# TECHNICAL SCIENCES

## Анализ динамики и управляемости одной степени подвижности робота

***[1]Н. С. Ащепкова, [2]С. А. Ащепков**

*[1]Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара,
[2]Национальная металлургическая академия Украины
*Correspondsng autor. E-mail: ashchepkovanatalya@gmail.com

Paper received 14.12.19; Accepted for publication 28.12.19.

**https://doi.org/10.31174/SEND-NT2019-215VII26-10**

**Аннотация.** В работе представлены результаты исследования динамики и управляемости одной степени подвижности промышленного робота. В качестве примера рассмотрен робот, кинематическая схема которого содержит три ротационные пары пятого класса. Робот работает в сферической системе координат. На этапе кинематического анализа определены координаты особой точки (полюса) схвата в системе координат связаной с основанием манипулятора. Динамический анализ позволил составить математическую модель движения робота на основе уравнений Лагранжа II рода. Оценка управляемости выполнена для расширенного объекта управления, состоящего из манипулятора и исполнительного устройства привода. Для синтеза системы управления используется структурная схема с отрицательной обратной связью. Исследуемая степень подвижности $q_2$ манипулятора полностью управляемая.

***Ключевые слова:*** *робот, динамика, степень подвижности, управляемость.*

Промышленный робот, как объект управления, это - многоканальная, многосвязная, существенно нелинейная динамическая система. Исследованиями динамики и управления роботов занимались Е.И. Юревич, С.Ф. Бурдаков, А.В. Тимофеев, В.С. Ястребов, А.М. Филатов и другие.

Для обеспечения качества программных движений манипулятора, уменьшения ошибок позиционирования и обеспечения качественного регулирования применяют системы управления с использованием обратных связей.

Стабилизация программных движений манипулятора, представляет синтез алгоритма управления для обеспечения асимпототической устойчивости программного движения $q_i(t)$ при $t\in[t_0, t_f]$ при выполнении ограничений на быстродействие, перерегулирование, колебательность, степень устойчивости и т.д.

Динамика манипулятора описывается уравнением Лагранжа II рода, которое часто представляется в виде [1-3]:

$$A^*(q,\xi)\ddot{q}+B^*(q,\dot{q},\xi)=\delta, \tag{1}$$

а динамика приводов [1-3]:

$$T_1\ddot{\delta}+T_2\dot{\delta}+T_3\delta+T_4M_H(q,\dot{q},\xi)=K_{\delta U}U, \tag{2}$$

где $A^*(q,\xi)$ – матрица размерности $n\times n$, зависящая от конфигурации манипулятора; $B^*(q, q', \xi)$ – вектор-столбец размерности $n\times 1$; $q$ – вектор обобщенных координат манипулятора; $q'$ – вектор обобщенных скоростей манипулятора; $\xi$ – вектор геометрических и массово-инерционных параметров манипулятора; $\delta$ – вектор-столбец размерности $n\times 1$ усилий и моментов в приводах манипуулятора; $M_H$ – вектор-столбец размерности $n\times 1$ моментов внешних нагрузок на выходных валах приводов; $U$ – вектор-столбец размерности $n\times 1$ управляющих сигналов.

Под полной управляемостью динамической системы понимают наличие такого управляющего сигнала, который за ограничесннный промежуток времени способен перевести все $n$ переменных состояния расширенного объекта управления из заданных начальных состояний в требуемые конечные состояния [4, 5]. Причем, для полной управляемости необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости был равен порядку динамической системы [4, 5]: $rang\ Q_y=n$,

где $Q_y=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$ – матрица управляемости размерности $n\times n\cdot m$; $A$ – матрица собственных значений расширенного объекта управления размерности $n\times n$; $B$ – вектор-столбец размерности $n\times m$.

Проведем исследование динамики и управляемости отдельной степени подвижимости $q_2$ манипулятора, кинематическая схема которого изображена на рис. 1. Выполним моделирование программных движений манипулятора промышленного робота, проанализируем качество регулирования одной степенью подвижности с использованием системы управления с обратной связью.

Анализ динамики и моделирование управляемых движений манипулятора выполним с использованием уравненний Лагранжа II рода. Для исследования управляемости отдельной степени подвижимости $q_2$ рассмотрим упрощенную модель манипулятора, при этом звенья 3 - 6 объединим в одно звено длиной $l_{пр}$=1,6 м и массой $m_{пр}$=30 кг. Исходные данные: $l_0$=0,7м; $m_0$=115 кг; $l_1$=0,75 м; $m_1$=55 кг; $l_2$=1м; $m_2$=50 кг; $M$=600 Н·м. В каждой кинематической паре введём правые системы координат $X_iY_iZ_i$ как показано на рис 1.

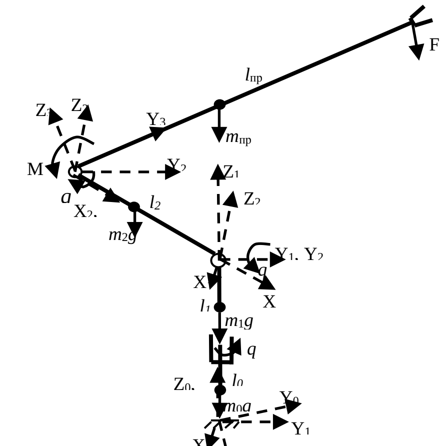


**Рис. 1.** Кинематическая схема и системы координат манипулятора

Анализ динамики манипулятора. Для рассматриваемого примера на основании [6] составим цепочку перемещений от 0 – го звена (основания манипулятора) до 3 – го звена, относительно которого особая точка неподвижна:

$$0 \xrightarrow{A_w(\vec{k},q_1)} 1 \xrightarrow{A_w(\vec{j},q_2)} 2 \xrightarrow{Aq(\vec{i},q_3)} 3.$$

Составим матрицы преобразования координат Денавита-Хартенберга [3, 6, 7]:

$$A_2^3 = A_w(\vec{i}, q_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Cosq_3(t) & -Sinq_3(t) & 0{,}5l_{np}Cosq_3(t) \\ 0 & Sinq_3(t) & Cosq_3(t) & 0{,}5l_{np}Sinq_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_1^2 = A_w(\vec{j}, q_2) = \begin{bmatrix} Cosq_2(t) & 0 & Sinq_2(t) & 0{,}5l_2Cosq_2(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -Sinq_2(t) & 0 & Cosq_2(t) & 0{,}5l_2Sinq_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_0^1 = A_w(\vec{k}, q_1) = \begin{bmatrix} Cosq_1(t) & Sinq_1(t) & 0 & 0 \\ -Sinq_1(t) & Cosq_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 + 0{,}5l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

После математических преобразований определим положение точки Р манипулятора в системе координат, связанной с основанием.

$$\vec{r}_p^{\,0} = \begin{bmatrix} Cosq_1(t)\cdot\left(0{,}5l_{np}Sinq_3(t)Sinq_2(t) + 0{,}5l_2Cosq_2(t)\right) + 0{,}5l_{np}Cosq_3(t)Sinq_1(t) \\ -Sinq_1(t)\cdot\left(0{,}5l_{np}Sinq_3(t)Sinq_2(t) + 0{,}5l_2Cosq_2(t)\right) + 0{,}5l_{np}Cosq_3(t)Cosq_1(t) \\ 0{,}5l_{np}Sinq_3(t)Cosq_2(t) + 0{,}5l_2Sinq_2(t) + l_0 + 0{,}5l_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Уравнение Лагранжа II рода запишем в виде[3, 6, 7]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \text{ или}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_П}{\partial q_i} = Q_i \qquad (3)$$

где $L=E_k-E_П$ –функция Лагранжа; $E_k$ – кинематическая энергия манипулятора, $E_п$ $E_П$ – потенциальная энергия манипулятора.

Если для исследования выбрана координата $q_2$, тогда правые части уравнения (3) будут иметь вид:

$$Q_2 = -\left[K_1\left(q_2 - q_{2\,np}\right) + K_2\dot{q}_2\right]\cdot M,$$

где $\Phi_1$ – координата, которая исследуется, М – момент силы, который создает привод данной степени движимости, $K_1$, $K_2$ – коэффициенты, которые определяются особенностями системы, которая рассматривается ($К_1$ $K_1$=1, $К_2$ =0,7), $q_{2\,np}$ = 2,09 рад – программное значение перемещения по координате $q_2$ $\Phi_{2.пр}$, для которой проводим исследование.

Для степени подвижности $q_i$ кинематическую энергию вычислим по формуле: $Ek_i = 0{,}5m_iq_i^2$, тогда

$$E_{k0} = 0; \quad E_{k1} = 0{,}5m_1\dot{q}_1^2; \quad E_{k2} = 0{,}5m_2\dot{q}_2^2; \quad E_{k\,np} = 0{,}5m_{np}\dot{q}_{np}^2.$$

Найдем кинематическую энергию манипулятора как сумму кинематических энергий каждого звена:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = E_{k0} + E_{k1} + E_{k2} + E_{k\,np},$$

тогда

$$E_k = 0{,}5m_1\dot{q}_1^2 + 0{,}5m_2\dot{q}_2^2 + 0{,}5m_{np}\dot{q}_3^2 = 0{,}5\left(m_1\dot{q}_1^2 + m_1\dot{q}_1^2 + m_{np}\dot{q}_3^2\right).$$

Для степени подвижности $q_i$ потенциальную энергию вычислим по формуле: $E_{Пi} = 0{,}5m_igh_i$, тогда

$$E_{П0} = m_0g\frac{l_0}{2}; \quad E_{П1} = m_1g\left(l_0 + \frac{l_1}{2}\right); \quad E_{П2} = m_2g\left(l_0 + l_1 + \frac{l_2\cdot Cosq_2}{2}\right);$$

$$E_{Пnp} = m_{np}g\left(l_0 + l_1 + l_2Cosq_2 + \frac{l_{np}\cdot Sinq_3}{2}\right).$$

Найдем потенциальную энергию манипулятора как сумму потенциальных энергий каждого звена:

$$E_П = \sum_{i=1}^{n} E_{Пi} = E_{П0} + E_{П1} + E_{П2} + E_{П\,np},$$

тогда

$$E_П = g\left[m_0\frac{l_0}{2} + m_1\left(l_0 + \frac{l_1}{2}\right) + m_2\left(l_0 + l_1 + \frac{l_2\cdot Cosq_2}{2}\right) + m_{np}\left(l_0 + l_1 + l_2Cosq_2 + \frac{l_{np}\cdot Sinq_3}{2}\right)\right].$$

Функция Лагранжа примет вид:

$$L = 0{,}5\left(m_1\dot{q}_1^2 + m_1\dot{q}_1^2 + m_{np}\dot{q}_3^2\right) - g\left[m_0\frac{l_0}{2} + m_1\left(l_0 + \frac{l_1}{2}\right) + m_2\left(l_0 + l_1 + \frac{l_2\cdot Cosq_2}{2}\right) + m_{np}\left(l_0 + l_1 + l_2Cosq_2 + \frac{l_{np}\cdot Sinq_3}{2}\right)\right].$$

Следовательно $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 2\cdot 0{,}5m_2\dot{q}_2 = m_2\dot{q}_2; \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2\ddot{q}_2 = 50\ddot{q}_2;$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial\left(-m_2g\,\dfrac{l_2\cdot Cosq_2}{2} - m_{np}gl_2Cosq_2\right)}{\partial q_2} = 0{,}5m_2gl_2\cdot Sinq_2 + m_{np}gl_2Sinq_2 = \left(0{,}5\cdot 50 + 30\right)\cdot 9{,}8\cdot 1\cdot Sinq_2 = 539Sinq_2.$$

Уравнение Лагранжа II рода для степени подвижности $q_2$ запишем в виде: $50\ddot{q}_2 - 539Sinq_2 = Q_2$.

С учетом правой части

$$Q_2 = -\left[K_1\left(q_2 - q_{2\,np}\right) + K_2\dot{q}_2\right]\cdot M = -\left[1\left(q_2 - 2{,}09\right) + 0{,}7\dot{q}_2\right]\cdot 600 = -600\cdot q_2 - 420\cdot\dot{q}_2 + 1254,$$

уравнения Лагранжа II рода для выделенной координаты $q_2$ будут иметь вид:

$$50\ddot{q}_2 + 420\cdot\dot{q}_2 + 600\cdot q_2 = 1254 + 539Sinq_2. \qquad (4)$$

Решив уравнение (4), с начальными условиями: $q_2(0) = \dfrac{\pi}{4} = 0{,}7854$ рад, $\dot{q}_2(0) = \dfrac{\pi}{6} = 0{,}5236$ рад/с получим зависимости перемещения, скорости и ускорения данной степени подвижности от времени.

Графики зависимости перемещения, скорости и ускорения координаты $q_2$ от времени полученные с помощью Mathcad пиведены на рис. 2 *а, б, в*.

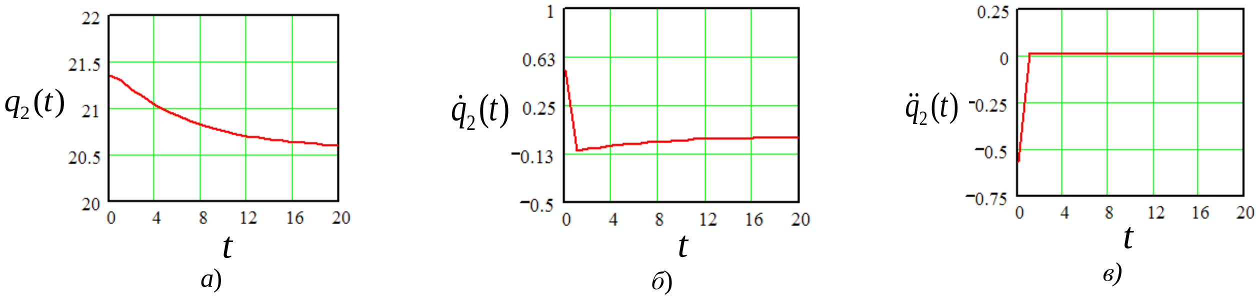


**Рис. 2.** Графики зависимости перемещения, скорости и ускорения координаты $q_2$

Анализ управляемости степени подвижности манипулятора. Выполним проверку системы на управляемость по исследуемой координате $q_2$. Запишем линеаризованные уравнения движения выделенной степени подвижности в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 50\ddot{q}_2 + 420\cdot\dot{q}_2 + 61\cdot q_2 = 1254\delta, \\ T_1\ddot{\delta} + T_2\dot{\delta} + T_3\delta = K_{\delta U}U; \end{cases} \tag{5}$$

где $q_2$ $\Phi_2$ – исследуемая координата, которая характеризует перемещение по одной степени подвижности; $\delta$ – координата, которая характеризует перемещение исполнительного органа привода по одной степени подвижности; δ –усилия и моменты в приводах манипулятора; $U$ – командный сигнал управления; $T_1$=0,03 с, $T_2$=0,15 с, $T_3$=1,5 с, $K_{\delta U}$=1,8 – параметры привода. В системе (5) учтено, что $Sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Приняв $x_1 = q_2$; $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{q}_2$; $x_3 = \delta$; $x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\delta}$; перепишем уравнения движения выделенной степени подвижности (5) в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -\frac{420}{50}\cdot x_2 - \frac{61}{50}\cdot x_1 - \frac{1254}{50}x_3 = 0, \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = \frac{-0{,}15}{0{,}03}x_4 - \frac{1{,}5}{0{,}03}x_3 + 1{,}8U. \end{cases} \tag{6}$$

Система уравнений (6) описывает расширенный объект управления, состоящий из манипулятора и исполнительного устройства, и используется для синтеза системы управления структурная схема которой представлена на рис. 3.

Систему (6) можно представить в виде $\dot{x} = Ax + BU$, где $A$ – матрица размерности $n\times n$, зависящая от конфигурации манипулятора; $B$ – матрица размерности $n\times m$; $x$ – вектор переменных состояния размерности $n\times 1$; $U$ – вектор-столбец размерности $m\times 1$ управляющих сигналов.

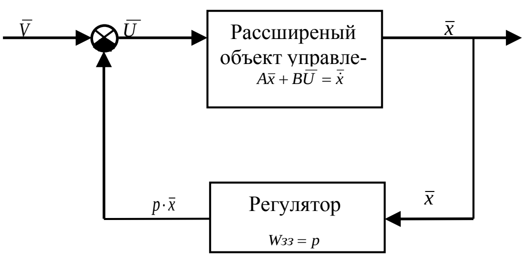


**Рис. 3.** Структурная схема расширенного объекта управления

Задача синтеза алгоритма управления манипулятором сводится к задаче определения коэффициентов матрицы *P*, удовлетворяющих условиям устойчивости и качества переходных процессов. Уравнение регулятора имеет вид:

$$\delta = U\text{-}px,$$

где U – вектор-столбец размерности $m\times 1$ управляющих сигналов, р – матриця регулятора размерности $m\times n$.

Матричная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p(S) = \frac{X(S)}{U(S)} = (SI - A)^{-1}\cdot B,$$

матричная передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W_3(S) = \frac{X(S)}{V(S)} = (SI - A + B\cdot p)^{-1}\cdot B,$$

где I – единичная матрица, $A$ – матрица размерности $n\times n$, зависящая от конфигурации манипулятора; $B$ – матрица размерности $n\times m$.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1{,}22 & -8{,}4 & -25{,}08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 50 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу управляемости

$$Q_y = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

где $Q_y$ – матрица управляемости размерности $n\times n\cdot m$; $A$ – матрица собственных значений расширенного объекта управления размерности $n\times n$; $B$ – вектор-столбец размерности $n\times m$.

Вычислим компоненты матрицы управляемости

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad A^2\cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ -45{,}144 \\ 9 \\ 135 \end{pmatrix}, \quad A^3\cdot B = \begin{pmatrix} -45{,}144 \\ 153{,}49 \\ 135 \\ 1125 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$Q_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -45{,}144 \\ 0 & 0 & -45{,}144 & 153{,}49 \\ 0 & 1{,}8 & 9 & 135 \\ 1{,}8 & 9 & 135 & 1125 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы управляемости *rang* $Q_y$=4 равен порядку динамической системы, т.е. выполняются необходимое и достаточное условия для полной управляемости исследуемой степени подвижности $q_2$ манипулятора.

В работе представлены результаты исследования динамики и управляемости одной степени подвижности промышленного робота. В качестве примера рассмотрен робот, кинематическая схема которого содержит три ротационные пары пятого класса. Робот работает в сферической системе координат. На этапе кинематического анализа определены координаты особой точки (полюса) схвата в системе координат связаной с основанием манипулятора. Динамический анализ позволил составить математическую модель движения робота на основе уравнений Лагранжа II рода. Оценка управляемости выполнена для расширенного объекта управления, состоящего из манипулятора и исполнительного устройства привода. Для синтеза системы управления используется структурная схема с отрицательной обратной связью. Исследуемая степень подвижности $q_2$ манипулятора полностью управляемая.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Юревич Е. И. Основы робототехники / Е. И. Юревич. – СПб.: Питер, 2005. – 252 с.
2. Бурдаков С. Ф. Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов / С. Ф. Бурдаков, В. А. Дьяченко, А. Н. Тимофеев. – М.: Высшая школа, 1986. – 264 с.
3. Шахинпур М. Курс робототехники. Пер. с англ. / М. Шахинпур. – М.: Мир, 1990. – 527 с.
4. Тимофеев А. В. Управление роботами: Учебное пособие/ А. В. Тимофеев. – Ленинград: Изд-во Лнингр. ун-та, 1986. – 240 с.
5. Ястребов В. С. Системы управления движением робота / В. С. Ястребов, А. М. Филатов. – М.: Машиностроение, 1979. – 176 с.
6. Ащепкова Н. С. Метод кинематического и динамического анализа манипулятора с использованием Mathcad/ Н. С. Ащепкова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий – Харьков: – 2015. – № 5/7 (77). – С. 54–63.
7. Механика промышленных роботов. Кн..1. Кинематика и динамика: учеб. пособие / Е. И. Воробьев, С. А. Попов, Г. И. Шевелёва. / под. ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. – К.: Вища школа, 1988. – 304 с.

## REFERENCES

1. Yurevich E. I. Robotics Basics/ E. I. Yurevich. – SPb.: Piter, 2005. – 252 p.
2. Burdakov S. F. Design of manipulators of industrial robots and robotic complexes / S. F. Burdakov, V. A. Dyachenko, A. N. Timofeev. – M.: Vysshaya shkola, 1986. – 264 p.
3. Shahinpur M. Robotics course. Per. s angl. / M. Shahinpur. – M.: Mir, 1990. – 527 p.
4. Timofeev A. V. Robot comtrol: Tutorial/ A. V. Timofeev. – Leningrad: Izd-vo Lningr. un-ta, 1986. – 240 p.
5. Yastrebov V. S. Robot motion control systems / V. S. Yastrebov, A. M. Filatov. – M.: Mashinostroenie, 1979. – 176 p.
6. Ashchepkova N. S. Mathcad in the kinematic and dynamic analysis of the manipulator/ N. S. Ashchepkova // Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij – Kharkov: – 2015. – № 5/7 (77). – P. 54–63.
7. Mechanics of industrial robots. V.1. Kinematics and dynamics: Tutorial / E. I. Vorobiev, S. A. Popov, G. I. Shevelyova. / pod. red. K. V. Frolova, E. I. Vorobieva. – K.: Visha shkola, 1988. – 304 p.

**Analysis of dynamics and controllability of one degree of robot mobility**

**N. S. Ashchepkova, S. A. Ashchepkov**

**Annotation.** The paper presents the results of a study of the dynamics and controllability of one degree of an industrial robot mobility. As an example, a robot is considered, the kinematic scheme of which contains three fifth-class rotational pairs. The robot works in a spherical coordinate system. At the stage of kinematic analysis, the coordinates of the singular point (pole) of the gripper in the coordinate system associated with the base of the manipulator are determined. Dynamic analysis made it possible to compose a mathematical model of the movement of the robot based on Lagrange equations of the second kind. Manageability assessment is performed for an extended control object, consisted of a manipulator and actuator. For the synthesis of the control system, a block diagram with negative feedback is used. The investigated degree of mobility $q_2$ of the manipulator is fully controllable.

***Keywords:*** *robot, dynamics, degree of mobility, controllability.*