

## Алгоритм обчислення тілесних кутів на 3-вимірні об'єкти для аналізу міського середовища

Т. В. Булгакова

<https://doi.org/10.31174/NT2018-158VI18-10>

Київський національний університет технологій та дизайну

Paper received 26.01.18; Accepted for publication 30.01.18.

**Анотація.** Стаття є продовженням наукової роботи автора по розробці інструменту аналізу міста на основі моделювання візуального сприйняття оточення без використання перспективних проєкцій та присвячена розробці алгоритму обчислення тілесних кутів на 3-вимірні об'єкти. В даній роботі запропоновано тривимірну модель спроектувати на грані куба із центром в точці огляду, таким чином розбити її на множину суміжних неопуклих областей, для кожної з них побудувати триангуляцію Делоне і визначити тілесний кут. Вирішується задача знаходження тілесного кута, під яким із заданої точки  $O(x_0, y_0, z_0)$  видно проєкцію деякої поверхні, задану рівняннями границь проєкції, координатами кутових точок. Розроблений алгоритм обчислення тілесних кутів на 3-вимірні об'єкти є основою для подальшого моделювання візуального сприйняття архітектурного середовища та надає можливість автоматизувати процес визначення кількісних параметрів характеристик забудови міста.

**Ключові слова:** тілесний кут, 3-вимірні об'єкти, алгоритм, триангуляція Делоне, аналіз міського середовища.

**Вступ.** У попередніх роботах [1, 2] автором було обґрунтовано та запропоновано принципово новий підхід до аналізу архітектурного середовища міста з позиції сприйняття. Він виключає можливість тих викривлень та обмежень, що присутні при використанні існуючих методів аналізу та дозволяє створити об'єктивні кількісні характеристики візуального сприйняття оточення, які можливо реально застосовувати в процесі проектування з використанням комп'ютера.

Для аналізу сприйняття будь-яких об'єктів та їх співвідношень пропонуємо використати тілесні кути, вершини яких розміщені в точці зору, а поверхні є такими що огинають видимі контури тривимірних об'єктів. Це дозволить: по перше, одночасно аналізувати об'єкти не залежно від їх розташування навколо спостерігача; по друге, об'єкти, які в дійсності сприймаються однаково, будуть мати однакові геометричні характеристики при моделюванні зорового сприйняття. До того ж, відмова від використання для аналізу середовища проєкцій на площину, виключить притаманні їм викривлення зображень. Аналіз середовища із запропонованим підходом передбачає розробку відповідної комп'ютерної технології. Це дозволить майже повністю автоматизувати такий процес. Для цього нам необхідно розробити алгоритм обчислення тілесних кутів на 3-вимірні об'єкти, який ми зможемо використати для об'єктів міського середовища.

В основі сучасних технологій тривимірного моделювання надвеликих об'єктів, як правило, лежать регулярні (растрові, матричні) моделі поверхонь, які володіють рядом принципових недоліків. У даний час у світі найбільш перспективним вважається перехід на використання нерегулярних триангуляційних моделей.

Для цього на сьогоднішній день розроблена велика кількість алгоритмів побудови, обробки і візуалізації триангуляційних моделей поверхонь [3, 4].

**Короткий огляд публікацій за темою.** Основні класичні результати в області побудови й аналізу триангуляційних моделей даних одержали Дж. Бентлі, Г.Ф. Вороной, Б.П. Делоне, Д. Киркпатрик, Р. Ліптон, Ф. Препарата, Д. Роджерс, Р. Тарьян, М. Шеймоє. Найсучасніші і комплексні дослідження в області побудови й обробки триангуляційних моделей даних проведені в роботах А.В. Скворцова. Великий внесок

у розв'язання задачі розробки високоефективних алгоритмів обробки великих поверхонь внесли Е. Пуппо, Л. Де Флоріані, П. Магілло, К. Де Берг, П. Сігноні, Р. Клейн, Дж. Кохен, П. Хекберт, М. Гарланд, Х. Хоппе й ін.

**Мета.** Розробити алгоритм обчислення тілесних кутів на 3-вимірні об'єкти для аналізу міського середовища.

**Матеріали та методи.** У статті використано аналіз досліджень за темою, алгоритмічні методи побудови, обробки і візуалізації триангуляційних моделей поверхонь, зокрема, алгоритми побудови триангуляції Делоне, мова програмування Delphi

**Результати та їх обговорення.** Для побудови цифрової моделі поверхні, як правило, використовують триангуляцію Делоне, що володіє властивостями, які вигідно відрізняють її від інших видів триангуляції [5].

Практично всі існуючі алгоритми побудови триангуляції Делоне можна умовно поділити на такі основні групи: ітеративні алгоритми, алгоритми злиття, алгоритми прямої побудови триангуляції, двохпрохідні алгоритми реалізації триангуляції [6].

Усі ітеративні алгоритми мають у своїй основі ідею послідовного додавання точок в частково побудовану триангуляцію Делоне.

Складність даного алгоритму складається з трудомісткості пошуку трикутника, в який на черговому кроці додається точка, трудомісткості побудови нових трикутників, а також трудомісткості відповідних перебудов структури триангуляції в результаті незадовільних перевірок пар сусідніх трикутників отриманої триангуляції на виконання умови Делоне.

Концептуально всі алгоритми злиття припускають розвиток початкової множини точок на декілька підмножин, побудову триангуляції на цих підмножинах, а потім об'єднання (злиття) декількох триангуляцій в одне ціле.

Основна ідея алгоритмів прямої побудови полягає в тому, щоб будувати тільки такі трикутники, які задовольняють умові Делоне в кінцевій триангуляції, а тому не повинні перебудовуватися.

При побудові триангуляції Делоне ітеративними алгоритмами і алгоритмами злиття для кожного трикутника після побудови повинна бути перевірена умова Делоне. При цьому доводиться проводити перевірки для трьох пар, відповідних трьом сусіднім трикутникам.

кам до даного. Якщо перевірка не витримана, повинні проводитись перебудови трикутників і нова серія перевірок. На практиці досить велику частину часу займають перевірки на умову Делоне і перебудови. Для спрощення логіки роботи алгоритмів можна за перший прохід побудувати деяку триангуляцію, ігноруючи виконання умови Делоне, а після цього за другий прохід перевірити те, що вийшло і провести потрібні поліпшувачі перебудови для зведення триангуляції до триангуляції Делоне [7].

У даній роботі запропоновано тривимірну модель спроектувати на грані куба із центром в точці огляду, таким чином розбити її на множину суміжних неопуклих областей, для кожної з них побудувати триангуляцію Делоне і визначити тілесний кут. Це дозволить опрацьовувати надвеликі об'єми даних частинами, не понижуючи при цьому точності подання поверхні.

Постановка задачі: знайти тілесний кут, під яким із заданої точки  $O(x_0, y_0, z_0)$  видно проекцію деякої поверхні, задану рівняннями границь проекції, координатами кутових точок.

Суть розв'язання даної задачі зводиться до того, що область проекції – багатокутник (опуклий або неопуклий) – розбивається на малі трикутники, що не перетинаються, і сумуються тілесні кути всіх трикутників.

Оскільки ми маємо справу з плоскою фігурою, то елементарні трикутники розбиття не можуть перекриватися, що не відіб'ється на загальній сумі тілесних кутів малих трикутників.

Для даної задачі на основі існуючих методів триангуляції був побудований алгоритм та запрограмований на допомогу Delphi:

1. Задаємо масив точок області обмеження  $P_i$ , що формують певний полігон, де  $P_i(x)$  – координата  $i$ -ї точки по  $x$ ,  $P_i(y)$  – координата  $i$ -ї точки по  $y$ .

2. Будуємо опорні вузли на ребрах полігону та на самій області. Для цього:

– Знаходимо максимальні відхилення точок області по осям  $x$  та  $y$ .

Максимальне по осі  $x$ :

$$\text{extremePoints}[0] := \max(P_i(x))$$

Мінімальне по осі  $x$ :

$$\text{extremePoints}[1] := \min(P_i(x))$$

Максимальне по осі  $y$ :

$$\text{extremePoints}[2] := \max(P_i(y))$$

Мінімальне по осі  $y$ :

$$\text{extremePoints}[3] := \min(P_i(y))$$

– Визначаємо довжину сторони  $triangleSide$  рівностороннього трикутника як константу. Від цього значення залежить величина комірки сітки.

– Знаходимо висоту трикутника:

$$triangleHeight = \frac{\sqrt{3}}{2} triangleSide \quad (1)$$

– Будуємо точки таким чином, щоб відстань від найближчого ребра полігону не була меншою, по осі  $x$  за  $triangleSide/2$ , по осі  $y$  за  $-triangleHeight/2$ , а також точка не виходила за обмеження. Кожний наступний ряд при побудові зсуваємо від  $extremePoints[0]$  на  $triangleSide/2$ , для того щоб отримати рівносторонні трикутники.

– На ребрах полігону вузли розставляємо так, щоб відстань від вершини ребра до вузла була не меншою за  $triangleSide/2$ .

3. З отриманого набору точок утворюємо трикутні кінцеві елементи. Для цього:

– Виберемо 2 початкові точки на полігоні, з яких почнемо побудову, та позначимо їх  $P_1$  та  $P_2$  відповідно.

– Знаходимо 3-тю точку  $P_3$  таку, щоб  $P_1$  та  $P_2$  утворювали з нею найбільший кут:

$$d(P_i P_j) = \sqrt{(P_j(x) - P_i(x))^2 + (P_j(y) - P_i(y))^2} \quad (2)$$

$$\angle(P_1 P_3 P_2) = \arccos((d_{(P_1 P_3)}^2 + d_{(P_2 P_3)}^2 - d_{(P_1 P_2)}^2) / (2 d_{(P_1 P_3)} d_{(P_2 P_3)})) \quad (3)$$

– епер розглядаємо  $P_1$  та  $P_3$ , а  $P_2$  та  $P_3$  записуємо у буфер. Якщо  $P_1$  та  $P_3$  вже існують у розбитті, тоді  $P_2$  присвоюємо  $P_1$ , якщо ж  $P_2$  та  $P_3$  також існують, то вибираємо точки з буфера. Під час знаходження 3-ї вершини, потрібно її брати з протилежного боку, ніж зараз знаходиться  $P_3$ . Кожне утворення перевіряється на належність області обмеження. Якщо через середину сторони майбутнього трикутника провести пряму, паралельну до вісі  $x$  і вона перетне полігон непарну кількість раз, то така сторона належить цій області.

– Алгоритм зупиняємо, коли буфер буде пустим.

Основними базовими компонентами програми є стандартні модулі мови програмування Delphi [8, 9], що забезпечують як розрахункові, так і графічні можливості. На їх базі було розроблено такі основні процедури та функції:

- *pointInTriangle* – визначає приналежність точки заданому трикутнику;

- *sortArray* – сортує масив за координатними осями;

- *getTriangleAngle* – отримує кут трикутника;

- *getPointsDistance* – отримує відстань між двома точками на площині;

- *checkIntersection* – перевіряє, чи перетинаються два відрізки.

На основі цих базових складових програма розбиває область на кінцеві елементи. Для цього потрібно:

- задати область для триангуляції;

- поставити вузли на області, якщо потрібно, інакше програма автоматично заповнює область точками;

- за заданим алгоритмом виконати розбиття;

- результат буде представлений на формі графічно.

Основною особливістю програми є те, що алгоритм прагне виконати розбиття на трикутники, які повинні бути якомога більше наближені до рівносторонніх. Отже, основний критерій розбиття – це максимізація мінімальних кутів кожного трикутника, що визначає його якість.

Далі помістимо вершину тілесного кута у початок координат (точку  $O$ , відносно якої визначається тілесний кут), тоді елементарний трикутник з координатами вершин  $\mathbf{r}_1 = \overline{OP_1}$ ,  $\mathbf{r}_2 = \overline{OP_2}$ ,  $\mathbf{r}_3 = \overline{OP_3}$  видно з початку координат під тілесним кутом [10]

$$\Omega = 2 \arctg \frac{(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}{r_1 r_2 r_3 + (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) r_3 + (\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) r_1 + (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1) r_2} \quad (4)$$

де  $(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)$  — змішаний добуток радіус векторів,  $(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)$  — скалярний добуток відповідних радіус векторів,  $r_i$   $i = (\overline{1,3})$  - довжина  $i$ -го радіус вектора.

Просумувавши усі тілесні кути елементарних трикутників, будемо мати шуканий тілесний кут.

**Висновки.** Розроблений алгоритм обчислення тілесних кутів на 3-вимірні об'єкти є основою для моделювання візуального сприйняття архітектурного середовища міста та надає можливість автоматизувати

процес визначення кількісних параметрів характеристик забудови міста і відповідно оцінки її якості.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Булгакова Т. В. Аналіз середовища міста з позиції сприйняття без використання перспективних проєкцій / Т. В. Булгакова. // Scientific development and achievements: Proceedings of the International Scientific Conference December 1, 2017 in the city St. Andrews, Scotland, UK / ed. for the production Holdenblat M. A. NGO «European Scientific Platform» - Odessa: «Drukarik», 2017. - Part 1. - P. 9-14.
2. Булгакова. Т. В. Методи аналізу міста з позиції сприйняття. / Т. В. Булгакова. // Технічна естетика і дизайн: науково-технічний збірник. К: Віпол. - 2010. - Вип.7. - С. 277-281.
3. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и её применение / А. В. Скворцов. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. - 128 с.
4. Ильман В. М. Алгоритмы триангуляции плоских областей по нерегулярным сетям точек / В. М. Ильман // Алгоритмы и программы, ВИЭМС. Вып 10(88). М., 1985. - С.12-23.
5. Ильман В. М. Экстремальные свойства триангуляции Делоне / В. М. Ильман // Алгоритмы и программы, ВИЭМС. Вып 10(88). М., 1985. - С.5-10.
6. Скворцов А. В. Эффективные алгоритмы построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. - 103 с.
7. Фукс А. Л. Предварительная обработка набора точек при построении триангуляции Делоне / А. Л. Фукс // Геоинформатика. Теория и практика. Вып. 1. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998 С.48-60.
8. Гофман В. Э. Delphi 6 / В. Э. Гофман - Спб.: БХВ - Санкт-Петербург, 1999. - 800с
9. Гофман В. Э. Работа с базами данных в Delphi / В. Э. Гофман - Спб.: БХВ - Санкт-Петербург, 2000. - 656 с.
10. И.Н.Бронштейн. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: справочное издание / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. - 9-е изд., стереотип. - М. : Физматгиз, 1962. - 608 с.

#### REFERENCES

1. Bulgakova T. V. Analysis of the city's environment from the position of acceptance without use of prospective projects / T. V. Bulgakova // Scientific development and achievements: Proceedings of the International Scientific Conference December 1, 2017 in the city St. Andrews, Scotland, UK / ed. for the production Holdenblat M. A. NGO «European Scientific Platform» - Odessa: «Drukarik», 2017. - Part 1. - P. 9-14.
2. Bulgakova T. V. Methods of analysis of the city from the standpoint of perception / T. V. Bulgakova // The industrial art and design: The Collection of Proceedings. K:Vipol. - 2010. - Issue 7. - P. 277-281.
3. Skvortsov A.V. Delaunay triangulation and its application / A.V. Skvortsov - Tomsk: Publishing house Tom. Un-ty, 2002. - 128 p.
4. Il'man V. M. Algorithms of triangulation of plane domains by irregular network of points / V. M. Il'man // Algorithms and programs, VIEMS. Issue 10 (88). Moscow, 1985. - p.12-23.
5. Il'man V. M. Extremal properties of the triangulation of Delone / V. M. Il'man // Algorithms and programs, VIEMS. Issue 10 (88). Moscow, 1985. - p.5-10.
6. Skvortsov A. V. Effective algorithms for constructing the Delone triangulation / A. V. Skvortsov. - Tomsk: Publishing house Tom. Un-ty, 1998. - 103 p.
7. Fuchs A. L. Preliminary processing of the set of points in the construction of the triangulation of Delone / A. L. Fuchs // Geoinformatics. Theory and practice. Issue 1. Tomsk: Publishing house Tom. Un-ty, 1998. - p. 48-60.
8. Hoffman V. E. Delphi 6 / V. E. Hoffman - Spb.: BHV - St. Petersburg, 1999. - 800 p.
9. Hoffman V. E. Working with databases in Delphi / V.E. Hoffman - Spb.: BHV - St. Petersburg, 2000. - 656 p.
10. I.N. Braunstein. Reference book for mathematicians for engineers and students of the institutions: reference book / I. N. Bronshtein, K. A. Semendiyev. - 9th edition., Stereotype. - M.: Fizmatgiz, 1962. - 608 p.

#### Algorithm for calculation of solid angles on 3-dimensional objects for analysis of urban environment

**T. V. Bulgakova**

**Abstract.** The article is a continuation of the author's scientific work on the development of a city analysis tool based on the simulation of the visual perception of the environment without the use of perspective projections and devoted to the development of the algorithm for calculating solid angles to 3-dimensional objects. In this paper, we propose to design a three-dimensional model on the face of the cube with the center at the point of view, thus dividing it into a set of adjacent convex domains, for each of them to construct the triangulation of Delone and determine the solid angle. The problem of finding a solid angle is solved, under which a projection of a certain surface given by the equations of the projection boundaries, coordinates of the angular points can be seen from a given point  $O(x_0, y_0, z_0)$ . The developed algorithm for calculating solid angles to 3-dimensional objects is the basis for further modeling of the visual perception of the architectural environment and enables to automate the process of determining the quantitative parameters of characteristics of city development.

**Keywords:** solid angle, 3-dimensional objects, algorithm, Delaunay triangulation, urban environment analysis.

#### Алгоритм вычисления телесных углов на 3х-мерные объекты для анализа городской среды

**Т. В. Булгакова**

**Аннотация.** Статья является продолжением научной работы автора по разработке инструмента анализа города на основе моделирования визуального восприятия окружения без использования перспективных проєкцій и посвящена разработке алгоритма вычисления телесных углов на 3х-мерные объекты. В данной работе предложено трехмерную модель спроецировать на грани куба с центром в точке обзора, таким образом разбить ее на множество смежных невыпуклых областей, для каждой из них построить триангуляцию Делоне и определить телесный угол. Решается задача нахождения телесного угла, под которым с заданной точки  $O(x_0, y_0, z_0)$  видно проекцию некоторой поверхности, заданную уравнениями границ проекции, координатами угловых точек. Разработанный алгоритм вычисления телесных углов на 3-мерные объекты являются основой для дальнейшего моделирования визуального восприятия архитектурной среды, и позволяет автоматизировать процесс определения количественных параметров характеристик застройки города.

**Ключевые слова:** телесный угол, 3х-мерные объекты, алгоритм, триангуляция Делоне, анализ городской среды.