

## TECHNICAL SCIENCES

### Динаміка моделі транспортного робота при поворотах

Н. С. Ащепкова, С. С. Капера, С. А. Ащепков

Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара  
Correspondsng autor. E-mail: ashchepkovanatalya@gmail.com

Paper received 29.06.18; Accepted for publication 05.07.18.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2018-171VI19-05>

**Анотація.** У роботі проведено дослідження динаміки транспортного робота при поворотах. Розглянуто модель з чотирьохколісною компоновкою шасі: повнопривідну та переднепривідну. На етапі динамічного моделювання розглянуто сили і моменти, які діють на окреме колесо. Складено математичну модель керованого руху транспортного робота. Здійснено математичне моделювання керованого руху транспортного робота при поворотах. На етапі імітаційного моделювання розглянуто моделі транспортного робота створені на базі Lego Mindstorms.

**Ключові слова:** модель, транспортний робот, шасі, динаміка, режим руху.

Транспортний робот, як об'єкт керування, це – багатоканальна, багатозв'язна, суттєво нелінійна динамічна система. Дослідженнями динаміки й керування транспортними роботами займалися С.Ф. Бурдаков, І.В. Мирошник, Є.І. Юревич, Ю.Г. Мартиненко, Б.В. Топчиєв та інші. Врахування нелінійності та багатозв'язності системи керування здійснено лише для часткових рішень.

Синтез закону керування плоским рухом транспортного робота з чотирьохколісним шасі, є типовою задачею для робототехнічних систем на колісній платформі. Відомо декілька методів для стабілізації руху вздовж заданої траєкторії. Е. Лаумонд у [1], Б. Сициліано та О. Хотіб у [2] пропонують перетворення системи з заміною координат і перетворення виходів до ланцюгових форм. У [3] С.Б. Ткачев здійснює перетворення системи до нормальної форми з подальшим диференціюванням по новій незалежній змінній [4, 5]. А.Н. Канатніков і Т.С. Касаткіна у [6], Б. Сициліано та О. Хотіб у [2] пропонують перетворити модель відносно шляхових координат, які добре фіксують відхилення від заданої траєкторії.

Існує особливий клас робототехнічних засобів орієнтованих на освітні цілі, це різноманітні рухливі платформи, набори механічних і (або) електронних компонентів, конструктори роботів. Проведений аналіз оглядів різних платформ і конструкторів дозволяє виділити конструктор Lego Mindstorms [7], який охоплює основні розділи робототехніки: механіку, електроніку і програмування. Застосування сторонніх середовищ для розробки алгоритмів керування роботом Lego Mindstorms дає можливість істотно підвищити складність розв'язуваних завдань [8], це обумовлює їхнє використання інженером – дослідником.

Для автономного робота з адаптивною системою керування, який діє у наперед не визначених умовах зовнішнього середовища, рушійна система та алгоритми керування мають бути відпрацьовані на моделі. При проектуванні автономного робота економічно доцільно проводити не лише математичне, але й імітаційне моделювання.

Таким чином, дослідження динаміки транспортного робота методами математичного та імітаційного моделювання є актуальною науково-прикладною задачею.

**Мета дослідження** полягає у підвищенні ефективності використання автономного транспортного робота, який діє у наперед не визначених умовах зовнішнього середовища.

**Об'єкт дослідження:** транспортний робот, тобто керований колісний візок, оснащений нерухомими пристроями (камера, мікрофон, дозиметр і т. ін.). Система керування дозволяє рухатися у обмеженому просторі (робочій зоні) за заданою траєкторією з використанням GPS навігації або орієнтуванням по карті чи маякам. В межах робочої зони можливі перешкоди, які мають бути подолані з найменшим відхиленням від заданого маршруту.

**Методи дослідження:** сформульовані в роботі висновки, наукові припущення й рекомендації базуються на фундаментальних положеннях теоретичної механіки, теорії диференціальних рівнянь й теорії керування.

**Динамічне моделювання.**

**Сили й моменти, що діють на колесо моделі робота.** Перш ніж перейти до аналізу руху моделі робота розглянемо рівняння руху окремого навантаженого колеса. Припустимо, що до приводного колеса прикладений обертальний момент  $M_k$  (рис.1, а), зовнішніми силами стосовно колеса є вага колеса  $P_k$ , нормальна реакція дороги  $N_k$ , сила тертя  $T_k$ , зовнішній момент  $M$ , момент тертя катання  $M_{TK}$ . Розглянемо випадок, коли  $N_k \geq P_k$ .

Направимо вісь  $X$  уздовж горизонтального шляху. Складемо диференціальні рівняння руху колеса за умови, що  $N_k = P_k$ ,  $Y_k = 0$ :

$$\begin{aligned} m_k \cdot \ddot{x}_k &= T_k, \\ J_k \cdot \dot{\omega}_k &= T_k \cdot r_k - M_\Sigma, \\ M_\Sigma &= M_k - k \cdot N_k, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $r_k$  – радіус колеса,  $k$  – коефіцієнт опору коченню,  $\omega_k$  – кутова швидкість колеса,  $m_k$  – маса колеса,  $J_\Sigma$  – сумарний момент інерції колеса,  $M_{TK} = k \cdot N_k$ .

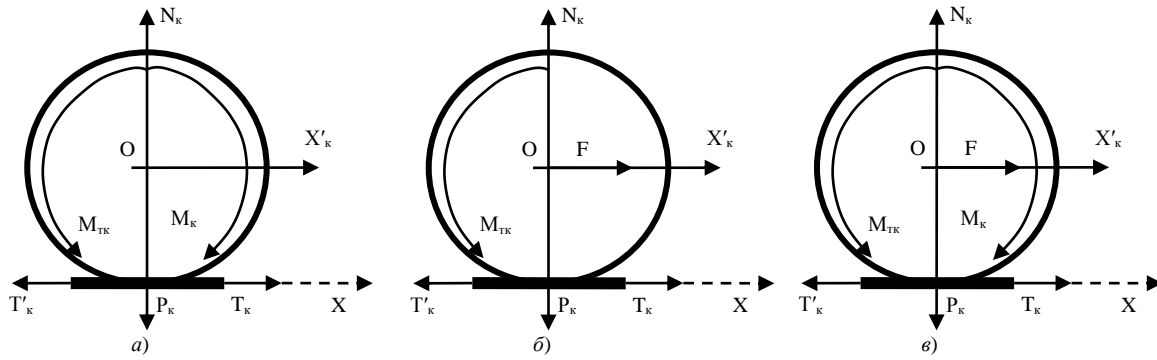


Рис. 1.

Момент  $M_k$  створюється електродвигуном, який передає обертання колесу через редуктор з передатним співвідношенням  $\eta$  ( $\eta < 1$ ),

$$J_\Sigma = J_k + \tilde{J}_g,$$

де  $J_k = \frac{m_k \cdot r_k^2}{2}$  – момент інерції колеса,  $\tilde{J}_g = \frac{J_g}{\eta^2}$  – момент інерції ротора електродвигуна, наведений до колеса.

Якщо колесо котиться без ковзання, крапка торкання колеса з дорогою є миттєвим центром швидкостей у русі колеса. Тому швидкість центра колеса  $\dot{x}_k$  є обертальною швидкістю навколо миттєвого центра швидкостей, маємо:

$$T_k = -r_k \cdot \omega_k, \text{ а } \ddot{x}_k = -r_k \cdot \dot{\omega}_k. \quad (2)$$

З огляду на (2) з (1) знаходимо  $T_{ki} \ddot{x}_k$ :

$$T_k = \frac{m_k \cdot r_k \cdot M_k}{J_\Sigma + m_k \cdot r_k^2}, \quad \ddot{x}_k = \frac{T_k}{m_k},$$

$\omega_k$  визначається інтегруванням (1) або (2).

Для того, щоб колесо рухалось без ковзання, має виконуватись умова  $T_k \leq f \cdot P_k$ , де  $f$  – коефіцієнт тертя між колесом і дорогою; якщо  $T_k \geq f \cdot P_k$  буде спостерігатися буксування колеса.

Розглянемо випадок, коли до осі колеса прикладена сила  $F$  (рис. 1, б). Диференціальне рівняння руху в цьому випадку має вигляд:

$$m_k \cdot \ddot{x}_k = F - T_k^i, \\ J_\Sigma \cdot \dot{\omega}_k = -T_k^i \cdot r_k + M_{TK}.$$

Швидкість  $\dot{x}_k$ , як і в попередньому випадку, повинна бути обертальною швидкістю навколо миттєвого центра швидкостей  $\dot{x}_k = -r_k \cdot \omega_k$ ,  $\ddot{x}_k = -r_k \cdot \dot{\omega}_k$ .

Виразимо із рівнянь  $\dot{\omega}_k$  і знаходимо  $T_k^i$ :

$$T_k^i = \frac{F \cdot J_\Sigma + M_{TK} \cdot r_k \cdot m_k}{J_\Sigma + m_k \cdot r_k^2}.$$

Для відсутності ковзання необхідно, щоб  $T_k^i < \dot{x}_k \cdot r_k$ .

Розглянемо випадок, коли до колеса прикладені сили й моменти (рис. 1, в). У цьому випадку рівняння руху мають вигляд:

$$m_k \cdot \ddot{x}_k = F - T_k^i + T_k, \\ J_\Sigma \cdot \dot{\omega}_k = (T_k - T_k^i) \cdot r_k - M_\Sigma.$$

Роблячи перетворення, наведені вище, одержимо формулу для обчислення  $\ddot{x}_k$ :

$$T_k - T_k^i = \frac{m_k \cdot r_k \cdot M_\Sigma - J_\Sigma \cdot F}{m_k \cdot r_k^2 + J_\Sigma}, \quad \ddot{x}_k = \frac{F + T_k^i - T_k}{m_k} = \frac{r_k (M_\Sigma + F \cdot r_k)}{m_k \cdot r_k^2 + J_\Sigma}.$$

Відзначимо фізичні основи цієї моделі. Коли колесо є приналежністю моделі робота, сила  $F$  характеризує вплив моделі робота на окреме колесо  $F = T_{cp} - T_{ki}$ , де  $T_{cp}$  – середня рушійна сила колеса

$$T_{cp} = \sum_{i=1}^4 \frac{T_{ki}}{4}.$$

Динаміка поступального руху моделі робота. З огляду на вищевикладене, наведемо формули, що визначають поступальний рух моделі робота. У випадку, коли модель – повнопривідна, тобто сили й моменти, які діють на кожне колесо однакові (рис. 2.), рівняння руху моделі робота мають вигляд:

$$m_m \cdot \ddot{x}_m = T_\Sigma, \\ J_\Sigma \cdot \dot{\omega}_{ki} = T_{ki} \cdot r_k - M_{\Sigma i}.$$

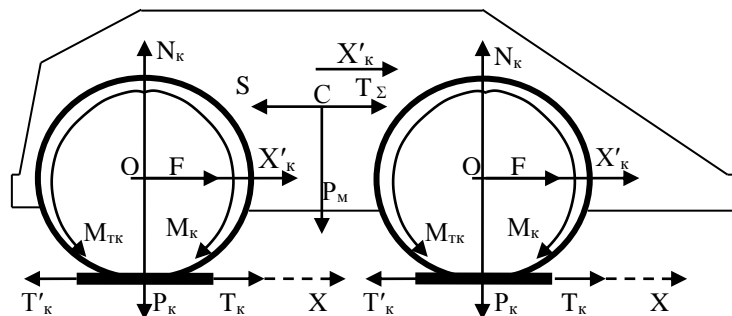


Рис. 2.

На малюнку позначено  $m_m = \frac{P_m}{g}$  – маса моделі ро-

бота,  $T_{\Sigma}$  – сумарна сила тертя коліс:  $T_{\Sigma} = \sum_{i=1}^4 T_{\kappa i}$ . Отже

$$T_{\kappa i} = \frac{m_M \cdot r_{\kappa} \cdot M_{\Sigma i}}{m_M \cdot r_{\kappa}^2 - 4 \cdot J_{\Sigma}}, \quad \ddot{x}_M = \frac{T_{\Sigma}}{m_M}, \quad \dot{\omega}_{\kappa i} = -\frac{\ddot{x}_M}{r_{\kappa}}$$

Рівняння ланцюга статора двигуна

$$L_{CT} \frac{dJ_{CT}}{dt} + R_{CT} \cdot J_{CT} + C_{\Sigma} \cdot \omega_g = U_g,$$

де  $L_{CT}$  – індуктивність обмотки статора,  $R_{CT}$  – опір обмотки статора,  $J_{CT}$  – струм обмотки статора,  $\omega_g$  – кутова швидкість обертання ротора.

**Основні кінематичні співвідношення при повороті.**

Рух моделі робота по криволінійній траєкторії є плоскопаралельним рухом твердого тіла, яке можна розглядати в кожний момент часу як обертання навколо миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

При реалізації такого обертання без проковзування коліс необхідна рівність кутових швидкостей крапок А, В, С, Д і О (рис. 3) навколо МЦШ (крапка М).

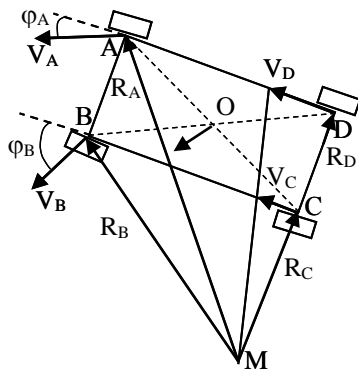


Рис. 3.

Використовуючи ці співвідношення, визначимо співвідношення лінійних швидкостей крапок А, В, С, Д і О:

$$\frac{V_A}{R_A} = \frac{V_B}{R_B} = \frac{V_C}{R_C} = \frac{V_D}{R_D} = \frac{V_O}{R_O}$$

Якщо відома швидкість і радіус обертання будь-якої із зазначених крапок, інші легко визначаються з урахуванням геометричних співвідношень:

$$R_A = \frac{F}{\sin \varphi_A}, \quad R_B = \frac{F}{\sin \varphi_B}, \quad R_C = F \cdot \text{ctg} \varphi_A, \quad R_D = F \cdot \text{ctg} \varphi_B,$$

де  $\varphi_A, \varphi_B$  – кути повороту передніх привідних коліс, які задають радіуси обертання крапок А, В, С, Д моделі робота.

**На етапі математичного моделювання** дослідження керованого руху транспортного робота при поворотах здійснено у середовищі Mathcad. Рух моделі робота по криволінійній траєкторії уважаємо плоскопаралельним рухом твердого тіла, яке можна розглядати в кожний момент часу як обертання навколо миттєвого центра швидкостей.

**На етапі імітаційного моделювання** проводилися експериментальні дослідження поворотів моделей транспортного робота на базі Lego Midstorms з чотирьохколісною компоновкою шасі: повнопривідною та переднепривідною з опорними роликами (рис. 4).

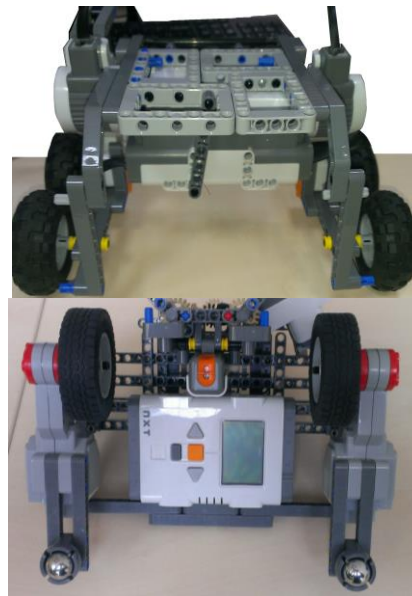


Рис. 4.

Дослідження динаміки моделі транспортного робота при поворотах проводилося за умов однакових масогабаритних параметрах моделей. Критерієм оцінки обрано мінімальний радіус повороту моделі робота та співвідношення  $\frac{V_A}{V_C}, \frac{V_B}{V_D}, \frac{V_D}{V_C}, \frac{V_B}{V_A}$  в залежності від

радіуса повороту  $R_C$ . За умови стійкості моделі на поворотах задано граничні кути:  $\varphi_A = 49^\circ, \varphi_B = 36^\circ$ . Тоді мінімальні радіуси обертання крапок А, В, С, Д обумовлені мінімальним радіусом повороту моделі робота, становлять:

для повнопривідної компоновки шасі  
 $R_{A \min} = 6,62$  см,  $R_{B \min} = 8,50$  см,  $R_{C \min} = 4,35$  см,  $R_{D \min} = 6,88$  см;

для переднепривідної компоновки з опорними роликами  
 $R_{A \min} = 2,65$  см,  $R_{B \min} = 3,40$  см,  $R_{C \min} = 1,75$  см,  $R_{D \min} = 2,75$  см.

У табл.1 представлені результати розрахунку співвідношень швидкостей для повнопривідної компоновки шасі в залежності від радіуса  $R_C$  при повороті моделі транспортного робота.

**Таблиця 1. Результати розрахунку співвідношень швидкостей для повнопривідної компоновки шасі**

$R_C$ , см	4	5	6	7	8
$V_A/V_C$	1,7	1,2	1,1	1,05	1,02
$V_B/V_D$	1,25	1,15	1,08	1,03	1,01
$V_D/V_C$	1,9	1,47	1,31	1,24	1,2
$V_B/V_A$	1,37	1,29	1,26	1,21	1,2

З таблиці видно, що при мінімальному радіусі  $R_C$  швидкості  $V_A, V_B, V_C, V_D$  розрізняються досить значно, так початкові величини  $\frac{V_D}{V_C} = 1,9, \frac{V_B}{V_A} = 1,37$ , але при збільшенні радіуса повороту  $R_C$  ці співвідношення зменшуються й прагнуть до 1,2.

Таким чином, для забезпечення ідеальних кінематичних співвідношень, що дозволяють проводити поворот моделі робота без пригальмовування коліс, необхідне завдання командних сигналів, що відповідають різним швидкостям крапок А, В, С, D. Цього можна досягти при повнопривідній компоновці з програмним керуванням кутовою швидкістю кожного колеса.

У зв'язку із труднощами реалізації цього завдання доводиться йти на усереднення зазначених співвідношень із відомим неповним виконанням вимог кінема-

тики, що приведе до деяких втрат енергетики при поворотах на радіусах близьких до мінімального.

Наведені дані підтверджують ефективність використання для моделі транспортного робота шасі з двома приводними колесами та опорними роликками. Запропонована конструкція відрізняється від чотириколісних шасі високою маневреністю (здатність виконувати поворот на місці), а від триколісних шасі – високою прохідністю.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Laumond Ed. J.-P.. Ser. Lectures Notes in Control and Information Sciences. Robot Motion Planning and Control // v. 229. Springer. 1998. 343 p.
2. Siciliano B., O. Khatib. Handbook of Robotics// Springer. 2008. Pp. 799 – 825.
3. Тачев С.Б. Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с векторным управлением // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журнал 2012, № 8. режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/450613.html>.
4. Андрианова О.Р.Г. Моделирование движения колесного робота по заданному пути// Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журнал 2011, № 10. режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/239840.html>.
5. Гилимьянов Р.Ф., Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б. Управление движением колесного робота в задаче следования вдоль криволинейного пути // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. Т.47, № 6. С. 158 – 165.
6. Канатиков А.Н., Касаткина Т.С. Особенности перехода к путевым координатам в задаче путевой стабилизации// Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журнал 2012, № 7. режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/445496.html>.
7. Перспективы развития робототехнических учебных стендов для высшего специального образования в области робототехники, автоматизации и мехатроники / В. А. Жмудь, А. Л. Печников, В.Г. Трубин, А.Б. Колкер // Труды конференции Scientific World – Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте. <http://www.sworld.com.ua/index.php/ru/technical-sciences-212/informatics-computer-science-and-automation-212/13341-212-831>
8. Сайт конструктора Lego Mindstorms NXT <http://www.mindstorms.com>

#### REFERENCES

1. Laumond Ed. J.-P.. Ser. Lectures Notes in Control and Information Sciences. Robot Motion Planning and Control // v. 229. Springer. 1998. 343 p.
2. Siciliano B., O. Khatib. Handbook of Robotics// Springer. 2008. Pp. 799 – 825.
3. Tkachev S.B. Stabilization of nonminimum-phase multi-input affine systems // Science and education. Scientific periodical of the Bauman MSTU. 2012, # 8. <http://technomag.edu.ru/doc/450613.html>.
4. Andrianova O.G. Path following simulation of wheeled vehicle // Science and education. Scientific periodical of the Bauman MSTU. 2011, #10. <http://technomag.edu.ru/doc/239840.html>.
5. Gilimyanov R.F., Pesterev A.V., Rapoport L.B. Motion control for a wheeled robot following a curvilinear path //Journal of Computer and Systems Science International. 2008. Vol.47, # 6. P. 987 – 994.
6. Kanatnikov A.N., Kasatkina T.S. Features of transition to path coordinates in a problem of path stabilization // Science and education. Scientific periodical of the Bauman MSTU. 2012, # 7. <http://technomag.edu.ru/doc/445496.html>.
7. Prospects of development of robototekhnicheskikh educational stands for the higher special education in area of robot, control and mechatronic / V. A. Zhmud', A. L. Pechnikov, V.G. Trubin, A.B. Kolker // Works of a conference "Scientific World – Perspective innovations are in science, education, production and transport. <http://www.sworld.com.ua/index.php/ru/technical-sciences-212/informatics-computer-science-and-automation-212/13341-212-831>
8. Site of designer of Lego Mindstorms NXT <http://www.mindstorms.com>

#### Dynamics of transport robot model during the turns

**N. S. Ashchepkova, S. A. Ashchepkov, S. S. Kapera**

**Abstract.** In the article the research of the transport robot dynamics at the turns is done. A model with a four-wheeled chassis arrangement is considered: all-wheel drive and front-wheel drive. At the stage of dynamic modeling, the forces and moments that operate on a separate wheel are considered. A mathematical model of controlled traffic of a transport robot is made. The mathematical modeling of the controlled traffic of a robot with turns is made. At the simulation modeling stage, the transport robot models created on the basis of Lego Midstorms NXT are considered.

**Keywords:** model, transport robot, chassis, dynamics, traffic mode

#### Динамика модели транспортного робота при поворотах

**Н. С. Ащепкова, С. С. Капера, С. А. Ащепков**

**Аннотация.** В работе представлены результаты исследования динамики транспортного робота при поворотах. Рассмотрена модель с чотирьохколесной компоновкою шасі: полноприводную и переднеприводную. На этапе динамического моделирования рассмотрены силы и моменты, действующие на отдельное колесо. Составлена математическая модель управляемого движения транспортного робота. Осуществлено математическое моделирование управляемого движения транспортного робота при поворотах. На этапе имитационного моделирования рассмотрены модели транспортного робота созданные на базе Lego Midstorms.

**Ключевые слова:** модель, транспортный робот, шасси, динамика, режим движения.