Ковариантные функторы конечной степени и $A(N)R(\mathfrak{M})$ пространства

Т. Ф. Жураев

ТГПУ имени Низами
Corresponding author. E-mail: tursunzhuraev@mail.ru

Paper received 10.10.17; Revised 22.10.17; Accepted for publication 28.10.17.

https://doi.org/10.31174/SEND-NT2017-148V16-08

Аннотация. В этой статье рассматриваем ковариантные функторы $F:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ имеющие конечные степени сохраняющие $A(N)R(\mathfrak{M})$ - пространства.

Keywords: *functor, finite degree, absolute retracts, absolute neighforhoods retracts, metrizable spaces dimension, stratifiable spaces, action,* G *-spaces.* ***MSC:*** *54B15, 54B30, 54B35, 54C05, 54C15, 54C60, 54D30 .*

Введение. В последнее время интенсивно исследуются ковариантные функторы в категории $Comp$ - компактов, $\mathfrak{M}$ - метризуемых пространств и непрерывных отображений в эту же категорию.

А так же рассмотрены послойные версии этих результатов. Достаточно полное и подробное изложение имеющихся результатов и нерешенных проблем в этом направлении можно найти в [1,4]. Теория категорий позволяет взглянуть на различные частные операции над пространством с общей точки зрения теории функторов. Послойной версией будем называть теоремы о сохранении свойств слоев отображений быть $A(N)R(\mathfrak{M})$- пространствами. Следует отметить также, что при минимальных ограничениях на функтор он переводит стягиваемые в стягиваемые. В самом деле, если непрерывная гомотопия h_t стягивает пространства в точку x, то непрерывная гомотопия $F(h_t)$ стягивает пространство $F(X)$ в множество $F(\{x\})$.

В дальнейшем мы предполагаем, что все рассматриваемые функторы мономорфны и сохраняют пересечения [4]. Мы предполагаем также, что все функторы сохраняют непустые пространства. Это ограничение несущественно, поскольку этим мы исключаем из рассмотрения только пустой функтор, т.е. функтор F, который переводит всякое пространство в пустое множество. В самом деле, пусть $F(X)=\varnothing$ для какого нибудь непустого бикомпакта X.

Тогда $F(X)=F(1)=\varnothing$ в силу мономорфности F. Пусть теперь Y - произвольный непустой бикомпакт. Рассмотрим постоянное отображение $f:Y\to 1$ тогда $F(f)(F(f))\subset F(1)=\varnothing$. Следовательно, пространство $F(Y)$ пусто, поскольку оно отображается в пустое множество. Итак, мы доказали, что существует единственный мономорфный функтор, сохраняющий непустые множества.

Пусть $F:Comp\to Comp$ - функтор. Через $C(X,Y)$ обозначается пространство непрерывных отображений из X и Y в бикомпактно-открытой топологии. В частности, $C(\{k\},Y)$ естественно гомеоморфно k-ой степени Y^k пространства Y.

Отображению $\xi:\{k\}\to Y$ ставится в соответствие точка $(\xi(0),...\xi(k-1))\in Y^k$.

Для функтора F, бикомпакта X натурального числа k, определим отображение $\pi_{F,X,k}:C(\{k\},X)\times F(\{k\})\to F(X)$ равенством $\pi_{F,X,k}(\xi,a)=F(\xi)(a)$ где $\xi\in C(\{k\},X),\alpha\in F(\{k\})$.

Когда ясно, о каком функторе и о каком бикомпакте Y идет речь, мы будем отображение $\pi_{F,X,k}$ обозначать через $\pi_{X,k}$ или π_k.

По теореме Е.В.Щепина [4], отображение $F:C(Z,Y)\to F(F(Z),F(Y))$ непрерывно для всякого непрерывного функтора F и бикомпактов Z и Y

Поэтому имеет место.

Предложение 1[4]. Для непрерывного функтора F, бикомпакта X и натурального числа k отображение $F_{\pi_{F,X,k}}$ непрерывно.

Определим подфунктор F_k функтора F следующим образом: для бикомпакта X пространство $F_k(X)$ есть образ отображения $\pi_{F,X,k}$, а для отображения $f:A\to X$ отображение $F_k(f)$ есть сужение отображения $F(f)$ на $F_k(f)$. Из легко проверяемой коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C(\{k\})\times F(\{k\}) & \xrightarrow{\bar f\times id} & C(\{k\},Y)\times F(\{k\}) \\ \pi_{X,k}\downarrow & & \downarrow\pi_{X,k} \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array}$$

где $\overline{f}(\xi)=f\circ\xi$ вытекает вложение $F(f)(F_k(X))\subset F_k(Y)$ и, следовательно, функториальность конструкции F_k.

Функтор F называется функтором степени n, если $F_n(X)=F(X)$ для всякого бикомпакта X, но $F_{n-1}(X)\neq F(X)$ для некоторого X.

Пусть X-некоторый бикомпакт; F-некоторый нормальный функтор и $a\in F(X)$. Степенью точки a называется такое наименьшее натуральное число n, что a принадлежащий образу $F(f)$ для некоторого отображения $f:K\to X$ n-точечного пространства K. Если такое конечное число n не существует, то степень точки a считается бесконечной.

Степенью функтора F называется максимум степеней всевозможных точек $x \in F(X)$ для всевозможных бикомпактов к [4]. Данная работа является продолжением работы [8], в котором исправляется некоторые пробелы.

Основная часть. Стратифицируемые (кружевные) пространства [10] кратко будем обозначать S - пространством.

Теорема 1. Пусть F такой непрерывный, мономорфный, сохраняющий пересечение, пустое множество и точку , функтор степени n, что отображение $\pi_{F,X,n}$ замкнуто, причем $F(n)$ компакт. Тогда F сохраняет S-пространства.

Доказательство. Пусть X есть S-пространство. Из приведенного имеем, что пространство $F(X)$ представляется как непрерывный замкнутый образ пространства $X^n \times F(n)$ при отображение $\pi_{F,X,n}$. Из результатов работы [10] следует, что $X^n \times F(n)$ есть S-пространство, как произведение S-пространств X^n и $F(n)$. В силу замкнутости отображения $\pi_{F,X,n}$ и конечной степени функтора F по теоремы [10] получим, что $F(X)$ есть S-пространство. Теорема 1 доказано.

Верно и следующее.

Следствие 1. Пусть F такой непрерывный, мономорфный сохраняющий перечение, пустое множество и точку функтор степени n, что отображение $\pi_{F,X,n}$ - совершенно, причем $F(n)$ метризуемый компакт. Тогда F сохраняет метризуемые пространства.

Теорема 2. Пусть функтор F удовлетворяет условиям теоремы 1 и $F(n)$ конечномерно. Тогда функтор F сохраняет конечномерные S-пространство. Более того верно неравенство : $\dim F(X) \le n \dim X + \dim F(n)$.

Доказательство. Пусть X есть S-пространство и $\dim X < \infty$ из теоремы 1 имеем, что $F_n(X)$ тоже S-пространство. Значит, $F_n(X)$ совершенно нормальный паракомпакт. Пусть $\pi_{F,X,n}$ описанное выше непрерывное отображение. Индукцией по степени функтора F_n положем, что $\dim F(X) \le n \dim X + \dim F(n)$.

При $n=1$ это неравенство справедливо, так как $F_n(X) \cong X_1 \times F(1) \cong X$. Пусть неравенство $\dim F_{n-1}(X) \le (n-1)\dim X + \dim F_{n-1}(n-1)$ доказано. Сначала покажем, что $rd_{F(X)}(F_n(X) \setminus F_n(X)) \le n \dim X + \dim F(n)$, где $rd_X A -$ относительная размерность подпространства А в пространстве X [5]. Подпространства $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ тоже S- пространство, следовательно, паракомпактно. Пространство $F_n(X)$ в точках множество $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ локально гомеоморфно открытому подмножеству произведения $X^n \times F(n)$.

Для произведения $X^n \times F(n)$ верно: $\dim(X^n \times F(n)) = n \dim X + \dim F(n)$ [9]. Из теоремы 21 Даукера-Нагами [5] получим, что $rd_{F(X)}(F_n(X) \setminus F_n(X)) \le n \dim X + \dim F(n)$. Тогда применяя другую теорему 15[5] Даукера получим, что $\dim F_n(X) = n \dim X + \dim F(n)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 2'. Если выполнены условия теоремы 2 и функтор сохраняет прообразы, то F послойно сохраняет конечномерные $S-$ пространство.

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ непрерывное отображение между регулярными пространствами. Из того, что функтор сохраняет прообразы отображений, имеем

$(F(f))^{-1}(b) \in (F(f))^{-1}(F(\mathrm{supp}_F(b)) = F(f^{-1}(\mathrm{supp}_F(b)))$, где $b \in F(Y)$. Из теоремы 2 вытекает, что $\dim F(f^{-1}(\mathrm{supp}_F(b))) < \infty$. Теорема 2' доказано.

Верны следующие.

Теорема 3. Если выполнены условия следствие 1. Тогда функтор F сохраняет конечномерные метрические пространства.

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 3 и функтор F сохраняет прообразы отображений, то F послойно сохраняет конечномерные метрические пространства.

Теорема 5. Пусть F - непрерывный, мономорфный, сохраняющий конечные пересечения, пустое множество и метрические пространства функтор степени n. Если $F(n)$ есть конечномерный метризуемый компакт и $F(k) \in ANR$ для $k = 1, 2, \ldots, n$ то функтор F сохраняет $ANR(\mathsf{M})$ пространства и конечномерные $ANR(\mathsf{M})$ пространства.

Доказательство. Пусть $X - ANR(\mathsf{M})$ пространство. В силу теоремы 3 достаточно доказать, что F сохраняет $ANR(\mathsf{M})$ пространства. По условию теоремы 5, если X метризуемо, то $F(X)$ метризуемо. С другой стороны $X^K \times F(K)$ метризуемо, $\pi_{X,F,k}: X^n \times F(k) \to F_k(X)$ выше описанное непрерывное отображение и $(\pi_{F,X,k})^{-1}(F_k(X)) = X^k \times F(k)$.

Индукцией по степени функтора F докажем, что $F(X) \in ANR(\mathsf{M})$. При $k=1$ это утверждение справедливо, так как пространство $F_1(X)$ гомеоморфно пространству $X \times F(1) \approx X$. Пусть доказано, что $F_{k-1}(X) \in ANR(\mathsf{M})$.

Теперь рассмотрим произведение $Z = C(k, X) \times F(k)$, на пространстве Z определим действие группы подстановок $S_k \subset C(k,k)$ (гомеоморфизмов пространства k) [11] следующим образом: для $\sigma \in S_k$ положим

$\psi(\sigma)(\eta,\rho)=(\eta)\psi(\sigma)(\eta,\rho)=\left(\eta\rho^{-1},F\left(\sigma(\rho)\right)\right)$, где $\eta\in C(k,k)$, $\rho\in F(k)$. Теперь покажем, что пространство Z с действием группы $G=S_k$ является $G-ANR(\mathsf{M})$ - пространством. Рассмотрим $C(k,X)$ первый сомножитель произведения $Z=C(k,X)\times F(k)$. Из следующего результата работы [6].

Теорема 3.3.20[6]. Пусть X -метризуемое $G-$ пространство и хотя бы X или C обладает счетной базой. Если $X=G-ANR$ (соответственно $X=G-AR$) тогда $C(G,X)\in G-ANR(\mathsf{M})$ (соответственно $C(G,X)\in G-AR(\mathsf{M})$).

Пространство $C(k,X)$ с действием группы $G=S_k$ есть $G-ANR(\mathsf{M})$ пространство [6].

Теперь рассмотрим второй сомножитель $F(k)$ произведения $C(k,X)\times F(k)$, на котором определено действие группы $G=S_k$. Это действие, по определению, непрерывно. По условию теоремы, для любого k пространство $F(k)$ есть конечномерный компакт.

Из результатов Флойда [12] имеем, что пространства $F(k)$ и $F(k)/G$ есть $G-ANR(\mathsf{M})$ - пространства для любого $k\in N$. В итоге мы получаем, что для любого конечного числа $k\in N$ произведение $Z=C(k,X)\times F(k)$ есть $G-ANR(\mathsf{M})$ - пространство, так как сомножители являются $G-ANR(\mathsf{M})$ -пространствами. Положим $Z'=\pi^{-1}_{F,X,k}\left(F_{k-1}(X)\right)$.

Если функтор имеет степень n, то $F_n(X)=F(X)$. Пусть $T=Z/S_k$ пространство орбит пространства Z по данному действию группы S_k, а $\gamma:Z\to T$ -соответствующее факторное отображение. Очевидно, что для любого $\sigma\in S_k$ имеет место равенство $\pi_{F,X,k}\circ\psi(\sigma)=\pi_{F,X,k}$. В силу этого равенства существует такое непрерывное отображение $\rho:T\to F_k(X)$, что $\rho\circ\gamma=\pi_{F,X,k}$. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$(*)\quad\begin{array}{ccccc}
\psi(\sigma):S_k\times(C(k,X)\times F(k)) & \to & C(k,X)\times F(k) & \to & T=C(k,X)\times F(k)/S_k\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\xrightarrow{\pi_{F,X,k\psi(\sigma)}} & & F_k(X) & & \xleftarrow{\rho}
\end{array}$$

Положим $T'=\rho^{-1}\left(F_{k-1}(X)\right),\rho'=\rho_T$. Тогда пространство $F_k(X)$ гомеоморфно присоединенному пространству из пространств T и $F_{k-1}(X)$ по отображению $\rho':T'\to F_{k-1}(X)$, т.е. $F_k(X)\cong T\bigcup_{\rho'}F_{k-1}(X)$.

Значит, следующая диаграмма тоже коммутативна.

$$(**)\quad\begin{array}{ccccccc}
\psi(\sigma):S_k\times(C(k,X)\times F(k)) & \to & C(k,X)\times F(k) & \to & T=C(k,X)\times F(k)/S_k\subset T' & & \\
\downarrow & & \downarrow\pi_{F,X,k,\rho} & & \downarrow\pi_{F,X,k,\rho} & & \downarrow\\
\xrightarrow{\pi_{F,X,k\psi(\sigma)}} & & F_k(X) & \supset & F_{k-1}(X) & & \xleftarrow{\rho'}
\end{array}$$

Если мы покажем, что $T',T,F_{k-1}(X)\in ANR(\mathsf{M})$, то из следующего результата Химана:

Теорема 1.1.1 [13]. Пусть $\varphi:A\to Y$ непрерывное отображение и A замкнутое X. Если A, X и $Y\in ANR(\mathsf{M})$, тогда $X\bigcup_{\varphi}Y\in ANR(\mathsf{M})$.

Из этого будет вытекать, что $F_k(X)\in ANR$. По предположению индукции $F_{k-1}(X)\in ANR(\mathsf{M})$, пространство орбит T есть $G-ANR(\mathsf{M})$ - пространство.

В силу следующего результата:

Теорема [7]. Пусть X -метризуемое G - пространство и хотя бы X или G обладает счетной базой. Пусть, далее H -замкнутая нормальная подгруппа группы G, $X=G-ANR$ (соответственно $X=G-AR$). Тогда $X/H=G-ANR$ (соответственно $X/H=G-AR$). В частности, $X/G\in ANR$ (соответственно $X/G\in AR$).

Следует, что для включения $T\in ANR(\mathsf{M})$ достаточно проверить включение $Z'\in S_k-ANR(\mathsf{M})$. Из мономорфности функтора F имеем

$$Z'=H\cup\cup\left\{H_{\alpha,\beta}:\alpha,\beta\in k,\alpha\neq\beta\right\},$$

где

$$H=C(k,X)\times F_{k-1}(k),H_{\alpha,\beta}=\left\{\eta:\eta\in C(k,X),\eta(\alpha)=\eta(\beta)\right\}\times F(k)$$

Чтобы доказать, что $Z' \in G - ANR$, согласно теореме 7.3 [14] достаточно убедиться в том, что пересечение любого подсемейства $\left\{X_{\alpha,i} : i = \overline{1,n}\right\}$ семейства $\left\{H\right\} \cup \left\{H_{\alpha,\beta}\right\}$ является $G - ANR(\mathsf{M})$ пространством. Очевидно, что всякое такое пересечение гомеоморфно произведению $C\left(n_0, X\right)$для

Некоторого $n_0 \le k$ на одно из пространств $F(k)$ или $F_{K-1}(k)$. Поэтому согласно выше приведенным рассуждениям, эти пространства являются $G - ANR\left(\mathsf{M}\right)$ пространствами. Теорема 5 доказана.

Верны и следующие.

Теорема 4'. Пусть функтор удовлетворяет условиям Теоремы 5 и сохраняет прообразы, для любой точки $p \in F(K)$ и множества $\Omega \subset C(k,k)$ пересечений $\bigcap\{F(\omega)^{-1}(p) : \omega \in \Omega\}$ является ANR компактом, то F послойно сохраняет $A(N)R(\mathsf{M})$ пространства.

Следствие 2. Пусть $G -$ непрерывный, мономорфный, сохраняющий метризуемые пространства, конечные пересечения, точку и пустое множество функтор степени n, причем $G(n)$ есть полиэдр допускающий такую триангуляцию, что для всякого $\omega \in C(n,n)$ отображение $F(\omega)$ симплициально в этой триангуляции. Тогда для подфунктора F функтора G заключения теоремы 3-5 справедливы тогда и только тогда, когда $F(n)$ локально стягиваемо.

Следствие 3. Пусть $F -$ непрерывный, мономорфный, сохраняющий конечные, метризуемые пространства, точку и пустое множество функтор степени n, причем $F(n)$ конечно. Тогда для функтора F справедливы заключения теоремы 3-5.

Следствие 2'. Пусть функтор G удовлетворяет условиям следствия 2 и сохраняет прообразы. Тогда для функтора F заключения теоремы 5 справедливы в том и только в том случае, $F(n)$ локально стягиваемо.

Следствие 3'. Если функтор F удовлетворяет условия следствия 3 и сохраняет прообразы, то для функтора F справедливо заключение теоремы 4'.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q -многообразия Успехи матем. наук.М. 1981. Т.36. вып.3. С 177-195
2. Федорчук В.В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов Успехи матем. наук. М. 1984. Т.39. вып.3. С 169-208
3. Богатый С.А., Федорчук В.В. Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия. Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, 1986. Т.25. С 195-270
4. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов Успехи матем. наук. М. 1981. Т.36. № 3. С 3-62
5. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М. наука, 1973. 575 С.
6. Антонян С.А. Пространства отображений – эквивариантные абсолютные экстензоры Вестник МГУ. Сер. мех.-мат. М. 1981. № 6. С 22-25
7. Антонян С.А. Ретракционные свойства пространства орбит. Матем. сб., 137 (179), 1988. № 3. С 300-318.
8. Жураев Т.Ф. О ковариантных функторах конечной степени, сохраняющих $ANR(\mathsf{M})$ пространства. Доклады Болг. АН, 1990. Т.43. –№ 9. С 5-8
9. Жураев Т.Ф. Размерность паракомпактных σ-пространств и функторы конечной степени. Доклады АН Республики Узбекистан. Т. 1992. № 4-5. С 15-18
10. Borges C.R. On stratifiale spaces Pacific J. Math., 17, 1966. №1. p.p..1-17
11. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М. «Наука», 1980. 440 с.
12. Floyd E.E. Orbit spaces of finite transformation groups II. Duke Math. J., 22, 1955. №1. p.p. 33-38.
13. Hyman D.M. A category slightly larcer than the metric and CW-categories Pasific jor.Math.,1967,23,№2, c.263-271.
14. Murayama M. On G-ANR's and their G-homotopy types Osaka J. Math., 20, 1983. p.p. 479-512

REFERENCES

1. Fedorchuk V.V. Kovariantni funktory v katehoriyi kompaktiv, absolyutni retrakty ta riznomanittya. Uspikhy matematyky. nauk.M. 1981. T.36. vyp.3. S 177-195
2. Fedorchuk V.V. Pro deyaki heometrychnykh vlastyvostyakh kovariantnykh funktoriv. Uspikhy matematyky. nauk. M. 1984. T.39. vyp.3. S 169-208
3. Bohatyy S.A., Fedorchuk V.V. Teoryya retraktov i beskonechnomernykh mnohoobrazyy. Itohy nauky i tekhniky. Alhebra. Topo-lohyya. Heometryya, 1986. T.25. S 195-270
4. Shchepyn YE.V. Funktory ta nechyslenni stupeni kompaktiv Uspikhy matem. nauk. M. 1981. T.36. № 3. S 3-62
5. Aleksandrov P.S., Pasynkov B.A. Vvedennya v teoriyu rozmiriv. M. nauka, 1973. 575 S.
6. Antonyan S.A. Prostranstva otobrazhen′ - ekvivariantni absolyutni ekstenzory Visnyk MHU. Ser. mekh.mat. M. 1981. № 6. S 22-25
7. Antonyan S.A. Retraktsiyni vlastyvosti prostoru orbit. Matem. sb., 137 (179), 1988. № 3. S 300-318.
8. Zhuraev T.F. Pro kovariantnykh funktorakh kintsevoyi stupenya, shcho zberihayut′ prostir. Dopovidi Bolh. AN, 1990. T.43. № 9. S 5-8
9. Zhuraev T.F. Rozmirnist′ parakompaktnykh prostoriv ta funktoriv kintsevoyi stupenya. Dopovidi AN Respubliky Uzbekystan. T. 1992. № 4-5. S 15-18
10. Borkhes K.R. Pro stratyfikovanykh prostorakh Tykhookeans′koho Dzh. Mat., 17, 1966. №1. r.r..1-17
11. Bredon H. Vvedennya v teoriyu kompaktnykh hrup peretvoren′. M. «Nauka», 1980. 440 s.

Covariant functors of finite degree and of A(N)R(M) space

T. F. Zhuraev

In this paper we describe covariant functors F: M→M having finite powers that preserve A (N) R (M) -spaces.

Keywords: *functor, finite degree, absolute retracts, absolute neighforhoods retracts, metrizable spaces dimension, stratifiable spaces, action,* G *-spaces.* ***MSC:*** *54B15, 54B30, 54B35, 54C05, 54C15, 54C60, 54D30.*