Плотность распределения векториальной позиционной погрешности при избыточных измерениях и ее применение

И. И. Ворохобин

Национальный Университет «Одесская Морская Академия», Одесса, Украина
Corresponding author. E-mail: burmaka-mob@ukr.net

Paper received 16.12.18; Accepted for publication 21.12.18.

https://doi.org/10.31174/SEND-NT2018-186VI22-24

Аннотация. Рассмотрена плотность векториальной погрешности при избыточных измерениях и показана возможность ее применения для решения задач оценки точности навигации судна. Показано, что с помощью плотности векториальной погрешности имеется возможность расчета эффективных обсервованых координат судна независимо от закона распределения погрешности навигационных измерений. Приведена система расчета координат судна с применением плотности векториальной погрешности, аналогичная методу максимального правдоподобия.

Ключевые слова: *навигационная безопасность, векториальная погрешность, плотность векториальной погрешности, расчет обсервованных координат.*

Введение. Определение места судна с помощью нескольких изолиний обобщено с помощью метода линий положения, при котором изолиния заменяется линией положения в районе счислимой точки судна. При наличии избыточных линий положения выбор обсервованных координат производится таким образом, чтобы их точность была максимальной. Это достигается расчетом координат методом максимального правдоподобия, алгоритм расчета которого однозначно определяется законом распределения вероятностей погрешностей линий положения. Так как до недавнего времени считалось, что случайные погрешности измерений навигационных параметров, как и погрешности линий положения, подчиняются нормальному закону распределения вероятностей, то расчет обсервованных координат производится методом наименьших квадратов, который является методом максимального правдоподобия для нормального закона. Однако в течение последних 30 лет исследования случайных погрешностей измерения навигационных параметров показали, что их законы распределения зачастую отличаются от закона Гаусса. Поэтому в случае расчета обсервованные координаты при избыточных линиях положения методом наименьших квадратов может происходить потеря их точности. Поэтому расчета эффективных обсервованных координат, полученных при определении места судна по избыточным линиям положения может быть использована двумерная плотность распределения векториальной позиционной погрешности, что составляет содержание данной работы.

Краткий обзор публикаций по теме. В работах [1, 2] анализируются статистические данные погрешностей навигационных измерений, полученные в натурных наблюдениях, и показано, что погрешности не подчиняются нормальному закону распределения. Как указывается в работе [3], анализ статистических материалов показал, что предположение о распределении случайных погрешностей определения широты и долготы по закону Гаусса не является корректным и требует альтернативного подхода. Смешанные законы двух типов, альтернативные нормальному закону, предложены для описания случайных погрешностей навигационных измерений в работе [4], а в работе [5] с этой же целью предложен обобщенный закон Пуассона.

Оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных линиях положения произведена в работе [6], показано, что при смешанных законах распределениях эффективность меньше единицы, и с ростом существенного параметра она стремится по величине к единице.

Цель. Цель настоящей статьи заключается в разработке процедуры расчета эффективных координат судна применением двумерной плотность распределения векториальной позиционной погрешности.

Материалы и методы. Вопросы теории и практики определения места судна методом линий положения подробно изложены в работе [7]. Здесь же рассмотрим особенности определения места судна при числе линий положения больше двух.

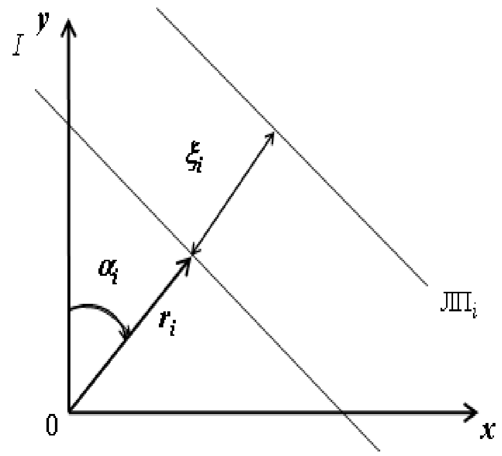

Рис. 1. Элементы линии положения

В общем случае линия положения (ЛП) задается в прямоугольной системе координат $x0y$, начало которой совпадает со счислимой точкой судна или с другой точкой с известными географическими координатами. Линия положения задается относительно начала системе координат $x0y$ переносом r_i, т.е. длиной нормали от начала системы координат до i-й ЛП, и направлением градиента навигационного параметра α_i, т.е. – углом между переносом r_i и осью y выбранной системы координат (рис. 1). Истинное место судна находится на линии *I-I*, когда погрешность линии положения ξ_i отсутствует. Погрешность измерения навигационного параметра η_i ведет к появлению погрешности линии положения ξ_i, которая вызывает дополнительное смещение линии положения ЛП_i в направлении градиента навигационного параметра, как показано на рис. 1.

Уравнение линии положения выражает связь элементов линии положения α_i и r_i с координатами *x* и *y* ЛП_i, учитывая погрешность линии положения ξ_i. Как следует из рис. 2, уравнение ЛП_i имеет следующий вид:

$$r_i + \xi_\text{i} = x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i\,. \qquad (1)$$

Очевидно, выбор обсервованной точки при определении места судна по двум линиям положения однозначный.

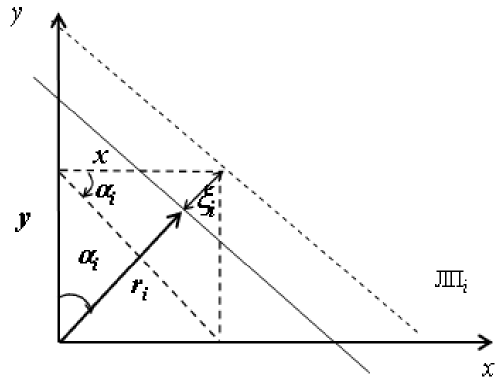

Рис. 2. Связь элементов линий положения с ее координатами

Результаты и их обсуждение. Покажем, что эффективные обсервованные координаты места судна, для которых характерная минимальная ковариационная матрица, можно получить, используя двумерную плотность *f(x,y)* вектора погрешности определения места судна. Основная посылка определения эффективных обсервованных координат с помощью плотности *f(x,y)* заключается в допущении, что эффективная обсервованная точка совпадает с наиболее вероятной точкой плотности *f(x,y)*, правомочность которого доказана в работе [9]. Поэтому для определения эффективных обсервованных координат найдем наиболее вероятную точку двумерной плотности *f(x,y)*, т.е. точку в которой *f(x,y)* достигает максимума. Полагаем, что *f(x,y)* имеет первые частные производные. Наиболее вероятную точку ищем из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} f\,(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} f\,(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Так как плотность *f(x,y)* для независимой системы ЛП выражается произведением плотностей независимых случайных величин, то система (2) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\{A_n \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)\} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\{A_n \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)\} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Если учесть, что функция *f(x,y)* достигает максимума в той же точке, что и ее логарифм, то сокращая в системе (3) множитель A_n и заменяя произведение плотностей $f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)$ суммой их логарифмов

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x} \ln\,[f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)] = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial y} \ln\,[f_i(X\sin\alpha_i + Y\cos\alpha_i - r_i)] = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Решением данной системы уравнений *x*= Δx_c и *y*= Δy_c являются эффективные значения искомых приращений координат к счислимым координатам.

Для удобства поиска значений Δx_c и Δy_c учитываем, что:

$$\xi_\text{i} = x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i$$

Поэтому по правилам дифференцирования сложной функции можно записать следующее выражение, входящее в уравнения (4):

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln[\,f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)] = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\ln[\,f_i(\xi_i)]\frac{\partial \xi_i}{\partial x}\cdot$$

Так как $\dfrac{\partial \xi_i}{\partial x} = \sin\alpha_\text{i}$, то справедливо следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x}\ln[\,f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)] = \sum_{\text{i}=1}^{\text{n}}\sin\alpha_\text{i}\,\frac{\partial}{\partial \xi_\text{i}}\ln[\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})]\cdot \qquad (5)$$

Аналогично:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y}\ln[\,f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)] = \sum_{\text{i}=1}^{\text{n}}\cos\alpha_\text{i}\,\frac{\partial}{\partial \xi_\text{i}}\ln[\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})], \qquad (6)$$

так как $\dfrac{\partial}{\partial \text{y}}\xi_\text{i} = \cos\alpha_\text{i}\,\cdot$

Система уравнений правдоподобия (4) с учетом (5) и (6) принимает вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\text{i}=1}^{\text{n}}\sin\alpha_\text{i}\,\dfrac{\partial}{\partial \xi_\text{i}}\ln[\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})] = 0, \\ \sum\limits_{\text{i}=1}^{\text{n}}\cos\alpha_\text{i}\,\dfrac{\partial}{\partial \xi_\text{i}}\ln[\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})] = 0, \end{cases} \qquad (7)$$

$$\xi_\text{i} = x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i\,.$$

Учитываем, что в общем случае справедливо соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\text{i}}\ln[\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})] = \frac{\dfrac{\partial}{\partial \xi_\text{i}}\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})}{\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})},$$

поэтому, с учетом приведенного равенства, система уравнений (7) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\text{i}=1}^{\text{n}}\sin\alpha_\text{i}\,\dfrac{\dfrac{\partial}{\partial \xi_\text{i}}\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})}{\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})} = 0, \\ \sum\limits_{\text{i}=1}^{\text{n}}\cos\alpha_\text{i}\,\dfrac{\dfrac{\partial}{\partial \xi_\text{i}}\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})}{\text{f}_\text{i}(\xi_\text{i})} = 0, \end{cases} \qquad (8)$$

$$\xi_\text{i} = x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i\,.$$

С помощью системы уравнений (8) можно получить выражения для расчета эффективных координат судна при избыточных линиях положения, исходя из плотности закона распределения погрешностей линий положения, их числа и геометрии расположения.

Рассмотрим применение предлагаемого метода для расчета обсервованных координат судна при распределении погрешностей линий положения по обобщенному закону Пуассона с плотностью:

$$f(\xi)=\frac{B}{\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2})]$$

где $B=\dfrac{\exp(-c)}{\sqrt{2\pi}}$, $a_k=\dfrac{c^k}{k!}k^{-\frac{1}{2}}$.

Для обобщенного закона Пуассона выражение для $\dfrac{\partial}{\partial\xi}f(\xi)/f(\xi)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}\{\frac{B}{\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2})]\}=-\frac{B}{\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k[\frac{\xi}{k\sigma^2}\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2})]\}=$$

$$-\frac{B}{\sigma}\frac{\xi}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k[\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2})]\}=-\frac{\xi}{\sigma^2}\frac{B}{\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k[\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2})]\}.$$

Следовательно:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial\xi}f(\xi)}{f(\xi)}=\frac{-\frac{\xi B}{\sigma^3}\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k[\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2})]\}}{\frac{B}{\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2})]}=-\frac{\xi}{\sigma^2}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2})]}.$$

Система уравнений (8) для рассматриваемого случая принимает следующий вид:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\dfrac{\xi_i}{\sigma_i^2}\dfrac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}=0,\\ \sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\dfrac{\xi_i}{\sigma_i^2}\dfrac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}=0,\end{cases}\qquad(9)$$

$$\xi_i=x\sin\alpha_i+y\cos\alpha_i-r_i.$$

Рассмотрим решение полученной нелинейной системы уравнений методом простой итерации. Первое уравнение можно записать в следующем виде:

$$X\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin^2\alpha_i}{\sigma_i^2}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\alpha_i}{\sigma_i^2}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}(Y\cos\alpha_i-r_i)=0,$$

откуда

$$X=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\alpha_i}{\sigma_i^2}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}(r_i-Y\cos\alpha_i)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\alpha_i^2}{\sigma_i^2}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}}$$

Получили уравнение, в левой части которого находится искомая переменная X. Аналогично, со второго уравнения системы (9) находим выражение для второй неизвестной переменной Y:

$$Y\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos^2\alpha_i}{\sigma_i^2}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\alpha_i}{\sigma_i^2}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}(X\sin\alpha_i-r_i)=0,$$

$$
Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\alpha_i}{\sigma_i^2} \frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}(r_i - X\sin\alpha_i)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\alpha_i^2}{\sigma_i^2} \frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}}
$$

Полученные уравнения составляют систему нелинейных уравнений, которая решается методом простых итераций, причем в качестве начального приближения принимаются $X = X_o$ и $Y = Y_o$:

$$
\begin{cases}
X = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin\alpha_i}{\sigma_i^2} \frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}(r_i - Y\cos\alpha_i)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin\alpha_i^2}{\sigma_i^2} \frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}}; \\
Y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\alpha_i}{\sigma_i^2} \frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}(r_i - X\sin\alpha_i)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\alpha_i^2}{\sigma_i^2} \frac{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \frac{1}{k}\exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}{\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \exp(-\frac{\xi_i^2}{2k\sigma_i^2})]}}; \\
\xi_i = X\sin\alpha_i + Y\cos\alpha_i - r_i.
\end{cases} \qquad (10)
$$

Начальные значения переменных X и Y подставляются в третье уравнение, затем те же переменные и значения ξ_i подставляются в правые части первого и второго уравнений системы (10), в результате чего рассчитывают очередные приближения искомых переменных, которые являются исходными для очередной итерации. Расчет обсервованных координат по избыточным линиям положения, погрешности которых подчиняются обобщенному закону Пуассона, с помощью (10) обеспечивает минимальную ковариационную матрицу векториальной погрешности.

Выводы.

1. Получено аналитическое выражение плотности векториальной позиционной погрешности при избыточных измерениях и показана возможность ее применения для решения задач оценки точности навигации судна.
2. Показано, что с помощью плотности векториальной погрешности имеется возможность расчета эффективных обсервованых координат судна независимо от закона распределения погрешности навигационных измерений..
3. Приведена система расчета координат судна с применением плотности векториальной погрешности, распределенной по обобщенному закону Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондрашихин В.Т. Определение места судна / Кондрашихин В.Т. - М.: Транспорт, 1989. - 230с.
2. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation / Hsu D. A. // The Journal of Navigation. – Vol. 32.- № 3. – P. 426 - 429.
3. Monteiro Luis. What is the accuracy of DGPS? / Sardinia Monteiro Luis, Moore Terry, Hill Chris. // J. Navig. 2005. 58, № 2, p. 207-225.
4. Астайкин Д.В. Идентификация законов распределения навигационных погрешностей смешанными законами двух типов / Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Автоматизация судовых технических средств: науч. -техн. сб. – 2014. – Вып. 20. Одесса: ОНМА. – С. 3 – 9.
5. Сикирин В.Е. Описание навигационных погрешностей с помощью обобщенного распределения Пуассона/ Сикирин В.Е.// Судовождение: Сб. научн. трудов./ОНМА, Вып. 26. – Одесса: «ИздатИнформ», 2016 - С. 152 – 156.
6. Бурмака И.А. Оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных измерениях / Бурмака И.А., Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Вестник Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. Санкт-Петербург.– 2016. – выпуск 1 (35). – С. 24 - 29.
7. Крамер Г. Математические методы статистики/ Крамер Г.– М.: Мир. – 1975.- 648 с.
8. Корн Г. Справочник по математике / Корн Г., Корн Т. - М.: Наука, 1984.- 832 с.
9. Астайкин Д.В. Оценка точности координат судна при избыточных измерениях/ Астайкин Д.В., Сикирин В.Е., Ворохобин И.И., Алексейчук Б.М. – Saarbrucken, Deutschland/ Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 с.

REFERENCES

1. Kondrashikhin V.T. Location of ship / Kondrashikhin V.T. - M.: Transport, 1989. – 230s.
2. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation / Hsu D. A. // The Journal of Navigation. – Vol. 32.- № 3. – P. 426 - 429.
3. Monteiro Luis. What is the accuracy of DGPS? / Sardinia Monteiro Luis, Moore Terry, Hill Chris. // J. Navig. 2005. 58, № 2, p. 207-225.
4. Astayrin D.V. Authentication of laws of distributing of navigation errors by the mixed laws of two types /Astayrin D.V., Alekseychuk B.M.// Avtomatizatsiya sudovyh tehnicytskih sredstv: nauch.-tehn. sb. – 2014. – Vyp. 20. Odessa: ONMA. – P. 3 – 9.
5. Sikirin V.E. Description of navigation errors by the generalized distributing of Puasson / Sikirin V.E.// Sudovozhdenie: Sb. nauchn. trudov./ONMA, Vyp. 26. – Odessa: «IzdatInform», 2016 - P. 152 – 156.
6. Burmaka I.A. Estimation of efficiency of coordinates of ship at the surplus measuring / Burmaka I.A., Astaykin D.V., Alekseychuk B.M. // Vestnik Gosudarstvennogo univtrsiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. Sankt-Peterburg.– 2016. – vypusk 1 (35). – P. 24 - 29.
7. Cramer H. Mathematical methods of statistics/ Cramer H. – M.: Mir. – 1975.- 648 p.
8. Korn G. Reference book by mathematic / Korn G., / Korn T. - M.: Nauka, 1984.- 832 p.
9. Astayrin D.V. Estimation of exactness of coordinates of ship at the surplus measuring / Astayrin D.V., Sikirin V.E., Vorokhobin I.I., Alekseychuk B.M. – Saarbrucken, Deutschland/ Germaniya: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 p.

Closeness of distributing of vektor's position error at the surplus measuring and its use.

I.I. Vorokhobin.

The closeness of vektor's error is considered at the surplus measuring and possibility of its application for the decision of tasks of estimation of exactness of navigation of ship is shown.

It is shown that by the closeness of vektor's error is present possibility of calculation of effective coordinates of ship regardless of law of distributing of error of the navigation measuring. The system of calculation of coordinates of ship with the use of closeness of vektor's error is resulted, similar to the maximum likelihood method.

Keywords: navigation safety, vektor's error, closeness of vektor's error, calculation of coordinates.