Система компьютерного моделирования для решения двумерных краевых задач с использованием бессеточного похода

Д. О. Протектор*, Д. А. Лисин

https://doi.org/10.31174/SEND-NT2018-158VI18-02

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина
*Corresponding author. E-mail: d.protector@karazin.ua

Paper received 16.01.18; Accepted for publication 22.01.18.

Аннотация. Разработана и программно реализована система компьютерного моделирования «MHT2D» для численного решения двухмерных нестационарных задач теплопроводности по бессеточной схеме с использованием радиальных базисных функций. В СКМ реализованы следующие базисные функции: гауссиан, мультиквадратичная, обратная квадратичная и обратная мультиквадратичная. В системе используется комбинация метода дискретизации по времени с методами фундаментальных решений и двойного замещения, позволяющая реализовать полностью бессеточный подход.

Ключевые слова: *бессеточный метод, радиальные базисные функции, краевые задачи, нестационарные задачи теплопроводности.*

Введение. Последние годы ознаменовались значительными успехами в использовании численных методов при решении задач математической физики. Этим успехам исследователи во многом обязаны возможностям так называемых бессеточных подходов к решению задач математического моделирования. Одним из факторов пристального внимания к бессеточным методам является практическое преимущество по сравнению с разностными методами при решении краевых задач в сложных областях. В отличие от разностных методов, в бессеточных методах область решения задачи представляет собой набор равномерно или произвольно распределенных узлов, к которым «привязываются» базисные функции.

Краткий обзор публикаций по теме. Обзоры по бессеточным методам с использованием радиальных базисных функций (РБФ) и атомарных радиальных базисных функций (АРБФ) представлены в статьях [1–8].

Цель. Разработка и программная реализация системы компьютерного моделирования «MHT2D» для численного решения двухмерных нестационарных задач теплопроводности по бессеточной схеме на основе комбинации метода двойного замещения и метода фундаментальных решений с использованием радиальных базисных функций.

Итерационная схема. Управляющее дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности в замкнутой области $\Omega \subset \Re^2$ ограниченной Γ имеет следующий вид:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} + g = k\nabla^2 u \qquad (1)$$

где ρ – плотность; c_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении; u – температура; g – внутренний источник тепла; k – коэффициент теплопроводности.

Исходное уравнение (1) может быть сведено к последовательности неоднородных модифицированных уравнений Гельмгольца с помощью процедуры дискретизации по времени [9]:

$$\nabla^2 v^n - \lambda^2 v^n = -\frac{1}{\theta^2 \alpha \Delta t} u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k} g^{n-1} + \frac{g^n}{k} \qquad (2)$$

где $v^n = u^n - \frac{1-\theta}{\theta} u^{n-1}$, θ – весовой коэффициент; $u^n = u(\mathbf{x}, n\Delta t)$; Δt – шаг по времени; $\lambda^2 = \frac{1}{\theta\alpha\Delta t}$, $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ – коэффициент диффузии.

Решение краевой задачи теплопроводности реализуется на основе комбинации метода двойного замещения [9] и метода фундаментальных решений с использованием радиальных базисных функций [10]. Для того чтобы избежать интегрирования по области, используется метод частных решений, согласно которому решение неоднородного уравнения представляется в виде суммы частного и однородного решений. Метод фундаментальных решений используется для получения однородного решения, а метод двойного замещения с использованием радиальных базисных функций – для получения частного решения. В результате такого подхода реализуется полностью бессеточный метод.

Решение (2) представляется в виде суммы однородного решения v_h^n и частного решения v_p^n: $v^n = v_h^n + v_p^n$. Управляющее уравнение для частного решения имеет вид:

$$\nabla^2 v_p^n - \lambda^2 v_p^n = -\frac{1}{\theta^2 \alpha \Delta t} u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k} g^{n-1} + \frac{g^n}{k}$$

Частное решение v_p^n не должно удовлетворять никакому набору граничных условий. Управляющая система для однородного решения v_h^n запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \nabla^2 v_h^n(\mathbf{x}) - \lambda^2 v_h^n(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ v_h^n(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}) - v_p^n(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ q_h^n(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x}) - q_p^n(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_2 \\ \left(kq_h^n + hv_h^n\right)(\mathbf{x}) = -kq_p^n(\mathbf{x}) - hv_p^n(\mathbf{x}) + hu_\infty(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_3 \end{cases}$$

где $q = k\frac{\partial u}{\partial n}$ – поток тепла, n – внешний вектор нормали; h – коэффициент теплопередачи; u_∞ – температура окружающей среды.

Пусть $F^n(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\theta^2 \alpha \Delta t} u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k} g^{n-1} + \frac{g^n}{k}$. Частное решение конструируется с помощью радиальных базисных функций $\varphi(\mathbf{x})$. $F^n(\mathbf{x})$ аппроксимируется в виде:

$$F^n(\mathbf{x}) \cong \hat{F}^n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^n \Psi_i(\mathbf{x}) \qquad (3)$$

где N – количество узлов коллокации, функции $\Psi_i(\mathbf{x})$ представляют собой результат воздействия дифференциального оператора Гельмгольца на соответствующие радиальные базисные функции $\varphi_i(\mathbf{x})$.

Таким образом, (3) представляет собой систему из N линейных уравнений относительно неизвестных α_i^n. Тогда частное решение v_p^n представляет собой линейную комбинацию базисных функций:

$$v_p^n(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n \varphi_j(\mathbf{x})$$

Для получения однородного решения используется метод фундаментальных решений. На n-ом временном шаге однородное решение v_h^n аппроксимируется в виде:

$$v_h^n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} \beta_i G(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i) \qquad (4)$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i) = \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda r)$ – фундаментальное решение для модифицированного оператора Гельмгольца $\nabla^2 - \lambda^2$, K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка и $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i\|$ – евклидово расстояние между узлами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}_i$. Здесь $\{\mathbf{z}_i\}_1^M$ – исходные узлы на фиктивной поверхности $\hat{\Gamma}$, содержащей Ω.

Важно определить оптимальное размещение фиктивной поверхности. Она может представлять собой окружность, центр которой совпадает с геометрическим центром области решения. С увеличением радиуса окружности повышается точность получаемого решения, но ухудшается обусловленность системы линейных уравнений, и наоборот. На практике, в качестве компромисса, значение радиуса фиктивной поверхности обычно выбирается равным пяти размерам области решения [11].

В узлах, равномерно расположенных на фиктивной поверхности, расставляются базисные функции, представляющие собой фундаментальные решения однородного модифицированного уравнения Гельмгольца.

Линейная комбинация фундаментальных решений $G(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i)$ по определению удовлетворяет модифицированному уравнению Гельмгольца во всех точках области решения. Коэффициенты β_i выбираются таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям в выбранных узлах на границе области решения. Произведя коллокацию (4) в выбранных узлах на границе, получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{M} \beta_i G(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_i) = \bar{u}(\mathbf{x}_j) - v_p^n(\mathbf{x}_j), \ 1 \le j \le M_1 \\
&\sum_{i=1}^{M} \beta_i \frac{\partial G(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_i)}{\partial n} = \bar{q}(\mathbf{x}_j) - q_p^n(\mathbf{x}_j), \ M_1 + 1 \le j \le M_2 \\
&\sum_{i=1}^{M} \beta_i \left(k \frac{\partial}{\partial n} + h\right) G(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_i) = -k q_p^n(\mathbf{x}_j) - h v_p^n(\mathbf{x}_j) + h u_\infty(\mathbf{x}_j), \ M_2 + 1 \le j \le M
\end{aligned} \qquad (5)$$

где $\{x_j\}_1^{M_1} \in \Gamma_1$, $\{x_j\}_{M_1+1}^{M_2} \in \Gamma_2$, $\{x_j\}_{M_2+1}^{M} \in \Gamma_3$.

Несмотря на плохую обусловленность системы (5), решение устойчиво до достижения машинной точности [9]. Считается, что это явление можно объяснить, исследуя сингулярное разложение (SVD) матрицы коэффициентов системы (5) [11].

Описанная выше итерационная схема легла в основу разработанной системы компьютерного моделирования «МНТ2D».

Описание системы компьютерного моделирования «МНТ2D». Информация о форме области решения краевой задачи задается в любой системе автоматизированного проектирования для работы с чертежами (напр. AutoCAD, TurboCAD и др.). Созданный чертеж сохраняется в формате PLT, после чего может быть загружен в «МНТ2D». На рис. 1 представлен пример области решения, загруженный в СКМ «МНТ2D».

Для решения краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, необходимо задание значений начальных и граничных условий.

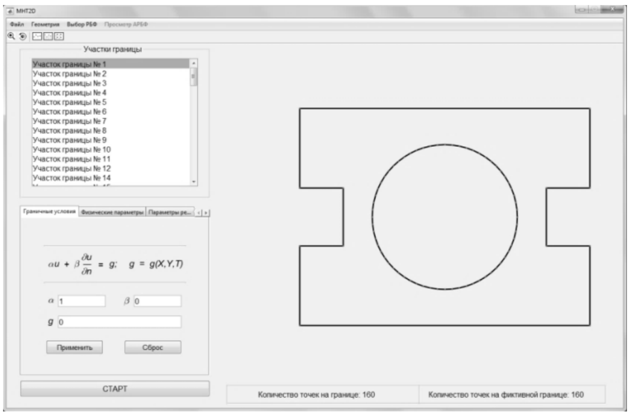

Рис. 1. Интерфейс СКМ «МНТ2D»

На рис. 2 представлена часть рабочей области системы, отвечающая за задание граничных условий для нестационарной задачи теплопроводности в СКМ, а на рис. 3 – часть рабочей области, отвечающая за задание начальных условий.

В СКМ «МНТ2D» реализована возможность задания внутреннего источника тепла как функции от координат и времени, а также значений коэффициента теплопроводности k, плотности ρ и удельной теплоёмкости c_p (рис. 4).

Во вкладке «Параметры решения» задаётся шаг разбиения сетки внутри области решения и за её границами, в узлах которой будут расставлены базисные функции, плотность точек на границе области, временной интервал, на котором будет решаться нестационарная краевая задача, шаг по времени, а также количество точек на фиктивной поверхности (рис. 5).

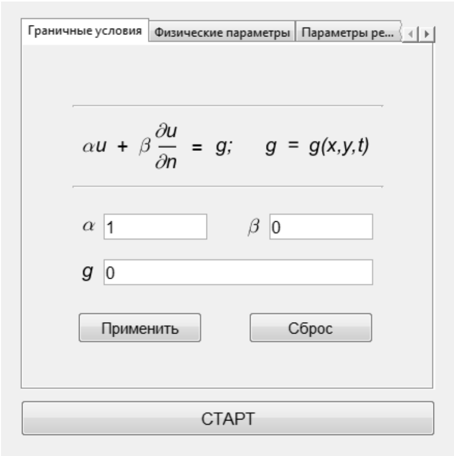

Рис. 2. Задание граничных условий в СКМ «MHT2D»

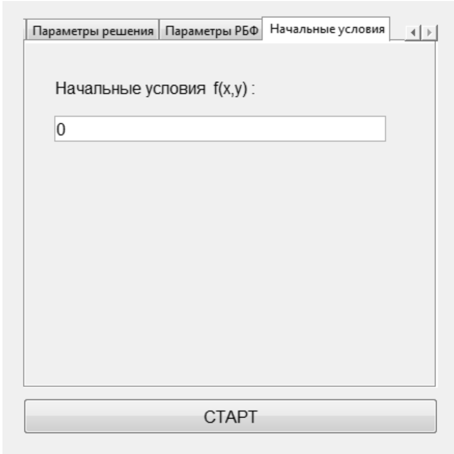

Рис. 3. Задание начальных условий в СКМ «MHT2D»

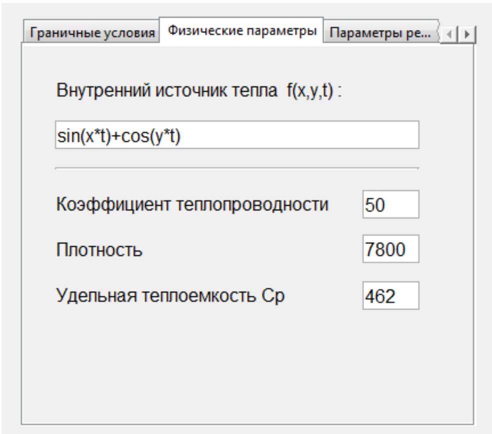

Рис. 4. Определение физических параметров краевой задачи в СКМ «MHT2D»

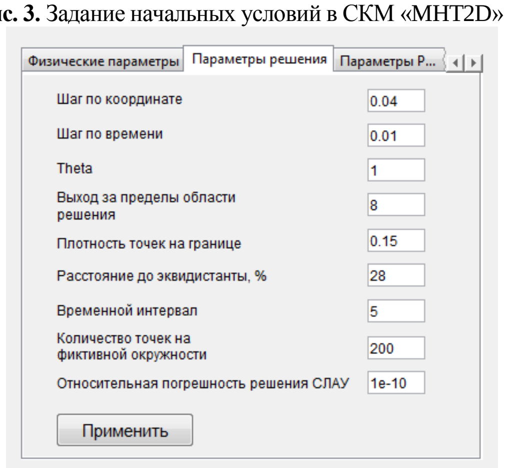

Рис. 5. Определение параметров решения краевой задачи СКМ «MHT2D»

Решение краевой задачи визуализируется в виде поверхности, представляющей собой распределение температурного поля в текущий момент времени. Для нестационарных краевых задач реализована функция анимированной визуализации распределения температурного поля на заданном временном интервале.

Результаты. В качестве иллюстрации работы системы приведена тестовая задача в двухмерной области в форме квадрата.

Постановка задачи: нестационарная задача теплопроводности с $k=1$, $\rho=1$, $c_p=1$, $\Delta t=0.01$, количество интерполяционных узлов – 400, количество узлов на фиктивной окружности – 120. Внутренний источник:

$$g(x,y,t)=-\frac{k}{5}\Big(4\exp\big(-5(\cos(\pi t)-4y+2)^2-5(\sin(\pi t)-4x+2)^2\big)\big(\lambda^2+25600\,x+25600\,y-6400\cos(\pi t)-$$
$$-6400\sin(\pi t)+12800\,y\cos(\pi t)+12800\,x\sin(\pi t)-25600\,x^2-25600\,y^2-14080\big)\Big)$$

где $\lambda^2=\frac{1}{\theta\alpha\Delta t}$, $\alpha=\frac{k}{\rho c_p}$.

Краевые условия: $u_{\partial\Omega}=0$. Точное решение в момент времени $t=0.01$ имеет вид:

$$u(x,y,t)=0.8\exp\big(-80\big((x-r(t))^2+(y-s(t))^2\big)\big)$$

где $r(t)=\frac{1}{4}(2+\sin(\pi t))$, $s(t)=\frac{1}{4}(2+\cos(\pi t))$.

Приведенная погрешность решения тестовой задачи в момент времени $t=0.01$ не превышает $7*10^{-3}$ (Рис. 6).

На рис. 7 представлена визуализация решения тестовой задачи в различные моменты времени.

Выводы. Бессеточные методы с использованием радиальных базисных функций показали свою эффективность при решении большого класса практически важных задач, в которых применение сеточных методов оказывается малоэффективным. Они демонстрировали свою эффективность и в задачах, где были успешно реализованы сеточные методы, например в задачах теплопереноса, диффузии и др.

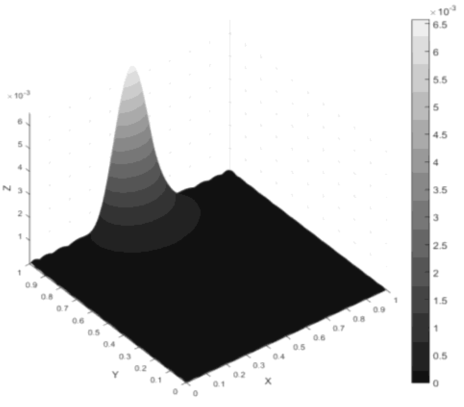

Рис. 6. Приведенная погрешность решения нестационарной краевой задачи

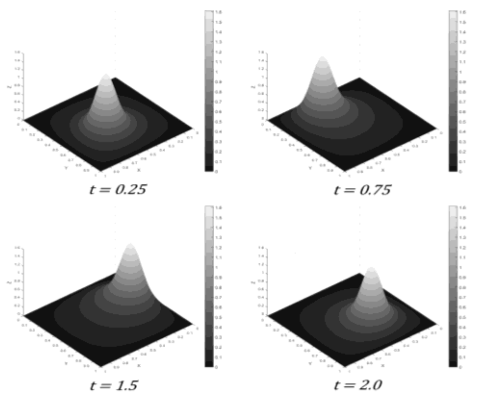

Рис. 7. Решение нестационарной краевой задачи

В ходе данного исследования была разработана и программно реализована система компьютерного моделирования «MHT2D» для численного решения двумерных нестационарных задач теплопроводности по бессеточной схеме с использованием радиальных базисных функций. В системе используется комбинация метода дискретизации по времени с методами фундаментальных решений и двойного замещения, позволяющая реализовать полностью бессеточный подход.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belytschko T.* Element-free Galerkin methods/T. Belytschko, Y.Y. Lu, L Gu//Intern. J. for Numerical Meth. in Eng.-1994.-Vol. 37.-P. 229-256.
2. *Belytschko T.* Meshless methods: an overview and recently developments / T. Belytschko, Y. Rongauz, D. Organ // Computer Methods in Appl. Mech. and Eng. - 1996. - Vol. 139.-P. 3 - 47.
3. *Belytschko T.* On the completeness of the meshfree particle methods / T. Belytschko, Y. Rongauz, J. Doblaw // Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. — 1998. — Vol. 43(5). — P. 785 – 819.
4. *Fasshauer G.E.* Meshfree Approximation Methods with MATL AB/G. E. Fasshauer.-Illinois Institute of Technology, 2007.-550p.
5. *Колодяжный В. М.* Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов / В. М Колодяжный, О. Ю. Лисина//Пробл. машиностроения.-2010.-Т. 13, № 3.-С. 67 – 74.
6. *Колодяжный В. М.* Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ/В. М. Колодяжный, О. Ю. Лисина//Пробл. машиностроения. — 2010. — Т. 13, № 4. — С. 49 – 57.
7. *Колодяжный В.М.* Бессеточные методы решения нестационарных задач теплопроводности с использованием атомарных радиальных базисных функций/В.М. Колодяжный, Д.А. Лисин//Кибернетика и систем. анализ.-2013.-Т.49, №3.-С.124-131.
8. *Лисин Д. А.* Формирование процедуры решения краевой задачи теплопроводности по бессеточной схеме на основе атомарных радиальных базисных функций в комбинации методов фундаментальных решений и двойного замещения / Д .А. Лисин, О .Ю. Лисина // Краевые задачи и мат. моделирование. — Новокузнецк, 2010. -Т. 2.- С. 17 - 22.
9. *Ingber M. S.* A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations/M.S. Ingber, C. S. Chen, J. A. Tanski//Intern. J. for Numerical Meth. in Eng.-2004.-Vol. 60, № 13.-P. 2183-2201.
10. *Bogomolny A.* Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems / A. Bogomolny // SIAM J. on Numerical Analysis. - 1985. - Vol. 22. - P. 644 – 669.
11. *Chen C. S.* Recent Developments in the Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Functions / C. S. Chen, M. A. Golberg, Y. F. Rashed, C. A. Brebbia//Transformation of Domain Effects to the Boundary (Advances in Boundary Elements).-2003.-WIT Press. Southampton, Boston.-P. 138-225.

REFERENCES

5. Kolodyazhnyiy V.M., Lisina O.Yu. *Bessetochnye metody v zadachakh modelirovaniya fizicheskikh protsessov* [Meshless methods in problems of modeling physical processes]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, vol. 13, no.3, pp.67-74. (In Rus.).
6. Kolodyazhnyiy V.M., Lisina O.Yu. *Chislennye skhemy resheniya kraevykh zadach na osnove bessetochnykh metodov s ispol'zovaniem RBF i ARBF* [Numerical schemes for solving boundary value problems on the basis of meshless methods using RBF and ARBF]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, vol. 13, no. 4, pp. 49-57. (In Rus.).
7. Kolodyazhnyiy V.M., Lisin D.A. *Bessetochnye metody resheniya nestatsionarnykh zadach teploprovodnosti s ispol'zovaniem atomarnykh radial'nykh bazisnykh funktsiy* [Meshless methods for solving non-stationary heat conduction problems using atomic radial basis functions]. Cybernetics and Systems Analysis, 2013, vol. 49, no. 3, pp. 124-131. (In Rus.).
8. Lisin D.A., Lisina O.Yu. *Formirovanie protsedury resheniya kraevoy zadachi teploprovodnosti po bessetochnoy skheme na osnove atomarnykh radial'nykh bazisnykh funktsiy v kombinatsii metodov fundamental'nykh resheniy i dvoynogo zameshcheniya* [Formation of the procedure for solving the boundary value problem of thermal conductivity using a meshless scheme based on atomic radial basis functions in a combination of fundamental solution method and dual reciprocity method]. *Kraevye zadachi i matematicheskoe modelirovanie* [Boundary value problems and mathematical modeling], Novokuznetsk, 2010, vol. 2, pp. 17-22. (In Rus.).

Computer modeling system for solving two-dimensional boundary value problems using meshless approach

D. O. Protektor, D. A. Lisin

Abstract. The computer simulation system «MHT2D» was developed and implemented for the numerical solution of two-dimensional nonstationary heat conduction problems by meshless method using radial basis functions. In computer simulation system there are available the following basis functions: Gaussian, multiquadric, inverse quadratic and inverse multiquadric. «MHT2D» uses a combination of method of discretization in time with method of fundamental solutions and method of particular solutions, which results with a completely meshless approach.

Keywords: *meshless method, radial basis functions, boundary value problems, nonstationary heat conduction problems.*