1)a\big)+\delta_{k+1}-X(ka)-\delta_k\big)^2=$$
$$=E\left(X\big((k+1)a\big)-X(ka)\right)^2+E(\delta_{k+1}-\delta_k)^2=\left(\sqrt{d}a\right)^{2\mathrm{H}}+2\sigma^2,k\geq 0.$$

Таким чином, $ES_n=\left(\sqrt{d}a\right)^{2\mathrm{H}}+2\sigma^2,n\geq 1.$ Покладемо

$$\alpha(H)=\left(\sqrt{d}a\right)^{2\mathrm{H}}+2\sigma^2,H\in(0,1).$$

При $a\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{d}}\right)$ функція $\alpha(\cdot)$ спадна з множиною значень $(da^2+2\sigma^2,1+2\sigma^2)$, а при $a\in\left(\frac{1}{\sqrt{d}},+\infty\right)$ – зростаюча з множиною значень $(1+2\sigma^2,da^2+2\sigma^2)$. Далі розглянемо випадок $a>\frac{1}{\sqrt{d}}$. Обернена функція до функції $\alpha(\cdot)$ має вигляд

$$H=\frac{1}{2}\frac{\log(y-2\sigma^2)}{\log(a\sqrt{d})}$$

з множиною визначення $(1+2\sigma^2,da^2+2\sigma^2)$.

Покладемо

$$\Theta(y)=\begin{cases}0, & y\le 1+2\sigma^2;\\ \frac{1}{2}\frac{\log(y-2\sigma^2)}{\log(a\sqrt{d})}, & (1+2\sigma^2, da^2+2\sigma^2);\\ 1, & y\ge da^2+2\sigma^2.\end{cases}\qquad (3)$$

Теорема 1. Для довільного значення параметра Хюрста $H\in(0,1)$ має місце збіжність $S_n\to\alpha(H)$ за ймовірністю при $n\to\infty$.

Доведення. Доведемо, що для довільного $H\in(0,1)$

$$E(S_n-\alpha(H))^2\to 0, n\to\infty. \qquad (4)$$

що означає збіжність послідовності S_n до $\alpha(H)$ у середньому квадратичному, а отже і за ймовірністю. Оскільки $ES_n=\alpha(H)$, то $E(S_n-\alpha(H))^2=E(S_n-ES_n)^2=VarS_n$. Далі,

$$VarS_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}\left(E(\xi_i^2\xi_j^2)-E\xi_i^2E\xi_j^2\right).$$

Внаслідок загальної формули для моментів випадкових величин, що мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням [5], отримуємо рівність

$$E(\xi_i^2\xi_j^2)-E\xi_i^2E\xi_j^2=2E(\xi_i\xi_j)^2,\quad 0\le i,j\le n-1 \qquad (5)$$

звідки випливає, що

$$VarS_{n,H}=\frac{2}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}\left(E(\xi_i\xi_j)\right)^2.$$

Внаслідок другого припущення, математичне сподівання

$$E(\xi_i\xi_j)=E\Big(\big(X_H((i+1)a)+\delta_{i+1}-X_H(ia)-\delta_i\big)\big(X_H((j+1)a)+\delta_{j+1}-X_H(ja)-\delta_j\big)\Big)=$$

$$=E\Big(\big(X_H((i+1)a)-X_H(ia)\big)\big(X_H((j+1)a)-X_H(ja)\big)\Big)+E\Big((\delta_{i+1}-\delta_i)(\delta_{j+1}-\delta_j)\Big),\quad 0\le i,j\le n-1. \qquad (6)$$

Перший та другий доданки у правій частині рівності (6) позначимо A_{ij} та B_{ij} відповідно.

За допомогою формули (1) знаходимо

$$A_{ij}=\frac{(a\sqrt{d})^{2H}}{2}\left(|i-j-1|^{2H}+|i-j+1|^{2H}-2|i-j|^{2H}\right),\quad 0\le i,j\le n-1. \qquad (7)$$

Оскільки $(\delta_k:k\ge 0)$ – послідовність незалежних випадкових величин з нульовим середнім та дисперсією σ^2, то

$$B_{ij}=\begin{cases}2\sigma^2, & i=j;\\ -\sigma^2, & |i-j|=1;\\ 0, & |i-j|\ge 2,\ 0\le i,j\le n-1.\end{cases} \qquad (8)$$

Таким чином,

$$VarS_n=\frac{2}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}(A_{ij}+B_{ij})^2=\frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(A_{ii}+B_{ii})^2+\frac{4}{n^2}\sum_{i,j=0,i<j}^{n-1}(A_{ij}+B_{ij})^2.$$

Внаслідок рівностей (7), (8),

$$VarS_n=\frac{2}{n}((a\sqrt{d})^{2H}+2\sigma^2)^2+\frac{4}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)(A_{0l}+B_{0l})^2=\frac{2}{n}((a\sqrt{d})^{2H}+2\sigma^2)^2$$

$$+\frac{4}{n^2}(n-1)\left((2^{2H}-2)\frac{(a\sqrt{d})^{2H}}{2}-\sigma^2\right)^2+\frac{4}{n^2}\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)A_{0l}^{\ 2}.$$

Покладемо

$$L_n=\frac{2}{n}((a\sqrt{d})^{2H}+2\sigma^2)^2+\frac{4}{n^2}(n-1)\left((2^{2H}-2)\frac{(a\sqrt{d})^{2H}}{2}-\sigma^2\right)^2, n\ge 1$$

$$K_n=\frac{4}{n^2}\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)A_{0l}^2, n\ge 3,$$

так, що

$$VarS_n=L_n+K_n.$$

Очевидно, для довільного $H\in(0,1)$

$$L_n=O\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty \qquad (9)$$

Далі,

$$0\le K_n\le\frac{4}{n}\sum_{l=2}^{n-1}A_{0l}^2. \qquad (10)$$

Із рівності (7) слідує, що

$$A_{0_n}=\frac{(a\sqrt{d})^{2H}}{2}\left((n-1)^{2H}+(n+1)^{2H}-2n^{2H}\right), n\ge 2$$

Вираз $(n-1)^{2H}+(n+1)^{2H}-2n^{2H}$ є приростом другого порядку функції $f(x)=x^{2H}$ на відрізку $[n-1,n+1]$, звідки $(n-1)^{2H}+(n+1)^{2H}-2n^{2H}=f''(\theta_n)=2H(2H-1)\theta_n^{2H-2}$, де $\theta_n\in(n-1,n+1)$. Оскільки $2H-2<0$ та $\theta_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$, то $\lim_{n\to+\infty}A_{0_n}=0$.

Із останньої рівності, внаслідок теореми Штольца,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}\sum_{l=2}^{n-1}A_{0l}^2=0 \qquad (11)$$

Із рівності (11) та подвійної нерівності (10) випливає, що $K_n\to 0$ при $n\to+\infty$

Отже, для довільного $H\in(0,1)$ дисперсія $VarS_n=L_n+K_n\to 0, n\to+\infty$. Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай $(b_n)\subset\mathbb{N}$ така зростаюча послідовність, що для довільного $\alpha>0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^{-\alpha}$ збіжний. Тоді для довільного $H\in(0,1)$ послідовність $S_{b_n}\to\alpha(H)$ з ймовірністю одиниця при $n\to+\infty$.

Доведення. Із відношення підпорядкованості (9) випливає, що для довільного $H\in(0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}L_{b_n}$ збіжний. Повернемося до подвійної нерівності (10). Із рівності (7) випливає, що

$$A_{0l}=\frac{(\sqrt{d}a)^{2H}}{2}\left((l-1)^{2H}+(l+1)^{2H}-2l^{2H}\right)=\frac{(\sqrt{d}a)^{2H}}{2}2H(2H-1)\theta_l^{2H-2},$$

де $\theta_l\in(l-1,l+1)$. Тому

$$K_n\le\frac{4}{n}\frac{(\sqrt{d}a)^{4H}}{4}\sum_{l=2}^{n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H}}\le\frac{(\sqrt{d}a)^{4H}}{n}\left(1+\int_1^n\frac{dx}{x^{4-4H}}\right) \qquad (12)$$

Із цієї нерівності та нерівності (10) випливає, що

$$K_n=\begin{cases}O\left(\frac{1}{n}\right), & H\in\left(0,\frac{3}{4}\right);\\ O\left(\frac{\ln n}{n}\right), & H=\frac{3}{4};\\ O\left(\frac{1}{n^{4H-4}}\right), & H\in\left(\frac{3}{4},1\right), n\to+\infty.\end{cases}$$

Із цих відношень підпорядкованості слідує, що для довільного $H\in(0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}K_{b_n}$ збіжний. Отже, для довільного $H\in(0,1)$ ряд із дисперсій $\sum_{n=1}^{\infty}VarS_{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}L_{b_n}+\sum_{n=1}^{\infty}K_{b_n}$ збіжний, що є достатньою умовою для збіжності $S_{b_n}\to\alpha(H)$ з ймовірністю одиниця при $n\to+\infty$. Теорема доведена.

Теорема 3. Статистика $\Theta_n=\Theta(S_n), n\ge 1$ є консистентною оцінкою параметра Хюрста H ДБП. При цьому статистика $\tilde{\Theta}_n=\Theta(S_{2^n}), n\ge 1$ – строго консистентна оцінка цього параметра.

Доведення. Функція Θ неперервна на $\mathbb{R}$. Тому із збіжності $S_n\to\alpha(H)$ за ймовірністю випливає, що

$\Theta(S_n) \to \Theta(\alpha(H)) = H$ за ймовірністю при $n \to +\infty$. Для довільного $\alpha > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha}$ збіжний. Тому друге твердження випливає із теореми 2. Теорема доведена.

Однією з переваг застосованого підходу до оцінювання параметра Хюрста є в можливість побудови довірчих областей без застосування граничних теорем. Побудуємо довірчий інтервал для параметра Хюрста ДБП. Нехай $1-p$ заданий рівень довіри. Внаслідок нерівності Чебишова, для довільного $\varepsilon > 0$,

$$P\{|S_n - \alpha(H)| > \varepsilon\} = P\{|S_n - ES_n| > \varepsilon\} \le \frac{VarS_n}{\varepsilon^2}.$$

Для оцінки зверху дисперсії $VarS_n$ оцінимо зверху величини L_n та K_n, визначені у доведенні теореми 1. Величина L_n із застосуванням нерівності $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2), a, b \in \mathbb{R}$ оцінюється зразу для всіх $H \in (0,1)$:

$$L_n = \frac{2}{n}((a^2d)^H + 2\sigma^2)^2 + \frac{4}{n}\left((2^{2H}-2)\frac{(a^2d)^H}{2} - \sigma^2\right)^2 \le$$

$$\le \frac{2}{n}(da^2 + 2\sigma^2)^2 + \frac{8}{n}\left((2^{2H}-2)^2\frac{(da^2)^{2H}}{4} + \sigma^4\right) \le \frac{M}{n},$$

де $M = 2(da^2 + 2\sigma^2)^2 + 8((da^2)^2 + \sigma^4)$.

Оцінка (12) величини K_n як функція параметра $H \in (0,1)$ прямує до $+\infty$ при $H \to 1-$. Тому зафіксуємо $H_* \in (0,1)$ і зробимо припущення, що $H \in (0, H_*]$. Із нерівності (12) випливає, що для довільного $H \in (0, H_*]$

$$K_n \le \frac{(\sqrt{d}a)^{4H_*}}{n}\begin{cases} \frac{4-4H_*}{3-4H_*}, & H_* \in \left(0, \frac{3}{4}\right); \\ 1 + \log n, & H_* = \frac{3}{4}; \\ \frac{n^{4H_*-3}}{4H_*-3}, & H_* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right). \end{cases}$$

Через $K_n(H_*)$ позначимо праву частину останньої нерівності. Отже,

$$P\{|S_n - \alpha(H)| > \varepsilon_n\} \le \frac{1}{\varepsilon_n^2}\left(\frac{M}{n} + K_n(H_*)\right) \le p.$$

Покладемо $\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\frac{M}{n} + K_n(H_*)}{p}}$. Тоді

$$P\{|S_n - \alpha(H)| \le \varepsilon_n\} = P\{S_n - \varepsilon_n \le \alpha(H) \le S_n + \varepsilon_n\} =$$
$$= P\{\Theta(S_n - \varepsilon_n) \le H \le \Theta(S_n + \varepsilon_n)\} \ge 1 - p.$$

Таким чином, з ймовірністю не меншою ніж $1-p$, параметр Хюрста H належить інтервалу $(\Theta(S_n - \varepsilon_n), \min(H_*, \Theta(S_n + \varepsilon_n)))$.

6. Висновки. За спостереженнями з адитивними похибками звуження ДБП на необмежений проміжок побудована консистентна оцінка параметра Хюрста цього поля. Застосований підхід до оцінювання параметра Хюрста дозволив побудувати довірчі інтервали без застосування граничних теорем.

ЛІТЕРАТУРА

1. S.V. Masiuk, A.G. Kukush, S.V. Shklyar, M.I. Chepurny, I.A. Likhtarov (ed.), Radiation Risk Estimation: Based on Measurement Error Models. 2nd ed. (de Gruyter series in Mathematics and Life Sciences, vol. 5). de Gruyter, 2017. P. 240.
2. Kozachenko Yu.V., Kurchenko O.O. An estimate for the multiparameter FBM// Theory of Stochastic Processes. – 1999. Vol. 5 (21), No 3 – 4. – P. 113 – 119.
3. Synyavska O.O. Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error// Theory of Stochastic Processes – 2016. Vol. 21(37), no 1, 84 - 90.
4. Аюбова Н.С. Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі з похибками вимірювань//Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Матем. і інформ./Ужгород: УжНУ Говерла, 2017. №2 (31). – С. 10 – 14.
5. И.А. Ибрагимов, Ю.А. Розанов, Гауссовские случайные процессы, Наука, Москва, 1970.

REFERENCES

1. S.V. Masiuk, A.G. Kukush, S.V. Shklyar, M.I. Chepurny, I.A. Likhtarov (ed.), Radiation Risk Estimation: Based on Measurement Error Models. 2nd ed. (de Gruyter series in Mathematics and Life Sciences, vol. 5). de Gruyter, 2017. P. 240.
2. Kozachenko Yu.V., Kurchenko O.O. An estimate for the multiparameter FBM// Theory of Stochastic Processes. – 1999. Vol. 5 (21), No 3 – 4. – P. 113 – 119.
3. Synyavska O.O. Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error// Theory of Stochastic Processes – 2016. Vol. 21(37), no 1, 84 - 90.
4. Aiubova N.S. Estimation of the Hurst parameter of fractional Brownian motion in a model with measurement errors// Scientific Bulletin of Uzhgorod University. Series. Maths. and Informatics./ Uzhhorod: UzhNU Hoverla, 2017. No. 2 (31) . – P. 10 – 14.
5. I.A. Ibraguimov, Yu.A. Rozanov, Gaussian random Processes, Nauka, Moscow, 1970.

Estimation of the Hurst parameter of fractional Brownian fields by observations with errors

N. S. Aiubova, O. O. Kurchenko

Abstract. A consistent estimation of the Hurst parameter of a fractional Brownian field is obtained for observations with additive errors on a discrete set of points. Sufficient conditions for strong consistency of this estimation are listed and confidence intervals are constructed.

Keywords: *Hurst parameter, fractional Brownian motion, fractional Brownian field, consistent estimation, confidence intervals.*