Змістові особливості вивчення математичних фактів у шкільному курсі математики

Н. А. Тарасенкова

Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, Черкаси, Україна
Corresponding authors. E-mail: ntaras7@ukr.net

Paper received 02.02.2019; Accepted for publication 06.02.19.

https://doi.org/10.31174/SEND-PP2019-188VII77-14

Анотація. У статті висвітлено особливості змісту та організації вивчення математичних фактів у шкільному курсі математики. Пропонується навчати учнів будувати твердження за типом заперечення. Звертається увага на важливості використання змістових і візуальних акцентів та мнемонічних прийомів для полегшення сприймання і запам'ятовування учнями складних математичних тверджень і співвідношень.

Ключові слова: *загальноосвітня школа, навчання математики, вивчення аксіом, теорем і формул.*

Вступ. У логічному словнику [1] поняття «факт» (від латинського *faktum* – зроблене, те, що здійснилося) визначається як справжнє, реально існуюче, невигадане явище, подія; те, що відбулося насправді; основа теоретичного узагальнення, висновку.

До математичних фактів, що вивчаються в курсі математики основної школи, ми відносимо аксіоми, теореми, формули [2]. У терміни «теорема» і «аксіома», як правило, вкладають наступний зміст: теорема (грец. θεωρημα – видовище, театр; теорема – термін Аристотеля) – твердження, істинність якого можна довести в даній аксіоматичній теорії [3]; аксіома (давньогрец. αξιωμα – відзначене, прийняте положення; αξιοω – вважаю гідним) – висловлення якоїсь теорії, що приймається при її дедуктивній побудові без доведення, тобто як вихідне для доведення інших положень цієї теорії [4].

Шкільний курс математики не будується як строга дедуктивна теорія, хоча в ньому й присутні елементи змісту, побудовані дедуктивно, а також проводиться ідея аксіоматичної побудови математики. Тому система аксіом певної математичної теорії може вводитися в явному вигляді на початку курсу, як це зроблено в наших підручниках геометрії для старшої профільної школи [5-6]. Проте вона може залишатися неявною для учнів і розкриватися лише згодом, як це зроблено в наших підручниках з геометрії для базової школи [7-9], або зовсім не розкриватися, що характерно для підручників з алгебри [10-12].

Короткий огляд публікацій з теми. Проблемі навчання учнів теорем і формул у шкільному курсі математики присвячено чимало досліджень (З. Слєпкань, О. Дубинчук, М. Бурда, В. Бевз, Г. Бевз, І. Ленчук, Ю. Мальований, В. Моторіна, Н. Кульчицька, О. Чашечникова та ін.). Однак поза увагою дослідників залишились змістово-семіотичні аспекти [13-15] побудови освітнього дискурсу під час вивчення математичних фактів шкільного курсу математики.

Мета статті: розкрити особливості змісту та організації вивчення математичних фактів у шкільному курсі математики.

Виклад основного матеріалу. Клас математичних фактів, які для дедуктивної теорії є теоремами, у шкільному курсі можна поділити принаймні на три групи.

Основні факти, які є найбільш значущими для розгортання логіки побудови курсу та навчання учнів математичної діяльності, встановлюються в результаті доведення. Такі факти зазвичай називають теоремами, хоча не завжди цей термін використовується для їх позначення. Наприклад, ознаки подільності чисел не називаються теоремами.

Низка основних математичних фактів вводиться до курсу без доведення. При цьому учням пояснюється, що доведення таких фактів існують, але їх розгляд за тих чи інших причин відкладається. Наприклад, в курсі алгебри й початків аналізу на рівні стандарту без доведення вводяться властивості функцій, а в курсі геометрії – майже усі формули об'ємів геометричних тіл.

З деякими властивостями математичних об'єктів та їх ознаками учні можуть зустрітися в процесі розв'язування задач. Таким, допоміжним фактам, як правило, надається ситуативне значення. Від учнів не вимагається їх запам'ятовування.

Основні математичні факти розміщуються у теоретичній частині підручника. Для учнів саме вони виступають основними об'єктами засвоєння. Що ж мають засвоїти учні, вивчаючи теореми?

У структурі теореми виділяють три складові: роз'яснювальну частину, умову (засновок), вимогу (висновок). Наприклад, у кожній теоремі-ознаці рівності чи подібності трикутників роз'яснювальну частину становить множина пар трикутників, а не будь-якої іншої їх кількості. З цієї множини виділяється підмножина таких пар трикутників, у яких сторони й кути знаходяться у деяких відношеннях, зазначених в умові теореми. Так, згідно із засновком третьої ознаки рівності трикутників у цій підмножині кожна пара трикутників повинна мати відповідно рівні сторони. Саме для таких пар трикутників – елементів цієї підмножини, у висновку теореми встановлюється відношення рівності.

При вивченні теореми, як правило, від учнів не вимагається вміння виділяти роз'яснювальну частину в явному вигляді. Достатнім вважається правильне уявлення учнів про неї, розуміння її особливостей на інтуїтивному рівні. А от формування вміння виділяти умову (засновок) і вимогу (висновок) теореми виступає необхідним елементом навчання.

Засновок теореми (позначимо його A) та її висновок (позначимо його B) можуть бути пов'язані між собою або відношенням імплікації «Якщо A, то B», або відношенням еквівалентності «Якщо A, то B, і якщо *B*, то *A*», коли він стверджує певний критерій (необхідні й достатні умови). Для учнів вміння виділяти зв'язок між умовою і висновком теореми також є обов'язковим елементом навчання.

До кожної теореми курсу математики можна сформулювати три супровідні твердження – протилежне, обернене й протилежне до оберненого. Їх структуру та логічний зв'язок між ними часто демонструють за допомогою схеми, яку називають логічним квадратом (рис. 1). У цьому квадраті стрілками пов'язують рівносильні твердження.

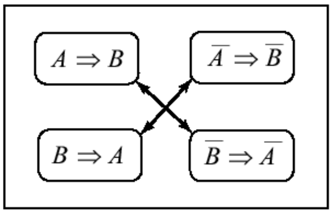

Рис.1.1. Логічний квадрат.

Не можна не погодитися із думкою, що засвоєння учнями особливостей логічної структури тверджень, супровідних до даної теореми, та вільне володіння уміннями їх будувати є бажаним і дуже важливим результатом навчання. Проте при вивченні кожної теореми шкільного курсу навряд чи знайдеться час на таку роботу. З іншого боку, зовсім її оминати також недоцільно.

На нашу думку, виявлення особливостей чотирьох видів тверджень доцільно проводити лише тоді, коли вивчаються обернені теореми та необхідні й достатні умови, які виступають основними об'єктами засвоєння. Крім того, до виконання такої діяльності на свідомому рівні не варто залучати учнів, що зазнають утруднень у навчанні математики. Краще її проводити лише із сильними учнями і, можливо, у позаурочний час. Проте певні початкові вміння будувати твердження, яке є протилежним до даного, треба розглядати як необхідний компонент загального і математичного розвитку учнів. До того ж, формування таких первісних умінь можна проводити, не переобтяжуючи школярів. Пояснимо це.

Умовою (засновком) так званої прямої теореми множина об'єктів, що становить її роз'яснювальну частину, фактично поділяється на дві підмножини – на множину об'єктів, що мають деяку спільну властивість (чи кілька властивостей), та множину об'єктів, що цієї властивості не мають. Друга підмножина є доповненням до множини об'єктів, зазначених умовою теореми, в тому універсальному класі, який утворює роз'яснювальна частина теореми.

У формулюванні протилежного твердження виводяться назовні заперечення і засновку, і висновку прямої теореми. При цьому явно сформульоване протилежне твердження з дидактичних позицій обов'язково вимагає супровідних міркувань щодо його істинності чи хибності. Отже, формально-логічне навантаження учнів за таких умов істотно зростає.

Тиск цього навантаження буде значно меншим, якщо вивести назовні, зробити видимим, зрозумілим для учнів лише заперечення засновку теореми (можливо, не в точному формально-логічному вираженні) і той факт, що для зазначених об'єктів не можна автоматично стверджувати, чи справджується висновок теореми, чи ні. Текст, у якому відображаються такі міркування, не є формулюванням протилежного твердження. Його скоріше можна назвати описом супровідних міркувань за типом заперечення. Навчання учнів проводити такі міркування, по-перше, виступає певним щаблем у формуванні вміння учнів будувати протилежне твердження, а по-друге, має безпосередній вплив на формування знання математичного факту як конструкту «позитив – негатив». На нашу думку, під час вивчення теорем потрібно не тільки вчити учнів формулювати міркування за типом заперечення, але й формувати в них ставлення до цієї діяльності як до необхідного компонента процесу засвоєння теореми.

У таблиці 1 наведено приклади формулювання деяких теорем шкільного курсу математики (I стовпчик) та відповідних супровідних міркувань за типом заперечення (II стовпчик).

Таблиця 1. Побудова супровідного міркування за типом заперечення

Теорема	Супровідне міркування за типом заперечення
Якщо даний многокутник **є** трикутником, **то** сума градусних мір його кутів дорівнює 180°	**Якщо** даний многокутник **не є** трикутником, **то невідомо,** чи буде сума градусних мір його кутів становити 180°
Якщо дане число **є** раціональним, **то** його можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу	**Якщо** дане число **не є** раціональним, **то невідомо,** чи можна його подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу

У шкільному курсі математики численна кількість теорем є складеними. Відомо, що теорема вважається простою, якщо її умова і вимога є простими висловленнями. В іншому випадку, коли умова, чи вимога, чи одна і друга є складеними висловленнями, тобто містять кон'юнкцію або диз'юнкцію простих висловлень, теорема вважається складеною. Наприклад, складеними теоремами є ознаки рівності чи подібності трикутників. У таблиці 1 використано приклади простих теорем.

При вивченні складених теорем й особливо тих, що мають складену умову, важливо, щоб учні навчилися виділяти (принаймні, на інтуїтивному рівні) тип зв'язку між простими висловленнями і будувати їх заперечення. Нагадаємо, що заперечення складених висловлень кон'юнктивного та диз'юнктивного типів будується наступним чином:

$$\overline{A_1 \wedge A_2} \Leftrightarrow \overline{A_1} \vee \overline{A_2}; \qquad \overline{A_1 \vee A_2} \Leftrightarrow \overline{A_1} \wedge \overline{A_2}.$$

При вивченні будь-якої складеної теореми з кон'юнктивним зв'язком умов супровідні міркування за типом заперечення можна формулювати так, як наведено у таблиці 2.

Таблиця 2. Побудова супровідного міркування за типом заперечення

Теорема	Супровідне міркування за типом заперечення
Якщо для даних дійсних чисел *a, b* і *c* **справджується** ***кожна*** з двох нерівностей: $a < b$ **і** $b < c,$ **тоді** $a < c$	**Якщо** для даних дійсних чисел *a, b* і *c* **не справджується** ***принаймні одна*** з двох нерівностей: $a < b$ **або** $b < c,$ **тоді невідомо**, чи буде $a < c$

Дещо іншого підходу потребують теореми з диз'юнктивним зв'язком умов. Справа в тому, що складену теорему такого типу можна подати як кон'юнкцію декількох простих теорем:

$$\big((A_1 \vee A_2) \Rightarrow B\big) \Leftrightarrow \big((A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B)\big).$$

Наприклад, ознаку паралельності прямих можна сформулювати двома способами – так, як показано на рис. 2, і так, як відображено на рис. 3.

Якщо	внутрішні різносторонні кути рівні або сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°,	то	прямі паралельні

Рис. 2. Формулювання складеної теореми.

Якщо	внутрішні різносторонні кути рівні,	то	прямі паралельні
і			
Якщо	сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°,	то	прямі паралельні

Рис. 3. Формулювання простих теорем

Отже, при організації вивчення теорем такого типу бажано одразу розкласти їх на прості теореми і проводити роботу з кожною з них окремо. Зауважимо, що оформлення наведених вище таблиць не треба вважати обов'язковим у ході уроку. Ми їх наводимо лише для того, щоб унаочнити зміст і способи побудови супровідних міркувань за типом заперечення. На уроці ж достатньо, щоб текст супровідного міркування за типом заперечення лише «озвучувався» слідом за формулюванням відповідного математичного факту, причому не тільки вчителем, а й учнями. Наш досвід показує, що для такої роботи на уроці витрачається небагато часу, але користь від неї важко переоцінити.

Особливими об'єктами засвоєння у шкільному курсі математики виступають формули. У загальному розумінні, формула (лат. *formula* – форма, правило) – це вираз формалізованої мови, призначений для запису судження; будь-який символьний запис (у вигляді виразу, рівності або нерівності), що містить деяку інформацію [16, 323]. Вивчаючи основні, найбільш важливі формули, учні повинні точно їх запам'ятати, навчитись розпізнавати їх у стандартних і нестандартних ситуаціях та правильно застосовувати. Щодо інших формул, то їх засвоєння може обмежуватися вміннями застосовувати з опорою на допомогу, зокрема довідник.

Для опанування учнями низки формул шкільного курсу математики важливу роль може відігравати спосіб виведення формули. Наприклад, саме така ситуація виникає при вивченні учнями важких для запам'ятовування тригонометричних формул додавання:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

За нашими спостереженнями, учні краще засвоюють ці формули, якщо під час їх виведення у свідомості учнів утворюється міцний зв'язок у такому ланцюжку допоміжних фактів:

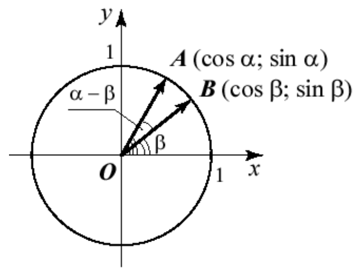

Рис.1.4. Координати точок.

- формула косинуса різниці кутів α і β виводиться першою у даній сукупності формул, отже її треба вважати основною;
- косинус різниці кутів обчислюється як скалярний добуток двох векторів, що мають початок у початку координат, а кінці – на одиничному колі з центром у початку координат (рис. 4);
- вектори мають координати відповідно:

$$(\cos\alpha;\ \sin\alpha) \text{ і } (\cos\beta;\ \sin\beta);$$

- скалярний добуток цих одиничних векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, отже:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

- решту формул можна легко вивести з основної формули, скориставшись певними мнемонічними правилами (зазначимо, що такі правила неважко сформулювати і самим учням, варто лише звернути увагу школярів на чергування знаків у формулах та чергування назв функцій і кофункцій у відповідних добутках).

Висновки. Загалом, вивчення математичних фактів шкільного курсу математики необхідно спрямовувати на утворення відповідних згорнутих структур в особистому досвіді учнів. Кожний об'єкт засвоєння треба розглядати разом із його протилежністю, акцентуючи увагу учнів на змістових та знаково-символічних відмінностях об'єктів кожної пари [13]. При цьому доцільно ширше залучати потужні можливості візуального мислення учнів, яке дозволяє вичерпувати необхідний зміст поза його вербалізацією. Бажано заздалегідь добирати для ілюстрування не тільки приклади відповідного об'єкта засвоєння, але й контрприклади до нього.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кондаков Н. И. Логический словарь. – М.: Наука, 1971. – 638 с.
2. Тарасенкова Н. А. Активизация познавательной деятельности учащихся в условиях лекционно-практической системы обучения математике в школе: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 1991. – 211 с.
3. Плиско В. Е. Теорема // Матем. энциклопедия. – М., 1984. – Т. 5. – С. 334-335.
4. Новиков П. С. Аксиома // Матем. энциклопедия. – М., 1977. – Т. 1. – С. 103.
5. Бурда М. І. Геометрія : [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів; академічний рівень] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : Видавничий дім "Освіта", 2011. – 176 с.
6. Бурда М. І. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова. — К. : УОВЦ «Оріон», 2018. — 288 с.
7. Бурда М. І. Геометрія : [підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : Видавничий дім "Освіта", 2015. – 208 с.
7. Бурда М. І. Геометрія : [підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : УОВЦ "Оріон", 2016. – 224 с.
8. Бурда М. І. Геометрія : [підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : УОВЦ "Оріон", 2017. – 224 с.
9. Тарасенкова Н. А. Алгебра : [підруч. для 7 кл. загальноосв. навч. закл.] / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. – К. : Видавничий дім "Освіта", 2015. – 304 с.
10. Тарасенкова Н. А. Алгебра : [підруч. для 8 кл. загальноосв. навч. закл.] / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. – К. : УОВЦ "Оріон", 2016. – 336 с.
11. Тарасенкова Н. А. Алгебра : [підруч. для 9 кл. загальноосв. навч. закл.] / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. – К. : УОВЦ "Оріон", 2017. – 272 с.
12. Tarasenkova, N. (2013). The quality of mathematical education in the context of Semiotics. *American Journal of Educational Research, 1*(11), 464-471. doi: 10.12691/education-1-11-2.
13. Tarasenkova, N. (2014). Peculiar Features of Verbal Formulations in School Mathematics. *Global Journal of Human-Social science : G : Linguistics & Education, 14*(3), 61-67. Retrieved from http://globaljournals.org/journals/human-social-science/g-linguistics-education
14. Tarasenkova, N. (2015). Non-verbal Shells of the Instructional Mathematical Content. *American Journal of Educational Research, 3*(12B), 1-5. doi: 10.12691/education-3-12B-1.
15. Математика в поняттях, означеннях і термінах: В 2 т. / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. І. Сорокін, М. Г. Федін. – К.: Рад. школа, 1986. – Т. 2: М–Я. – 360 с.

REFERENCES

1. Kondakov, N. I. (1971). *Logical Dictionary*. Moscow, Russia: Nauka. (in Rus.).
2. Tarasenkova, N. A. (1991). Activation of cognitive activity of students in a lecture and practical mathematics learning in school : [thesis]. – Kyiv, Ukraine. (in Rus.).
3. Plisko, V. Ye. (1984). Theorem. *Mat. encyclopedia*. Moscow, Russia: Nauka. (in Rus.).
4. Novikov, P. S. (1977). Axiom. *Mat. encyclopedia*. Moscow, Russia: Nauka. (in Rus.).
5. Burda, M. I., & Tarasenkova, N. A. (2011). *Geometry. Textbook for the 10th grade of the secondary school.* Kyiv, Ukraine: Publishing House "Osvita". (in Ukr.).
6. Burda, M. I., Tarasenkova, N. A., Kolesnik T. V., Mal'ovanyy Yu. I. (2018). *Mathematics*: *textbook for the 10th form for the secondary schools*. Kyiv, Ukraine: "Orion". (in Ukr.).
7. Burda, M. I., & Tarasenkova, N. A. (2015). *Geometry. Textbook for the 7th grade of the secondary school.* Kyiv, Ukraine: Publishing House "Osvita". (in Ukr.).
8. Burda, M. I., & Tarasenkova, N. A. (2016). *Geometry. Textbook for the 8th grade of the secondary school.* Kyiv, Ukraine: "Orion". (in Ukr.).
9. Burda, M. I., & Tarasenkova, N. A. (2017). *Geometry. Textbook for the 9th grade of the secondary school.* Kyiv, Ukraine: "Orion". (in Ukr.).
10. Tarasenkova, N.A., Bogatyreva, I.M., Kolomiets, O.M., Serdiuk, Z.O. (2015). *Algebra*: *textbook for the 7th form for the secondary schools*. Kyiv, Ukraine: Publishing House "Osvita". (in Ukr.).
11. Tarasenkova, N.A., Bogatyreva, I.M., Kolomiets, O.M., Serdiuk, Z.O. (2016). *Algebra*: *textbook for the 8th form for the secondary schools*. Kyiv, Ukraine: "Orion". (in Ukr.).
12. Tarasenkova, N.A., Bogatyreva, I.M., Kolomiets, O.M., Serdiuk, Z.O. (2017). *Algebra*: *textbook for the 9th form for the secondary schools*. Kyiv, Ukraine: "Orion". (in Ukr.).
13. Tarasenkova, N. (2013). The quality of mathematical education in the context of Semiotics. *American Journal of Educational Research, 1*(11), 464-471. doi: 10.12691/education-1-11-2.
14. Tarasenkova, N. (2014). Peculiar Features of Verbal Formulations in School Mathematics. *Global Journal of Human-Social science : G : Linguistics & Education, 14*(3), 61-67. Retrieved from http://globaljournals.org/journals/human-social-science/g-linguistics-education
15. Tarasenkova, N. (2015). Non-verbal Shells of the Instructional Mathematical Content. *American Journal of Educational Research, 3*(12B), 1-5. doi: 10.12691/education-3-12B-1.
16. Manturov, O. V. & others. (1986). *Mathematics in concepts, definitions and terms*, in 2 vols. V. 2/ Kyiv, Ukraine: Radyans′ka shkola. (in Ukr.).

Content features of the study of mathematical facts in the school course of mathematics

N. A. Tarasenkova

Abstract. The article highlights the peculiarities of the content and organization of the study of mathematical facts in the school course of mathematics. It is proposed to teach students to build assertions by type of denial. Attention is drawn to the importance of using content and visual accents and mnemonic techniques to facilitate the perception and memorization by students of complex mathematical assertions and relationships.

Keywords: *secondary school, learning math, learning axioms, theorems and formulas*.