Анализ возможности применения ортогонального разложения плотности смешанных законов распределения погрешностей полиномами Эрмита

И. И. Ворохобин, И. Ю. Фусар, Б. М. Алексейчук

https://doi.org/10.31174/NT2018-158VI18-22

Национальный Университет «Одесская Морская Академия», Одесса, Украина
Corresponding author. E-mail: burmaka-mob@ukr.net

Paper received 24.01.18; Accepted for publication 29.01.18.

Аннотация. Для смешанных законов распределения вероятностей погрешностей первого и второго типов приведены аналитические выражения стандартной и нормированных плотностей. Рассчитаны численные значения нормирующих множителей и четвертых центральных моментов для нормированных плотностей со значением существенного параметра, не превосходящим 10. Предложено выражение оптимального ортогонального разложения с одним членом, для которого характерна максимальная сходимость с нормированной плотностью.
Произведен расчет кривых нормированных плотностей смешанных законов первого и второго типа и их соответствующих ортогональных разложений в ряд Грама-Шарлье типа А, анализ графиков которых показал хорошее совпадение плотностей с их разложением.

Ключевые слова: *смешанные законы распределения, нормированные плотности, ортогональное разложение плотности, ряд Грама-Шарлье типа А, полиномы Эрмита.*

Введение. Одним из существенных аспектов проблемы обеспечения надлежащего уровня безопасности судовождения является повышение точности контроля места судна при плавании в стесненных водах. При наличии избыточных линий положения выбор обсервованных координат производится таким образом, чтобы их точность была максимальной. Это достигается расчетом координат методом максимального правдоподобия, алгоритм расчета которого однозначно определяется законом распределения вероятностей погрешностей линий положения. Поэтому для обеспечения максимальной точности обсерваций места судна необходимо знать закон распределения погрешностей навигационных измерений. Однако при дефиците статистических материалов погрешностей не удается с помощью стандартной процедуры определить закон их распределения, хотя можно оценить центральные моменты распределения и если гистограмма выборки имеет «утяжеленные хвосты», то можно использовать разложение плотности распределения погрешностей в ряд Грама-Шарлье типа А с помощью ортогональных полиномов Эрмита, не располагая ее аналитическим выражением. Существенным является точность соответствия плотности распределения ее ортогональному разложению, чему посвящена данная статья.

Краткий обзор публикаций по теме. Альтернативно нормальному закону распределения для описания случайных погрешностей навигационных измерений в работе [1] предложены смешанные законы первого и второго типов, а в работе [2] представлены статистические материалы по точности определения места судна с помощью приёмника спутниковой радионавигационной системы, которые показали, что предположение о распределении случайных погрешностей определения широты и долготы по закону Гаусса не является корректным.

Анализ статистических данных погрешностей навигационных измерений, полученных в натурных наблюдениях, представлен в работах [3, 4], который показал несостоятельность гипотезы о распределении погрешностей по нормальному закону. В работе [5] для описания случайных погрешностей предложен обобщенный закон Пуассона, причем в работе [6] приведены результаты исследования возможности описания систем зависимых случайных величин с помощью обобщенного распределения Пуассона с базовым нормальным распределением.

В работе [7] приведены результаты идентификации законов распределения погрешностей навигационных измерений, которые показывают, что погрешности измерений радиолокационных пеленгов и расстояний в основном подчиняются смешанным законам первого и второго типа.

Если погрешности навигационных измерений не подчиняются нормальному закону, то, как показано в работе [8], применение метода наименьших квадратов для расчета обсервованных координат судна не обеспечивает возможности получения их эффективных оценок. Так в работе [9], показано, что при смешанных законах распределениях эффективность обсервованных координат судна при избыточных линиях положения меньше единицы, и с ростом существенного параметра она стремится по величине к единице.

Анализ работы [10] показывает, что разнообразие законов распределения вероятностей случайных погрешностей, особенностью которых является наличие утяжеленных хвостов, может быть унифицировано использованием ортогонального разложения с полученными значениями центральных моментов высших порядков.

Цель. Целью статьи является анализ степени совпадения плотности распределения вероятностей случайных погрешностей с ее ортогональным разложением и возможностей его использования на примере смешанных законов первого и второго типов.

Материалы и методы. В работе [10] приведены результаты сравнения нормированных плотностей $f(x)$ и их ортогонального разложения $f(x)$ полиномами Эрмита для смешанных законов обоих типов и обобщенного закона Пуассона, которые показывают, что ортогональное разложение плотности для трех упомянутых законов распределения обладает наилучшей сходимостью с самой плотностью при использовании только первого члена ортогонального разложения, т. е. оптимальное ортогональное разложение выражается следующим образом:

$$f(y)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-y^2/2)[1+(\mu_4-3)(y^4-6y^2+3)/24], \quad (1)$$

где $y = x/\sigma$.

Рассмотрим нормированные плотности смешанных законов первого и второго типа и их разложения с помощью ортогонального разложения (1). В работе [7], анализ статистических материалов, полученных в натурных наблюдениях в реальных условиях эксплуатации, показал, что погрешности измерений навигационных параметров подчиняются смешанным законам распределения двух типов, стандартные плотности которых соответственно имеют вид [1]:

$$f_1(x)=\frac{2^n\alpha^{n+\frac{1}{2}}n!}{\sqrt{2\pi}\,1\cdot3\cdot\cdot(2n-1)}\,\frac{1}{(x^2/2+\alpha)^{n+1}},$$

$$f_2(x)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot(2n+1)\alpha^{n+1}}{\sqrt{2}2^{n+1}n!}\,\frac{1}{(x^2/2+\alpha)^{n+3/2}}, \quad (2)$$

где α - масштабный параметр;

n – существенный параметр.

Для преобразования плотностей (2) к нормированному виду использована формула [11]:

$$g(\eta)=\mu_2^{1/2} f(\mu_2^{1/2}\eta),$$

где $\eta=\xi/\mu_2^{1/2}$ - нормированная погрешность с единичной дисперсией;

μ_2 - дисперсия случайной величины ξ;

$g(\eta)$ - нормированная плотность распределения.

Для плотности смешанного закона распределения первого типа дисперсия равна $\mu_2=\frac{2\alpha}{2n-1}$ и соответствующая нормированная плотность $g_1(\eta)$ имеет следующий вид:

$$g_1(\eta)=\frac{B_1}{(\eta^2/(2n-1)+1)^{n+1}}. \quad (3)$$

Здесь $B_1=\frac{2^{2n}[(n)!]^2}{(2n-1)^{1/2}\pi(2n)!}$ - нормирующий множитель.

Центральные четные моменты μ_{2m} нормированной случайной величины η определяются выражением:

$$\mu_{2m}^{(1)}=\frac{(2n-1)^m n![2(n-m)]!(2m)!}{(2n)!(n-m)!m!}.$$

Аналогично производится преобразование плотности смешанного закона распределения второго типа к нормированному виду, учитывая что дисперсия распределения равна $\mu_2=\alpha/n$. Соответствующая нормированная плотность $g_2(\eta)$ имеет следующий вид:

$$g_2(\eta)=\frac{B_2}{(\eta^2/2n+1)^{n+3/2}}. \quad (4)$$

Причем $B_2=\frac{(2n+1)!}{(2n)^{1/2}2^{2n+1}(n!)^2}$ - нормирующий множитель. Центральные четные моменты μ_{2m} нормированной случайной величины η определяются выражением:

$$\mu_{2m}^{(2)}=\frac{n^m(2m)!(n-m)!}{2^m m!n!}.$$

Результаты и их обсуждение. Для реализации поставленной в статье цели вначале рассчитаем значения нормированных плотностей смешанного закона распределения первого типа (3) и соответствующим им ортогонального разложения для значений существенного параметра n = 4, 6, 8, 10. Для рассматриваемой плотности в табл. 1 приведены значения нормирующего множителя B_1, а в табл. 2 - значения центрального момента μ_4.

Таблица 1. Значения нормирующего множителя B_1

n	4	6	8	10
B_1	0,440213	0,4256591	0,4187223	0,4146626

Таблица 2. Значения центрального момента μ_4

n	2	4	6	8	10
μ_4	9	4.2	3.667	3.462	3.353

На рис. 1 показаны кривые нормированной плотности $g_1(\eta)$ для n = 4, 6, окрашенные красным цветом. Так как кривые плотностей симметричны, то показана только половина кривой для положительных значений погрешности, принимающих значения в диапазоне шести средне квадратических отклонений. На этом же рисунке синим цветом показаны соответствующие кривые ортогонального разложения.

Кривые нормированной плотности $g_1(\eta)$ для n = 8, 10 и кривые ортогонального разложения представлены на рис. 2. Анализ рис. 1 и рис. 2 показывает, что нормированная плотность $g_1(\eta)$ и ее ортогональное разложение при существенном параметре $n \geq 4$ практически совпадают.

Аналогично производился расчет кривой нормированной плотности $g_2(\eta)$ смешанного закона распределения второго типа и кривой соответствующего ортогонального разложения, причем в табл. 3 приведены значения нормирующего множителя B_2 для тех же значений параметра n, а в табл. 4 –

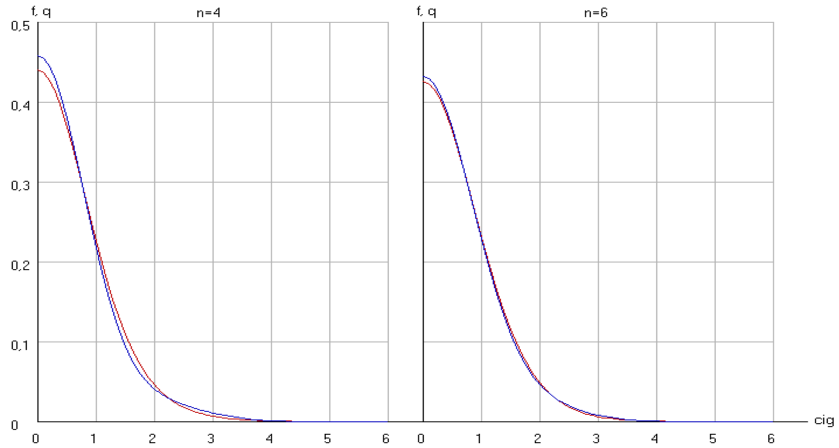

Рис. 1. Нормированные плотности $g_1(\eta)$ и их разложения $f(\eta)$ при n = 4, 6

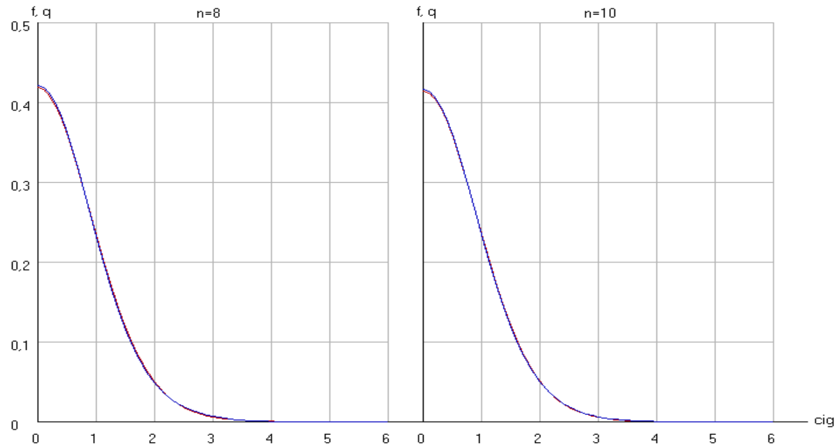

Рис. 2. Нормированные плотности $g_1(\eta)$ и их разложения $f(\eta)$ при n = 8, 10

значения центрального момента μ_4, необходимого при расчете кривой ортогонального разложения.

Таблица 3. Значения нормирующего множителя B_2

n	2	4	6	8	10
B_2	0,46875	0,435036	0,423290	0,417309	0,413690

Таблица 4. Значения центрального момента μ_4

n	2	4	6	8	10
μ_4		4	3,6	3,429	3,333

Кривые нормированной плотности $g_2(\eta)$ для n = 4, 6 показаны на рис. 3, на этом же рисунке показаны синим цветом соответствующие кривые ортогонального разложения. На рис. 4 представлены кривые нормированной плотности $g_2(\eta)$ для n = 8, 10 и кривые ортогонального разложения. Как и в предыдущем случае, из рис. 3 и рис. 4 следует, что нормированная плотность $g_2(\eta)$ и ее ортогональное разложение при существенном параметре $n \geq 4$ практически совпадают.

Выводы

1. Приведены аналитические выражения стандартной и нормированных плотностей смешанных законов распределения вероятностей погрешностей первого и второго типов. Для нормированных плотностей, значения существенного параметра которых не превосходит 10, вычислены нормирующие множители и четвертые центральные моменты.
2. Представлено выражение оптимального ортогонального разложения, содержащего только один член, которое обеспечивает максимальную сходимость с нормированной плотностью.
3. Рассчитаны кривые нормированных плотностей смешанных законов первого и второго типа и их соответствующих ортогональных разложений в ряд Грама-Шарлье типа А, анализ которых показал хорошее совпадение плотностей с разложением.
4. Рассмотренные смешанные законы распределения двух типов с "утяжеленными хвостами" можно представить ортогональным разложением, содержащим первый член разложения, что позволяет применять ортогональное разложение для описания погрешностей навигационных измерений.

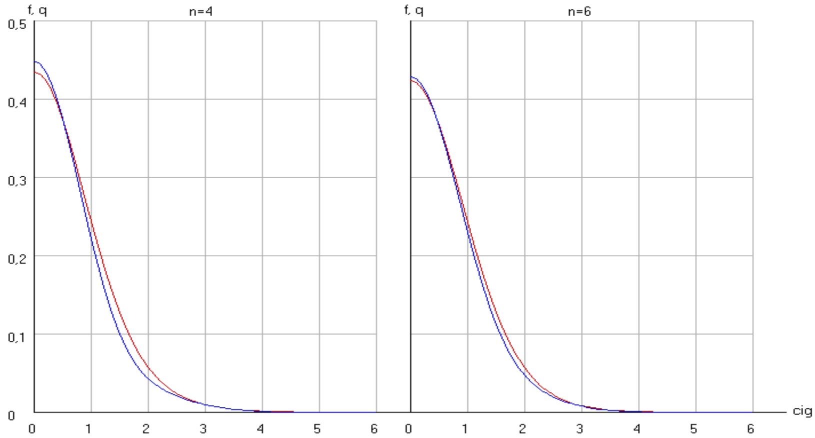

Рис. 3. Нормированные плотности $g_2(\eta)$ и их разложения $f(\eta)$ при n = 4, 6

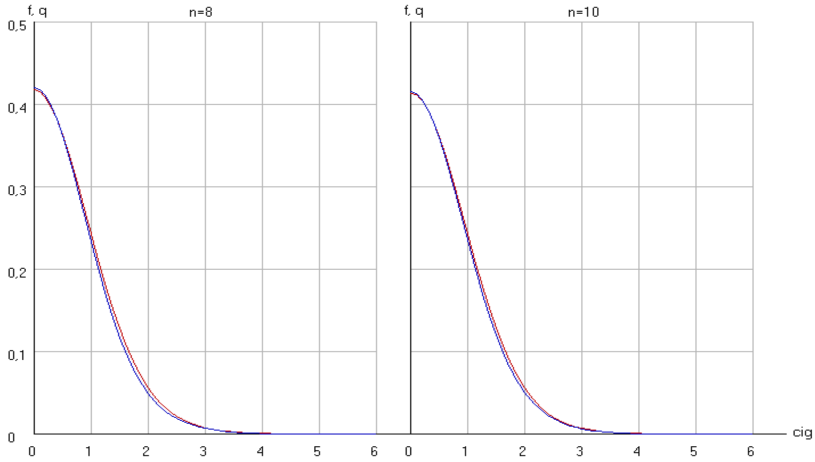

Рис. 4. Нормированные плотности $g_2(\eta)$ и их разложения $f(\eta)$ при n = 8, 10

ЛИТЕРАТУРА

1. Астайкин Д.В. Идентификация законов распределения навигационных погрешностей смешанными законами двух типов / Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Автоматизация судовых технических средств: науч. -техн. сб. – 2014. – Вып. 20. Одесса: ОНМА. – С. 3 – 9.
2. Monteiro Luis. What is the accuracy of DGPS? / Sardinia Monteiro Luis, Moore Terry, Hill Chris. // J. Navig. 2005. 58, № 2, p. 207-225.
3. Кондрашихин В.Т. Определение места судна / Кондрашихин В.Т. - М.: Транспорт, 1989. - 230с.
4. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation / Hsu D. A. // The Journal of Navigation. – Vol. 32.- № 3. – P. 426 - 429.
5. Сикирин В.Е. Описание навигационных погрешностей с помощью обобщенного распределения Пуассона/ Сикирин В.Е.// Судовождение: Сб. научн. трудов./ОНМА, Вып. 26. – Одесса: «ИздатИнформ», 2016 - С. 152 – 156.
6. Астайкин Д.В. Оценка точности координат судна при избыточных измерениях/ Астайкин Д.В., Сикирин В.Е., Ворохобин И.И., Алексейчук Б.М. – Saarbrucken, Deutschland/Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 с.
7. Алексейчук Б.М. Идентификация закона распределения погрешностей измерений / Алексейчук Б.М., Пасечнюк С.С. // Судовождение: Сб. научн. трудов./ ОНМА, Вып. 27. – Одесса: «ИздатИнформ», 2016 - С.
8. Мудров В.М. Методы обработки измерений/ Мудров В.М., Кушко В.Л. - М.: Советское радио, 1976. -192 с.
9. Бурмака И.А. Оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных измерениях / Бурмака И.А., Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Вестник Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. Санкт-Петербург.– 2016. – выпуск 1 (35). – С. 24 - 29.
10. Ворохобин И.И. Эффективность применения полиномов Эрмита для ортогонального разложения плотностей распределения навигационных погрешностей/ Ворохобин И.И., Сикирин В.Е., Фусар И.Ю.// East European Scientific Journal, №11 (27), 2017, part 1.- С. 24-30.
11. Крамер Г. Математические методы статистики / Крамер Г. – М.: Мир. – 1975.-648 с.

REFERENCES

1. Astaykin D.V. Authentication of laws of distributing of navigation errors by the mixed laws of two types /Astaykin D.V., Alekseychuk B.M.// Avtomatizatsiya sudovyh tehnicytskih sredstv: nauch.-tehn. sb. – 2014. – Vyp. 20. Odessa: ONMA. – P. 3 – 9.
3. Kondrashikhin V.T. Location of ship / Kondrashikhin V.T. - M.: Transport, 1989. – 230s.
5. Sikirin V.E. Description of navigation errors by the generalized distributing of Puasson / Sikirin V.E.// Sudovozhdenie: Sb. nauchn. trudov./ONMA, Vyp. 26. – Odessa: «IzdatInform», 2016 - P. 152 – 156.
6. Astayrin D.V. Estimation of exactness of coordinates of ship at the surplus measuring / Astayrin D.V., Sikirin V.E., Vorokhobin I.I., Alekseychuk B.M. – Saarbrucken, Deutschland/

Germaniya: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 p.

7. Alekseychuk B.M. Authentication of law of distributing of errors of measuring / Alekseychuk B.M., Pasechnyuk S.S. // Sudovozhdenie: Sb. nauchn. trudov./ONMA, Vyp. 27. – Odessa: «IzdatInform», 2017 - P. 10 – 14.
8. Mudrov V.M. Methods of treatment of measurings / Mudrov V.M., Kushko V.L. - M.: Sovetskoe radio, 1976. -192 p.
9. Burmaka I.A. Estimation of efficiency of coordinates of ship at the surplus measuring / Burmaka I.A., Astaykin D.V., Alekseychuk B.M. // Vestnik Gosudarstvennogo univtrsiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. Sankt-Peterburg.– 2016. – vypusk 1 (35). – P. 24 - 29.
10. Vorokhobin I.I. Efficiency of application of the Ermit's polynomials for ortogonal decomposition of closeness of distributing of navigation errors/ Vorokhobin I.I., Sikirin V.E., Fusar I.Y.// East European Scientific Journal, №11 (27), 2017, part 1.- P. 24-30.
11. Cramer H. Mathematical methods of statistics/ . Cramer H. – M.: Mir. – 1975.- 648 p.

Анализ возможности применения ортогонального разложения плотности смешанных законов распределения погрешностей полиномами Эрмита

И. И. Ворохобин, И. Ю. Фусар, Б. М. Алексейчук

Аннотация. Для смешанных законов распределения вероятностей погрешностей первого и второго типов приведены аналитические выражения стандартной и нормированных плотностей. Рассчитаны численные значения нормирующих множителей и четвертых центральных моментов для нормированных плотностей со значением существенного параметра, не превосходящим 10. Предложено выражение оптимального ортогонального разложения с одним членом, для которого характерна максимальная сходимость с нормированной плотностью. Произведен расчет кривых нормированных плотностей смешанных законов первого и второго типа и их соответствующих ортогональных разложений в ряд Грама-Шарлье типа А, анализ графиков которых показал хорошее совпадение плотностей с их разложением.

Ключевые слова: *смешанные законы распределения, нормированные плотности, ортогональное разложение плотности, ряд Грама-Шарлье типа А, полиномы Эрмита.*

Analysis of possibility of application of orthogonal decomposition of closeness of the mixed laws of distributing of errors by the Ermyt's polynomials

I. I. Vorokhobin, I. Y. Fusar, B. M. Alekseychuk

Abstract. For the mixed laws of probability distribution of errors of the first and second types analytical expressions of standard are resulted and the rationed closenesses. The numeral values of rationing multipliers and fourth central moments for the rationed closenesses with the value of substantial parameter are expected , not excelling 10. Expression of optimum orthogonal decomposition with one member is offered, which maximal coincidence with the rationed closeness is characteristic for. The calculation of the crooked rationed closenesses of the mixed laws of the first and second type and their proper orthogonal decompositions is produced in the row of the Grama-Sharle type A, the analysis of the graphs of which showed the good coincidence of closenesses with decomposition.

Keywords: *mixed laws of distributing, rationed closenesses, orthogonal decomposition of closeness, row of the Grama-Sharle type A, the Ermyt’s polynomials.*