

Анализ дивергентной потери устойчивости стационарных режимов движения двухзвенного экипажа

В. Г. Вербицкий, А. И. Безверхий, Д. Н. Татиевский, В. И. Попивший

Запорожская государственная инженерная академия
Corresponding author. E-mail: anatoliy.bezverkyi@hotmail.com

Paper received 10.12.18; Accepted for publication 17.12.18.

<https://doi.org/10.31174/SEND-NT2018-186VI22-22>

Аннотация. Исследуются дивергентная потеря устойчивости стационарных режимов движения упрощенной модели двухзвенного экипажа. Получены аналитические соотношения, определяющие условия дивергентной потери устойчивости при движении с постоянным углом Аккермана; выполнен анализ оценки точности аналитических результатов на основе сопоставления с результатами, полученными численно-аналитическим методом продолжения по параметру для полной модели.

Ключевые слова: двухзвенный экипаж, поворачиваемость, стационарный режим, продолжение по параметру, точки поворота, дивергентная неустойчивость.

Введение. Свойства поворачиваемости автопоезда могут существенно отличаться от соответствующих свойств отдельно взятого тягача вследствие перераспределения вертикальных реакций на осях тягача и возникновения поперечной реакции в точке сцепки с полуприцепом [12], [14]. Особого внимания, с точки зрения безопасности движения, заслуживает анализ условий, при которых возможно скачкообразное изменение (бифуркация складки, отвечающая дивергентной потере устойчивости кругового стационарного режима). Множество параметров, при которых происходят такие скачкообразные переходы стационарных состояний представляет критическое множество или бифуркационное множество, в структуре которого важную роль играют точки заострения (возврата) [7], [24].

Результаты работ Troger H., Zeman K. Fabio Della Rosaa, Giampiero Mastinub, Carlo Piccardia [18], [19] базировались на численном методе продолжения по двум параметрам [22], [23]. В работах [15], [16] Лобаса Л.Г. и Вербицкого В.Г. были рассмотрены вопросы качественного анализа нелинейных моделей колесных двухосных экипажей с привлечением элементов теории бифуркаций. Представленная работа нацелена на дальнейшее развитие графо-аналитического подхода с использованием идей бифуркационного анализа применительно к модели сочлененного экипажа.

Цель. Найти критическое множество параметров управления θ, v , отвечающих дивергентной потере устойчивости множества стационарных режимов движения двухзвенного автопоезда. Необходимо определить условия дивергентной потери устойчивости стационарных круговых режимов, отвечающих движению с различной продольной скоростью по кривой заданного радиуса кривизны (с фиксированным углом Аккермана).

Методы решения. Геометрический метод анализа множества стационарных режимов экипажа [9] в сочетании с подходами качественной теории динамических систем [1], [2] и теории бифуркаций динамических систем [15], [17], [24] дают возможность получить условия дивергентной потери устойчивости на кривой поворачиваемости в общем виде.

Как известно [1], [2], реализация двукратного стационарного режима динамической системы, в нашем случае системы (2), соответствует дивергентной потере устойчивости одного из этой пары режимов, так как якобиан системы (2), вычисленный в данном кратном режиме, имеет определитель равный нулю (последний совпадает со свободным членом соответствующего характеристического уравнения). Такой случай потери устойчивости

отвечает опасной потере устойчивости по Н.Н. Баутину [2]. Таким образом, определяя параметры управления, которым отвечают кратные стационарные режимы системы (2) (критические значения параметров), получим границу дивергентной потери устойчивости всего множества стационарных режимов. Оказывается, что это возможно без предварительного нахождения самого множества стационарных состояний системы (2).

Основная часть. В работе принят ряд упрощающих предположений, традиционных в задачах графо-аналитического анализа многообразий стационарных режимов велосипедной модели седельного автопоезда [4, 11]. Схема сочлененного экипажа приведена на рис.1.

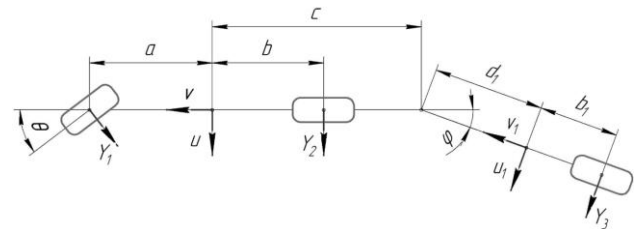


Рис.1. Конструктивная схема модели двухзвенного автопоезда
Здесь:

- v - продольная составляющая центра масс тягача;
- θ - угол поворота управляемого модуля;
- a, b - расстояние от центра масс тягача до центров передней (управляемой) оси и задней оси тягача;
- c - расстояние от центра масс тягача до точки сцепки со вторым звеном;
- b_1 - расстояние от центра масс второго звена до его задней оси;
- d_1 - расстояние от центра масс второго звена до точки сцепки с тягачом;
- Y_i - силы увода на осях, коэффициенты сопротивления уводу на осях k_i ;
- m - масса тягача;
- u - поперечная проекция вектора скорости центра масс тягача;
- ω - угловая скорость тягача, относительно вертикальной оси;
- m_2 - масса второго звена;
- v_1, u_1 - продольная и поперечная проекции вектора скорости центра масс полуприцепа;
- φ - угол складывания (угол между продольной осью тягача и полуприцепа).

Исходная система, определяющая множество стационарных режимов нелинейной модели двухзвенного автопоезда имеет вид

$$\begin{aligned} -(m + m_2)\omega v + Y_1 + Y_2 + Y_3 \cos \varphi + m_2 d_1 \omega^2 \sin \varphi &= 0; \\ c m_2 \omega v + a Y_1 - b Y_2 - c Y_3 \cos \varphi - c m_2 d_1 \omega^2 \sin \varphi &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$L_1 Y_3 - m_2 d_1 \omega v \cos \varphi + m_2 d_1 \omega u \sin \varphi - c m_2 d_1 \omega^2 \sin \varphi = 0;$$

$$\delta_1 = \theta - \frac{u + a\omega}{v};$$

$$\delta_2 = \frac{-u + b\omega}{v};$$

$$\delta_3 = \frac{-u_1 + b_1\omega}{v_1};$$

$$u_1 = (u - c\omega) \cos \varphi + v \sin \varphi - d_1\omega;$$

$$v_1 = v \cos \varphi - (u - c\omega) \sin \varphi,$$

где δ_i - углы увода на осях;

$l = a + b$ - длина тягача;

$L_1 = b_1 + d_1$ - длина второго звена.

Упрощенная (частично линеаризованная при малых углах φ) система уравнений, определяет стационарный режим движения автопоезда:

$$\begin{aligned} -(m + m_2)\omega v + Y_1 + Y_2 + Y_3 &= 0; \\ cm_2\omega v + aY_1 - bY_2 - cY_3 &= 0; \\ -d_1m_2\omega v + L_1Y_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

После исключения Y_3 система (2) приводится к замкнутой системе двух уравнений, которая отвечает некоторому приведенному тягачу (одному ведущему звену) с массой $m + \frac{m_2b_1}{L_1}$:

$$\begin{aligned} -(m + \frac{m_2b_1}{L_1})\omega v + \bar{Y}_1N_1 + \bar{Y}_2N_2 &= 0 \\ (a + \frac{cb_1m_2}{L_1(m + \frac{m_2b_1}{L_1})})\bar{Y}_1N_1 - (b - \frac{cb_1m_2}{L_1(m + \frac{m_2b_1}{L_1})})\bar{Y}_2N_2 &= 0 \end{aligned}$$

где $\bar{Y}_i = Y_i / N_i$ - безразмерная сила увода на i -й оси;

$$N_1 = \frac{bL_1m - (c-b)b_1m_2}{L_1l} g, \quad N_2 = \frac{(a+c)b_1m_2 + aL_1m}{L_1l} g$$

вертикальные реакции на осях.

После упрощения система (3) примет вид

$$\begin{aligned} -\omega v / g + \bar{Y}_1 \cdot b' / l + \bar{Y}_2 \cdot a' / l &= 0; \\ \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 &= 0, \end{aligned}$$

где $a' = (a + \frac{cb_1m_2}{L_1(m + \frac{m_2b_1}{L_1})})$ - приведенное расстояние от

центра масс до передней оси приведенного тягача;

$b' = (b - \frac{cb_1m_2}{L_1(m + \frac{m_2b_1}{L_1})})$ - приведенное расстояние от центра масс до задней оси приведенного тягача.

Решение этой системы имеет вид:

$$\bar{Y}_1(\delta_1) = \bar{Y}_2(\delta_2) = \frac{\omega v}{g},$$

тогда решением системы (2) будет:

$$\bar{Y}_1(\delta_1) = \bar{Y}_2(\delta_2) = \bar{Y}_3(\delta_3) = \frac{\omega v}{g} = \bar{a}_y \cdot (4)$$

1. Определяющее уравнение и уравнение поворачиваемости. Из определения углов увода δ_1, δ_2 в (1) следует $\delta_2 - \delta_1 = l\omega/v - \theta$. Далее разрешая соотношения (4) относительно углов увода δ_1, δ_2 , получим:

$$\begin{aligned} \delta_1 = \bar{Y}_1^{-1}(\bar{a}_y) = G_1(\bar{a}_y), \quad \delta_2 = \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y) = G_2(\bar{a}_y), \\ \delta_2 - \delta_1 = G_2(\bar{a}_y) - G_1(\bar{a}_y). \end{aligned}$$

После подстановки в последнее уравнение, получим определяющее уравнение (5):

$$\begin{aligned} G(\bar{a}_y) = l\omega/v - \theta; \quad \omega = g\bar{a}_y/v; \quad (5) \\ G(\bar{a}_y) = gl/v^2 \cdot \bar{a}_y - \theta. \end{aligned}$$

Заметим, что если принять в качестве независимого аргумента $\bar{a}_y = \frac{v^2}{gR}$ (при фиксированном значении R), то уравнение (5) будет задавать кривую поворачиваемости (6)

$$G(\bar{a}_y) = gl/v^2 \cdot \frac{v^2}{gR} - \theta = l/R - \theta. \quad (6)$$

Нахождение круговых стационарных режимов на основе графо-аналитического подхода, использующего уравнение (5), предполагает знание двух параметров θ, v . Далее необходимо вычислить наклон подвижной прямой $\delta_2 - \delta_1 = gl/v^2 \cdot \bar{a}_y - \theta$, а после определения точек пересечения с неподвижной кривой $G(\bar{a}_y)$, найти соответствующие точкам пересечения значения удельного бокового ускорения \bar{a}_y и разность углов увода $\delta_2 - \delta_1$.

В случае круговых стационарных режимов, отвечающих фиксированному радиусу кривизны R , процедуру построения можно упростить. Действительно, выбрав текущее значение удельного бокового ускорения $\bar{a}_y = \frac{v^2}{gR}$,

мы однозначно определяем одну точку пересечения подвижной прямой с неподвижной кривой $G(\bar{a}_y)$ (точка

1 на рис. 2). Далее определяется соответствующее величине \bar{a}_y значение угла поворота управляемых колес θ (по графику кривой поворачиваемости - точка 2 на рис. 4). Последний шаг - определение точки 3 с координатами $(0, -\theta)$, через которую должна проходить подвижная прямая. Отметим, что разность аппликат точек 1 и 3 остается постоянной для любого стационарного режима на кривой поворачиваемости и равна l/R (величине угла Аккермана). Этот факт можно использовать при определении условий дивергентной потери устойчивости на кривой поворачиваемости, что и будет выполнено ниже.

2. Анализ дивергентной потери устойчивости многообразия круговых стационарных режимов движения и построение бифуркационного множества в плоскости параметров управления как двойственной кривой к $G(\bar{a}_y)$.

Стационарным режимам системы (1) соответствуют точки пересечения неподвижной кривой $\delta_2 - \delta_1 = G(\bar{a}_y)$ и подвижной прямой $\delta_2 - \delta_1 = gl/v^2 \cdot \bar{a}_y - \theta$. При определении устойчивости стационарных режимов на основе графо-аналитического подхода будут полезны следующие положения [1], [7], [13]:

1. Для устойчивости стационарного режима наклон подвижной прямой должен быть больше наклона неподвижной кривой в соответствующей точке пересечения (рис. 2).

2. Дивергентная потеря устойчивости стационарного режима происходит лишь при реализации кратного стационарного режима - в момент касания подвижной кривой с неподвижной (рис.2).

Последний критерий гарантирует сохранение свойств устойчивости стационарного режима при его эволюции, вследствие изменения параметров управления, вплоть до момента реализации кратного стационарного режима.

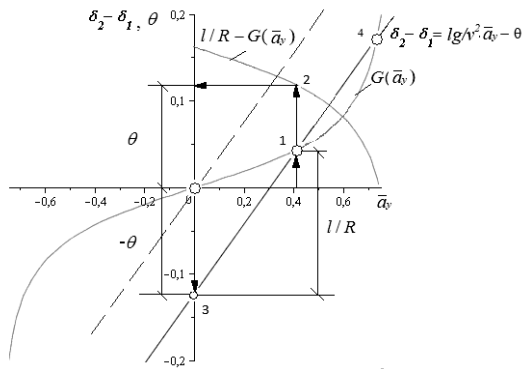


Рис.2. Иллюстрация к графо-аналитическому приему нахождения стационарных режимов, отвечающих заданному значению угла Аккермана

Приведем пример анализа устойчивости прямолинейного режима движения. Из линейной теории следует, что в случае $\bar{k}_1 > \bar{k}_2$ (случай избыточной поворачиваемости) прямолинейный режим устойчив при

$$v < v_{kp} = \sqrt{\frac{l^*g}{1/\bar{k}_2 - 1/\bar{k}_1}}.$$

Так как наклон подвижной прямой $\delta_2 - \delta_1 = gl/v^2 \cdot \bar{a}_y$ ($\theta = 0$) (прерывистая прямая на рисунке 2) gl/v^2 , а наклон неподвижной кривой в начале координат $1/\bar{k}_2 - 1/\bar{k}_1$, то из условия $v < v_{kp}$ следует справедливость положения 1)

$$l \cdot g/v^2 > G'(\bar{a}_y) \Big|_{\bar{a}_y=0} = 1/\bar{k}_2 - 1/\bar{k}_1,$$

Положение 2) уже обсуждалось выше. При фиксированной докритической скорости и $\theta > 0$ устойчивый стационарный режим переходит в устойчивый круговой (точка 1 на рис.2), пока с ним не сольется при некотором θ^* неустойчивый стационарный режим (точка 4 на рис.2).

Таким образом, бифуркационным значениям параметров v и θ отвечает касание подвижной прямой к кривой $G(\bar{a}_y)$, а все бифуркационное множество параметров порождает кривую двойственную к $G(\bar{a}_y)$ [14]. Ее параметрическое представление $\theta = \theta(\bar{a}_y)$, $v = v(\bar{a}_y)$ имеет вид [13]:

$$\begin{aligned} \theta &= G'(\bar{a}_y) \cdot \bar{a}_y - G(\bar{a}_y); \\ v &= \sqrt{\frac{gl}{G'(\bar{a}_y)}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Точки возврата («каспы») двойственной кривой соответствуют точкам перегиба исходной кривой $G(\bar{a}_y)$.

Условие дивергентной потери устойчивости на кривой поворачиваемости можно получить в аналитическом виде. Из рис. 2 следует, что в случае дивергентной потери устойчивости подвижная прямая должна быть касательной к неподвижной кривой $G(\bar{a}_y)$, но при этом должно выполняться соотношение

$$\theta = l/R - G(\bar{a}_y).$$

Тогда приравняв правые части первого уравнения (7) и последнего уравнения, получим

$$G'(\bar{a}_y) \cdot \bar{a}_y = l/R. \quad (9)$$

Из «геометрического» критерия устойчивости следует, что дивергентная потеря устойчивости круговых стационарных режимов, отвечающих кривой поворачиваемости, связана с нарушением неравенства

$$G'_{21}(\bar{a}_y) \cdot \bar{a}_y < l/R.$$

Результаты и их обсуждение. Проанализируем условия, при которых системы (1) и (2) имеют лишь количественные рассогласования. Воспользуемся для построения равновесных кривых, отвечающих исходной системе (1), численно-аналитическим методом продолжения по параметру. Равновесные кривые, отвечающие системе (2), можно задать аналитически в параметрической форме (по угловой скорости)

$$\theta = l \cdot g \cdot \bar{a}_y / v^2 - G(\bar{a}_y);$$

$$\omega = \bar{a}_y \cdot g / v.$$

Сопоставление равновесных кривых представлено на рис. 3, а, б для следующих числовых значений параметров:

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$; $a = 4,217 \text{ м}$; $b = 3,376 \text{ м}$; $b_1 = 2,93 \text{ м}$; $d_1 = 8,075 \text{ м}$; $c = 3,376 \text{ м}$; $m = 6417 \text{ кг}$; $m_2 = 41846 \text{ кг}$; $k_1 = 100000 \text{ Н}$; $k_2 = 300000 \text{ Н}$; $k_3 = 300000 \text{ Н}$; $\kappa_1 = 0,8$; $\kappa_2 = 0,8$; $\kappa_3 = 0,8$;

продольные силы в пятне контакта колес с опорной поверхностью не учитывались.

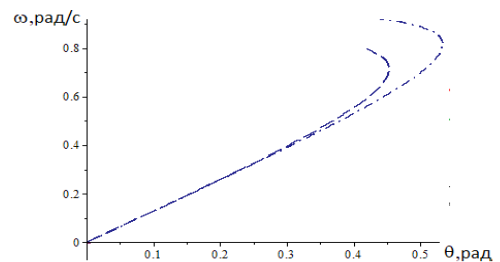
Рассматриваются два вида зависимости сил бокового увода:

$$1) \bar{Y}_i = 2\kappa_i a \tan(0,5\bar{k}_i\delta_i\pi/\kappa_i)/\pi; \quad G_i = 2 \tan(0,5\pi\bar{a}_y/\kappa_i)\kappa_i/\pi\bar{k}_i$$

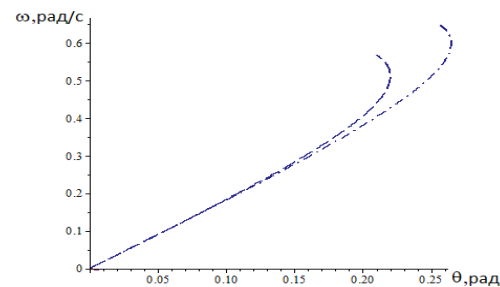
$$2) \bar{Y}_i = \bar{k}_i\delta_i/\sqrt{1+(\bar{k}_i\delta_i/\kappa_i)^2}; \quad G_i = \bar{a}_y/\bar{k}_i\sqrt{1-(\bar{a}_y/\kappa_i)^2}$$

Графическое представление результатов, отвечающих линеаризованной системе (2), при аппроксимации боковой силы в виде арктангенсоиды задается пунктирными кривыми, а при аппроксимации сил увода дробно-иррациональной зависимостью - штрих-пунктирными.

Отметим, что точкам поворота на равновесных кривых отвечает дивергентная потеря устойчивости стационарного режима при некотором значении угла управления θ . Множество точек поворота образует бифуркационное множество, которое независимым способом получено на основе соотношений (9) (рис. 3, а) для двух различных типов аппроксимации зависимостей сил бокового увода. Критическое множество параметров систем (1) и (2) для случая аппроксимации сил увода в виде арктангенсоиды представлено на рисунке 3, б), причем критическое множество системы (1) получено на основе численно-аналитического метода продолжения по двум параметрам (непрерывная кривая) [23].



а)



б)

Рис.3. Равновесные кривые: а) при скорости 8 м/с, б) при скорости 10 м/с.

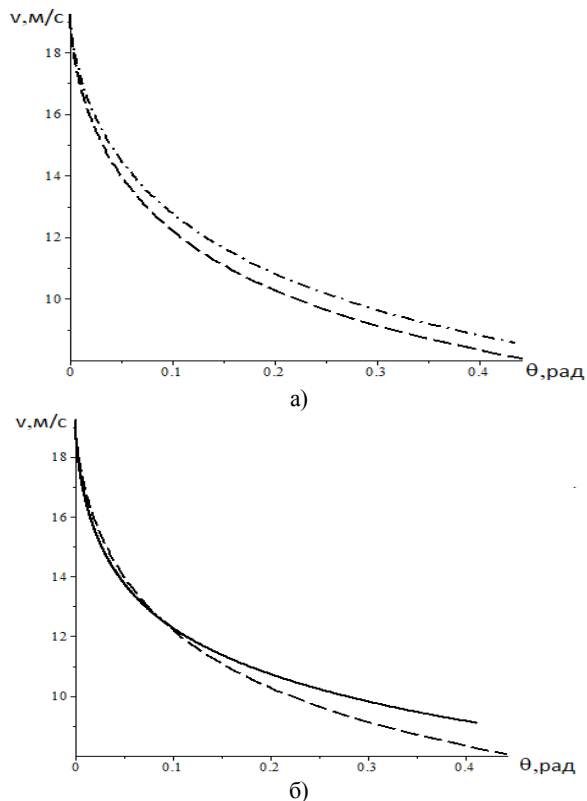


Рис.4. Бифуркационные диаграммы:

- а) случай линейризованной системы (2) для двух различных способов аппроксимации сил бокового увода;
- б) бифуркационная диаграмма систем (1), (2) в случае аппроксимация зависимости сил увода в виде арктангенсоиды

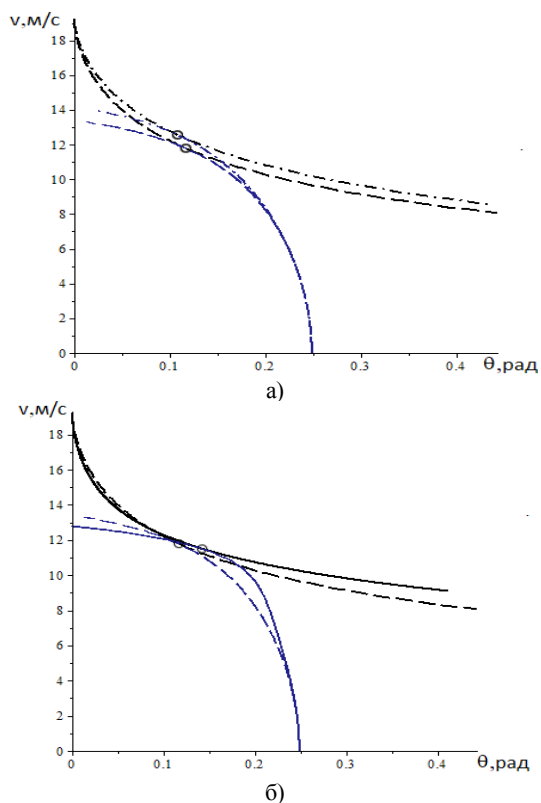


Рис.3. Определение параметров управления при дивергентной потере устойчивости стационарных режимов, отвечающих кривой поворачиваемости, с использованием бифуркационной диаграммы:

- а) случай линейризованной системы (2) для двух различных способов аппроксимации сил бокового увода;
- б) бифуркационная диаграмма систем (1), (2) в случае аппроксимация зависимости сил увода в виде арктангенсоиды.

Таким образом, критическое множество параметров исходной системы (1) достаточно точно воспроизводится критическим множеством приближенной системы (2), однако при достаточно малых значениях параметра продольной скорости имеют место расхождения качественного характера – для исходной системы имеется интервал продольной скорости, при котором отсутствует дивергентная потеря устойчивости, в отличие от приближенной системы (2). Тем не менее, методы анализа дивергентной потери устойчивости применительно к приближенной системе (2) могут оказаться весьма полезны на этапе предварительного анализа, результаты которого могут уточняться по мере необходимости на основе полной системы (1).

Перейдем к анализу дивергентной потери устойчивости стационарных круговых режимов, удовлетворяющих кривой поворачиваемости (6). Так как рассматриваемый случай является частным случаем потери устойчивости кругового стационарного режима, это дает возможность при совмещении диаграммы устойчивости (бифуркационного множества) и кривой поворачиваемости на одной координатной плоскости определить их общие точки (если такие имеются).

Условие дивергентной потери устойчивости (случай линейризованной системы (2) для двух различных способов аппроксимации сил бокового увода) на кривой поворачиваемости можно определить из соотношения (9). Так пусть кривая поворачиваемости отвечает параметру $R=30,5$ м: для случая дробно-иррациональной зависимости получим $\bar{a}_y = 0,52717$, из уравнения поворачиваемости $\theta=0,1081$ рад, критическое значение параметра $v=12,559$ м/с найдем из соотношения $\bar{a}_y = v^2 / (R \cdot g)$; для случая арктангенсоиды $\bar{a}_y = 0,46440$; $\theta=0,1168$ рад, критическое значение параметра $v=11,788$ м/с.

Выводы.

1. Показана возможность сведения задачи определения множества стационарных состояний модели двухзвенного экипажа к аналогичной задаче для модели приведенного двухосного экипажа (представлены конструктивные параметры сведенного экипажа в явном виде).

2. Проиллюстрировано развитие аналитико-геометрического метода анализа множества стационарных режимов экипажа на примере движения с постоянным углом Аккермана, критерий дивергентной потери устойчивости на кривой поворачиваемости может быть получен как на основе «геометрического подхода», так и аналитического.

3. Приведены результаты построения критического множества параметров управления для двух частных случаев задания нелинейных сил увода (анализ чувствительности системы к различным способам аппроксимации сил увода)

4. Продемонстрирована взаимосвязь между критическим множеством параметров управления и частным случаем потери устойчивости при движении с постоянным углом Аккермана (что указывает на внутреннюю непротиворечивость полученных результатов, наряду с независимым численным анализом соответствующей полной динамической системы).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкен С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1950. – 916с.
2. Bautin N.N. Behaviour of Dynamical Systems near the Boundary of the Stability Domain. Nauka, Moscow, 1984. (in Russian)
3. Баутин Н.Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
4. Ellis J. R. Vehicle Dynamics. – Mashinostroenie, Moscow, 1975. – 216 с. (Russian translation).
5. Kravchenko A.P., Verbitskii V.G., Zagorodnov M.I., Bannikov V.O., Sakno O.P., Efimenko A.N., Turchina N.A. On the problem of the steerability analysis of the automobile non-linear model. – Naukovi visti Dalivskogo universitetu. Elektrone naukove fakhove vidanua 2010 - №1 (in Russian).
6. Gillespie, Thomas D. Fundamentals of Vehicle Dynamics, Society of Automotive Engineers, Inc.1992– 470 p.
7. Arnold V.I., 1990.: Catastrophe Theory. - Moscow: Nauka.–128 p. 5
8. Poston T., Stewart I., 1980.: Catastrophe Teory And Its Applications. - Moscow: Mir. – 607 p.
9. Pevsner J.M., 1947.: Theory of stability of automobile. – Moscow: Mashisdat. – 156 p.
10. Pacejka. H.B., 1978.: Tyre factors and vehicle handling // Delf Univ. Technol. – №108. - 31 p.
11. J.P. Pauwelussen: Analysis and prevention of excessive lateral behaviour of articulated vehicles. XII International Heavy Truck Conference, 13-15 September 1995, Budapest, Hungary
12. Verbitskii V.G., Lobas L.G. Varieties of stationary states of two-unit articulated vehicle and their stability // Prikl. Mech. -1989. - 26, №12. - P. 97 - 104.
13. Verbitskii V.G., Lobas L.G., 1981.: Method of determination of the special points and their character // Applied mathematics and mechanics. – №45(5). – P. 944 – 948.
14. Verbitskii V.G., Lobas L.G. Bifurcation of steady states of an assemblage of absolutely rigid and rolling elastic bodies // Izv. Akad. Nauk SSSR, MTT - 1991.- №3. - P. 30 - 37.
15. Verbitskii V.G., Lobas L.G. Bifurcations of steady states in systems with rolling under constant force perturbations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics.-1994. - 58, №5. -P. 933-939.
16. Verbitskii V.G., Lobas L.G. Real bifurcations of two-unit systems with rolling // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. - 1996. - 60, № 3. - P. 413 – 419.
17. Вербицкий В.Г. Особенности многообразий стационарных состояний в окрестности симметричного решения динамической системы с симметрией//Доповіді НАН України 1999.-№8.-С.52-55.
18. Troger H., Zeman K., 1984.: A nonlinear analysis of the generic types of loss of stability of the steady state motion of the tractor – semitrailer // Vehicle System Dynamics. V. 13. -№ 4. - P. 161-172.
19. Fabio Della Rossaa, Giampiero Mastinub, Carlo Piccardia. Bifurcation analysis of an automobile model negotiating a curve/ Vehicle System Dynamics Vol. 50, No. 10, October 2012, - P.1539–1562.
20. M. F. J. van de Molengraft-Luijten, I. J. M. Besselink, R. M. A. F. Verschuren, and H. Nijmeijer, “Analysis of the lateral dynamic behaviour of articulated commercial vehicles,” Vehicle System Dynamics, vol. 50, supplement 1, pp. 169–189, 2012.
21. Ren YY, Zheng XL, Li XS (2012) Handling stability of tractor semitrailer based on handling diagram. Discrete Dynamics in Nature and Society, vol 2012, Article ID 350360, 16 pp.
22. Shinohara Y., 1972.: A geometric method for the numerical solution of non-linear equations and its application to non-linear oscillations. Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 8, 1. - P. 13 - 42.
23. Holodniok M., Klic A., Kubicek M., Marek M., 1991.: Methods of Analysing Non-linear Dynamic Systems. - Moscow: Mir. – 368 p.
24. Bruce J., Giblin P., 1988.: Curves and Singularities. – Moscow: Mir. – 262 p.

REFERENCES

1. Andronov A.A., Witt A.A., Heiken S.E. Theory of oscillations. - M.: Fizmatgiz, 1950. – 916 p.
3. Bautin N.N., Leontovich E.A. Methods and techniques for qualitative research of dynamic systems on a plane.-M.: Science, 1990.- 488 p.
17. Verbitskii V.G. Features of stationary states manifolds in the neighborhood of a symmetric solution of a dynamical system with symmetry // Supplements of the National Academy of Sciences of Ukraine -1999.-№8.- P.52 - 55.

Analysis of a divergent stability loss of two-tier crew stationary driving modes

V. G. Verbytskyi, A. I. Bezverkhyi, D. N. Tatievskyi, V. I. Popivshchyi

Abstract. The divergent stability loss of stationary driving modes of a simplified two-tier crew model is investigated. Analytical relations that determine the conditions for the divergent stability loss while driving with a constant Ackerman angle are obtained. Analysis of the analytical results accuracy is carried out by comparing with the results obtained by the numerical-analytical method of continuation by a parameter for the full model.

Keywords: *two-tier crew, understeer, stationary mode, continuation by a parameter, turning points, divergent instability.*