PEDAGOGY

Об обучении доказательству методом исключения

Э. И. Айвазян

ЕГУ, Национальный институт образования МНО РА
Corresponding author. E-mail: Ayvazyan.51@mail.ru

Paper received 23.03.18; Accepted for publication 28.03.18.

http://doi.org/10.31174/SEND-PP2018-162VI66-01

Аннотация. Статья посвящена обсуждению методических вопросов обучения методу исключения доказательства в школьном курсе математики. В ней рассмотрены структура, этапы, типы задач и тонкости применения на практике метода исключения. Она может быть полезна для учителей математики и учащихся старшей школы.

Ключевые слова: *доказательство, метод доказательства, прямое и косвенное доказательства, закон исключения, обучение метода исключения.*

Введение. Известно, что одной из основных воспитательных целей школьного курса математики является формирование и развитие логического мышления учащихся, для достижения этого математика в плане возможностей выгодно отличается от других общеобразовательных предметов.

Анализ государственных программ курса математики различных лет многих отечественных и зарубежных стран показывает, что в них в той или иной мере подчеркивается значимость логического мышления учащихся и его важнейший компонент – необходимость формирования способности доказывать.

Соответствующие этим программам курсы математики с тем или иным успехом постоянно пытались решить этот основной вопрос, который является их важнейшей целью и одним из опорных компонентов обучения мышлению.

Однако в действительности решение этой проблемы до последних лет в основном искусственно было отведено курсу геометрии 7-9 классов. Более того, если традиционно важнейшей целью курса геометрии являлось формирование пространственных представлений и логического мышления, то даже, например, по мнению автора курса А. В. Погорелова, миссией курса геоометрии является лишь формирование логического мышления учащихся.

Курсы алгебры основной школы РФ как советского, так и постсоветского периода в основном были направлены на формирование тренировочно-оперативных умений и навыков учащихся в рамках следующих содержательных линий: “тождественные преобразования выражений”, “равенства”, “функция”. Никто не может отрицать очевидные успехи общеобразовательных курсов математики в указанных, например, первых двух содержательных линиях в направлении спиралевидного развития. Однако с точки зрения других линий “доказательства”, “геометрические образы”, “величины” и “функции” диаметрально противопоставляются развитию двух первых линий; их, как горизонтальное, так и вертикальное развитие и интеграция в курсах математики и других смежных предметов в вышеуказанных учебниках алгебры существенно уступает уровню формирования линий “преобразование выражений” и “равенства”.

Основная его причина кроется не в том, что курс геометрии является более доказательным по сравнению с алгеброй, а в том, что курсы алгебры тех времен, не имея определенной аксиоматической структуры (изложения), не имели также четкого логического аппарата и решали в основном тренировочно-оперативные вопросы, а не как в геометрии проблему формирования логического мышления учащихся.

В новой ситуации, в которой оказались республики бывшего Советского Союза, эти учебники нуждаются в коренном пересмотре. И естественно, что в новой независимой Республике Армения процесс создания школьных учебников по математике в конце 20-го века начался с курса алгебры для 6-8-ых классов. В 1999г. в процесс обучения вошли учебники “Алгебра 6, 7, 8” под авторством Г.С. Микаеляна ([4]), с 2000 года – учебники Г. Г. Геворкяна, А. А. Саакяна “Алгебра и начала математического анализа” [1-3], в которых благодаря уже внедренному четкому логическому доказательному аппарату “чаша весов” из курса геометрии перешла в курс алгебры.

В новых учебниках для старшей школы значительно улучшилось доказательная система предмета “Алгебра и начала математического анализа”. Продолжается работа в направлении дальнейшего улучшения логического мышления учащихся. Этому способствует изучение тем “Элементы логики” и “Метод математической индукции”, решение многочисленных задач на доказательство, а также проводимая учителем специальная работа с математическими текстами с целью формирования доказательных способностей учащихся. Лучшей формой для раскрытия этих “скрытых” возможностей математических текстов (доказательства и решения) является выявление методов доказательства в применяемых в них доказательных системах. Для оказания методической помощи учителю математики и ученикам даны необходимые сведения и примеры применяемых методов доказательства в курсе математики средней школы в теме “Элементы логики” в учебнике для 11-го класса, в “Методическом пособии для учителя” ([5]) и [6-8] в “ Руководствах по решению задач”.

Таким образом, курс математики средней школы РА своей четкой доказательной системой и соответствующим методическим обслуживанием направлен на решение задачи формирования логического мышления учащихся, будущих граждан РА. А одним из компонентов развития мышления, как было отмечено, формирование и развитие тех логических способностей, которые связаны **со способностями создавать аргументированные суждения, доказывать и отрицать**.

Краткий обзор публикаций по теме. Важнейшим компонентом формирования логического мышления является развитие доказательных способностей учащихся.

С содержательной (не формальной) точки зрения "доказательство является логическим действием, в процессе которого истина какой-либо мысли обосновывается с помощью других мыслей. Это логическое действие обладает огромным практическим значением в процессе познания окружающей среды. Во всех науках имеется необходимость доказательства. Кроме того, содержание тех мыслей, истинность которых требует обоснования, в каждой науке различна. Логика находит то общее, что характерно для этих доказательств, независимо от того или иного конкретного содержания » [9;139].

Впредь, понятие "доказательство" в текстах большей частью будет использоваться неформально, а точнее в значении "доказательство школьных математических утверждений".

Школьный курс математики включает в себя в содержательном изложении некоторые математические теории и элементы: арифметика, алгебра, математический анализ, начальная (эвклидовская) геометрия, аналитическая геометрия, тригонометрия, комбинаторика и др. Поэтому доказательства в школьной математике являются неформальными доказательствами, построенными на содержательных рассуждениях.

Логика в каждом неформальном доказательстве выделяет три структурных элемента: тезис, основа (аргумент), рефлексивность (аргументация, обоснование, иллюстрация, метод доказательства).

С понятием "математическое доказательство" в школьном курсе математики тесно связаны три компонента: *доказываемое утверждение (тезис – теорема или задача), метод доказательства (демонстрация, аргументация) и его содержательный компонент (основы, доводы, аргументы).*

Метод в "Философском энциклопедическом словаре" определяется как "совокупность приемов и операций для практического и теоретического познания действительности " ([10;364]), а доказательство "процесс (метод), установления истины, обоснование истинности какого-либо утверждения"([10;173]). Таким образом, как рабочее определение, отныне говоря о методе доказательства математического утверждения, мы будем понимать **совокупность необходимых последовательных логических приемов (заключений) для обоснования истинности математического утверждения [9;139].**

"Умение выполнять доказательство" или что то же самое "умение доказывать" разделяется на умения (навыки) одной цепи, каждое из которых в дальнейшем назовем **элементарные доказательные умения**. В общем разложение "умения доказывать" на элементарные (которые более не дробятся), атомные (шаги доказательства) полностью соответствуют психологическому толкованию умения доказывать, как прием логического мышления. Как отмечает Н. Ф. Талызина, любой прием логического мышления (умственная деятельность) принято раздроблять на определенные "единицы" этой деятельности ([12; 63]).

В данном случае в роли подобных "единиц" (кирпичиков) выступают доказательные элементарные умения.

Таким образом, понятие "доказательное умение" мы используем в двух значениях. Кроме того, каждый раз только из контекста становится понятно, в каком значении оно употребляется – в широком или узком.

В процессе обучения школьному курсу как геометрии, так и алгебры законы логической дедукции обычно не являются предметом специального изучения, их формирование в лучшем случае выполняется на интуитивном уровне.

В логике принято методы доказательства классифицировать по различным характеристикам: "по способу рассуждения", "по форме заключения, которым завершается доказательство", "по истинности содержания и точности логической связи между основами и тезисом" и др. По способу ведения доказательства различаются прямое и косвенное, по форме завершающего заключения – индуктивное и дедуктивное доказательства. Встречаются также по сути и генетические доказательства.

Основой данной работы служит классификация методов доказательства по способу рассуждения. *Доказательство, основанное на определенном факте, из которого непосредственно выводится тезис об истинности умозаключения, называется **прямым доказательством.** Доказательство называется **косвенным (непрямым)**, если истинность тезиса обосновывается с помощью отрицания истинности противоположного данному тезису утверждения* ([9; 142]).

Принятие за основу подобного положения в данной классификации методов доказательства оправдано тем, что в курсах как геометрии, так и алгебры в условиях дедуктивного изложения учебного материала способ ведения доказательства приобретает особую важность. Так, например, в доказательствах теорем методом польной индукции индукция только начинает и завершает доказательство, а без восприятие способов доказательства подтеорем каждого отдельного случая невозможно считать, что доказательство полностью воспринято.

Анализ научно-методической литературы показал, что исследователи как варианты прямого доказательства отмечают сопоставительный и аналитико-сопоставительный методы, а косвенного доказательства – методы противоречия (противоречивое предположение) и **исключения**.

Одним из видов косвенного доказательства является **разделительное косвенное доказательство** или **метод исключения**. Оно применяется в том случае, когда известно, что доказываемый тезис, например, , B_1 является одним из компонентов истинного разделительного утверждения " B_1 или B_2 или B_3 ". Структура метода следующая: *последовательно исключаются все члены разделительного суждения, кроме* *одного, который и является доказываемым тезисом, т. е. методом исключения исключаются один за другим все случаи (B_2 и B_3), кроме одного (- B_1). На основании этого делается вывод, что истинным является B_1 ([14;507],[11;33]).*

Как отмечает Г. Брутян " В случае разделительного косвенного доказательства обычно имеется ряд предположений об обсуждаемом вопросе, одно из которых является доказываемым тезисом. Один за другим отрицаются все, кроме доказываемого тезиса, остальные предположения, остается единственное предположение, которое и считается доказанным, как единственное возможное предположение по данному вопросу" ([13; 262]).

Разделительное рассуждение – это такое "рассуждение, в котором говорится, что данному предмету приписывается (или не приписывается) одно из качеств, указанных в этом рассуждении" ([14; 507]).

В основе метода исключения лежит закон исключения, который имеет следующую логическую структуру:

$$\frac{B_1 \vee B_2 \vee B_3, \neg B_2, \neg B_3}{B_1}:$$

Этот метод целесообразно применять при доказательстве таких утверждений, заключение (требование) которых представляет из себя, один из дизъюнктивных членов какого-либо истинного делимого рассуждения вида $B_1 \vee B_2 \vee B_3$, например, B_1. Этапы применения метода исключения следующие:

• Прежде всего находится вышеуказанное истинное разделительное рассуждение $B_1 \vee B_2 \vee B_3$:

• Затем методом противоречия (противоречивого предположения) по очереди исключаются все остальные B_2 и B_3 случаи, кроме B_1.

• Затем, используя закон исключения, объявляется, что истинным является рассуждение B_1.

С целью представленный алгоритм сделать предметно более понятным, рассмотрим доказательство данного утверждения этим методом.

"**Теорема.** Пусть $A_1(x)$, $A_2(x)$, …, $A_n(x)$ и $B_1(x)$, $B_2(x)$, …, $B_n(x)$ – неопределенные высказывательные формы, заданные на некотором множестве M и обладающие следующими тремя свойствами:

а) всегда (т. е. для любого элемента x множества M) имеет место хотя бы одно из утверждений $A_1(x)$, $A_2(x)$, …, $A_n(x)$;

б) справедливы теоремы $A_1(x) \Rightarrow B_1(x)$, $A_2(x) \Rightarrow B_2(x)$, …., $A_n(x) \Rightarrow B_n(x)$;

в) утверждения $B_1(x)$, $B_2(x)$, …, $B_n(x)$ взаимно исключают друг друга, т. е. (для произвольно взятого элемента x), если одно из них истинно, то все остальные обязательно ложны.

Тогда все обратные теоремы $B_1(x) \Rightarrow A_1(x)$, $B_2(x) \Rightarrow A_2(x)$, …,$B_n(x) \Rightarrow A_n(x)$ также справедливы." [15; 34-35].

Доказательство. В самом деле, пусть утверждение $B_1(x)$ истинно. Утверждение $A_2(x)$ при этом не может быть истинным, так как иначе в силу б) было бы истинным и $B_2(x)$, а это в силу в) невозможно. Точно так же показывается, что не могут быть истинными утверждения $A_3(x)$, …, $A_n(x)$. Но если утверждения $A_2(x)$, …, $A_n(x)$ ложны, то в силу а) должно быть истинным утверждение $A_1(x)$. Итак, если истинно $B_1(x)$, то истинно и $A_1(x)$, т. е. имеет место теорема $B_1(x) \Rightarrow A_1(x)$. Так же доказываются и справедливость теорем $B_2(x) \Rightarrow A_2(x)$, …,$B_n(x) \Rightarrow A_n(x)$.

В работе [16] приведены следующие два примера применения этой теоремы.

Пример 1. "Рассмотрим следующие неопределенные высказывательные формы (заданные на множестве T всех треугольников):

$A_1 \equiv$ {угол A − острый},

$A_2 \equiv$ {угол A − прямой},

$A_3 \equiv$ {угол A − тупой},

$B_1 \equiv \{a^2 < b^2 + c^2\}$,

$B_2 \equiv \{a^2 = b^2 + c^2\}$,

$B_3 \equiv \{a^2 > b^2 + c^2\}$:

Легко проверить, что условия а), б) и в) вышеуказанной теоремы выполняются (докажите самостоятельно). Следовательно, кроме теорем $A_1 \Longrightarrow B_1$, $A_2 \Longrightarrow B_2$, $A_3 \Longrightarrow B_3$ справедливы также обратные теоремы $B_1 \Longrightarrow A_1$, $B_2 \Longrightarrow A_2$, $B_3 \Longrightarrow A_3$. То есть:

1) Если квадрат некоторой стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других сторон, то угол, лежащий против этой стороны, - острый.

2) Если квадрат некоторой стороны треугольника равно суммы квадратов двух других сторон, то угол, лежащий против этой стороны, - прямой.

3) Если квадрат некоторой стороны треугольника больше суммы квадратов двух других сторон, то угол, лежащий против этой стороны, - тупой.

Пример 2. Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, (4)

с действительнными коэффициентами и дискриминантом $D=b^2-4ac$. Рассмотрим, далее, следующие неопределенные утверждения:

$A_1 \equiv \{D > 0\}$,

$A_2 \equiv \{D < 0\}$,

$A_3 \equiv \{D = 0\}$,

$B_1 \equiv$ {корни уравнения (4) действительны и различны},

$B_2 \equiv$ {Уравнение (4) не имеет действительных корней},

$B_3 \equiv$ {корни уравнения (4) совпадают}.

Самостоятельно убедитесь, что условия а), б) и в) вышеуказанной теоремы выполняются. А значит верны не только прямые теоремы $A_1 \Longrightarrow B_1$, $A_2 \Longrightarrow B_2$, $A_3 \Longrightarrow B_3$, но и обратные их теоремы: $B_1 \Longrightarrow A_1$, $B_2 \Longrightarrow A_2$, $B_3 \Longrightarrow A_3$, т. е.

1) Если корни уравнения (4)действительны и различны, то $D > 0$;

2) Если уравнение (4) не имеет действительных корней, то $D < 0$;

3) Если корни уравнения (4)совпадают, то $D = 0$.

Пример 3. Допустим, функция ƒ, растущая на цифровой оси, и $f(x_1) < f(x_2)$ (1). Доказать, что $x_1 < x_2$ [2;75].

Доказательство.

1. Поскольку требуется доказать, что $x_1 < x_2$ (B_1), то сразу заметим, это требование задачи является одним из дизъюнктивных компонентов (случаев) следующего делимого рассуждения:

$x_1 < x_2 \vee x_1 > x_2 \vee x_1 = x_2$:

2. Если $x_1 > x_2$, то в соответствии с ростом функции $f(x_1) > f(x_2)$, что противоречит условию (1). Следовательно, B_2 неправильно. Таким образом, $x_1 \not< x_2$.

3. Если $x_1 = x_2$, то $f(x_1) = f(x_2)$, что также противоречит (1)-ому. Значит B_3 также неверно –

$x_1 \neq x_2$.

4. Следовательно, справедливым является B_1, то есть $x_1 < x_2$.

Пример 4. Известно, что данное равенство имеет рещение. Методом исключения докажем, что решение находится в указанных промежутках ([2;78], N237).

а) $7^x + 7^{-x} = 5$, [-1; 1], б) $7^x - 2\cdot 5^{-x} = 3$, (-1;1),

в) $\sin x = x^2 - x\, 0{,}5$, $[0; \frac{\pi}{2}]$, г) $\cos x = x^2 - x + 0{,}75$, $[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$,

д) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{18}{(4x-\pi)^{2+1}}$, $[0; \frac{\pi}{2}]$, е) $9\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{12}{x^2+1}$, [-1; 1] :

Решения и указания.

а) **Указание.** Заметим, что $x \in (-\infty; -1) \vee x \in [-1; 1] \vee x \in (1; +\infty)$.

б) **Решение.** $7^x - 2\cdot 5^{-x} = 3$, $x \in (-1;1)$: (1)

1) Заметим, что $x \in (-\infty; -1]\ ) \vee x \in (-1; 1) \vee x \in [1; +\infty)$:

2) $x \in (-\infty; -1] \Longrightarrow x \le -1 \Longrightarrow 7^x \le \frac{1}{7}$:

$x \le -1 \Longrightarrow -x \ge 1 \Longrightarrow 5^{-x} \ge 5 \Longrightarrow -2\cdot 5^{-x} \le -10$:

Следовательно, $f(x) = 7^x - 2\cdot 5^{-x} \le \frac{1}{7} - 10 = -9\frac{6}{7}$. Таким образом, равенство $f(x) = 3$ в $(-\infty; -1]$ не имеет корня.

3) $x \in [1; +\infty) \Longrightarrow x \gg 1 \Longrightarrow 7^x \ge 7$.

$x \gg 1 \Longrightarrow -x \le -1 \Longrightarrow 5^{-x} \le \frac{1}{5} \Longrightarrow -2\cdot 5^{-x} \ge -\frac{2}{5}$.

Следовательно, $f(x) = 7^x - 2\cdot 5^{-x} \gg 7 - \frac{2}{5} = 6{,}6$: Таким образом, $f(x) = 3$ не имеет корня в $[1; +\infty)$.

4) Таким образом, в равенстве $7^x - 2\cdot 5^{-x} = 3$ корни принадлежат (-1;1).

в) **Указание.** Данное равенство представить в следующем виде

$\sin x = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

и рассмотреть промежутки $(-\infty; 0)$, $[0; \frac{\pi}{2}]$ ו $(\frac{\pi}{2}; +\infty)$.

г) **Указание.** Данное равенство представить в следующем виде

$\cos x = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$ и рассмотреть промежутки $(-\infty; -\frac{\pi}{6})$, $[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$ ו $(\frac{\pi}{3}; +\infty)$.

д) **Указание.** Используя неравенство $\left|a + \frac{1}{a}\right| \ge 2$, отметим, что $|\operatorname{tgx} + \operatorname{ctgx}| \ge 2$ и рассмотрим промежутки $(-\infty; 0)$, $[0; \frac{\pi}{2}]$ ו $(\frac{\pi}{2}; +\infty)$.

е) **Решение.** Рассмотрим промежутки $x \in (-\infty; -1) \vee x \in [-1; 1] \vee x \in (1; +\infty)$. Заметим, что когда $x \in (-\infty; -1) \vee x \in (1; +\infty)$, то $|x| > 1$ и

$0 < \frac{12}{x^2+1} < \frac{12}{1+1} = 6$ (так как $x^2 > 1$).

Тогда для любого допустимо x имеет место неравенство

$|9\operatorname{tg} x + \operatorname{ctgx}| = \left|9\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right| \ge 6.$

Это последнее неравенство вытекает из подобного неравенства

$\left|9a + \frac{1}{a}\right| \ge 6$. (Обоснуйте самостоятельно).

Таким образом, если $|x| > 1$, то $9\operatorname{tg} x + \operatorname{ctgx} = \frac{12}{x^2+1}$. (1)

Левая часть неравенства меньше 6-ти, а правая больше 6-ти. Следовательно, равенство (1) в промежутках $(-\infty; -1,)$ и $(1; +\infty)$ не имеет решения. Значит, возможные решения принадлежат промежутку [-1;1].

Пример 5. Известно, что данное равенство имеет решение. Методом исключения докажите, что решение находится в указанном промежутке ([2; 78], N238).

а) $|\operatorname{tgx} + 4\operatorname{ctgx}| < \frac{8}{1+x^2}$, [-1; 1],

б) $\sin x + \cos x > x^2 - 12x + 37$, (5;7),

г) $4\cos x + 3\sin x > x^2 - 14x + 53$, (6;8).

Решите самостоятельно.

Пример 6. «Доказать, что $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$ при условии, что a+b+c=1 и $4a+1 \ge 0$, $4b+1 \ge 0$, $4c+1 \ge 0$» [17 ;19], задача N12.

Решение. Из курса школьной математики имеем

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ (неравенство Коши):

Следовательно:

$\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1)\cdot 1} \le \frac{4a+1+1}{2} = \frac{4a+2}{2} = 2a+1$,

$\sqrt{4b+1} \le 2b+1$, $\sqrt{4c+1} \le 2c+1$:

Отсюда следует, что $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \le 2(a+b+c) + 3 = 5$: Так как

$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \le 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5 \vee \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} = 5$,

следовательно остается исключить случай равенства. А это можно доказать методом противоречия. Действительно, если, допустим, имеет место равенство, то из неравенства Коши следует, что 4a+1=1, т. е. a = 0, анологично b = 0 и c = 0. Однако это невозможно, так как по условию задачи a+b+c=1. Значит $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$.

Цель

• Способствовать развитию логического мышления школьников;

• уметь выбрать целесообразный метод доказательства утверждения;

• уметь самостоятельно применять метод исключения в процессе решений задач.

Результаты и их обсуждения

Результаты данной статьи внедрены в вузовский учебник «Методика преподавания математики» [9], а также в действующий учебник 11-ого класса старшей школы РА «Алгебра и элементы математического анализа» [2], в соответстуюший решебник [7] и обсуждены в 11-ых классах некоторых старших школ г. Еревана (NN 109, 118, 190, 195).

Выводы

Известно, что в курсах математики общеобразовательних школ явное обучение доказательным конструкциям – методам доказательства и их элементам (т. е. правил умозаключений) в основном не проводится.

В действующих учебниках и методиках их авторы традиционно удовлетворяются лишь их интуитивным толкованием.

Однако, как показывает наш опыт преподавания, по крайней мере, в курсе математики старшей школы (например, в 11-ом классе) их явное применение существенным образом способствует формированию и развитию доказательных умений и навыков выпускников старшей школы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян. Алгебра и начала математического анализа – 10. “Тигран Мец”, 2017, 206 с.
2. Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян. Алгебра и начала математического анализа – 11. “Тигран Мец”, 2017, 200 с.
3. Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян. Алгебра и начала математического анализа – 12. “Тигран Мец”, 2017, 204 с.
4. Г. С. Микаелян. “Алгебра 6, 7, 8”. “Ай Эдит”, 1999-2001.
5. Э. И. Айвазян. Алгебра и начала математического анализа 10-12. Методическое пособие для учителя, естественно-математическое направление. Ер., “Эдит Принт”, 2008, 80 с.
6. Э. И. Айвазян. Алгебра и начала математического анализа 10. Руководство по решению задач. Ер., “Эдит Принт”, 2009, 112 с.
7. Э. И. Айвазян. Алгебра и начала математического анализа 11. Руководство по решению задач. Ер., “Эдит Принт”, 2010, 198 с.
8. Э. И. Айвазян. Алгебра и начала математического анализа 12. Руководство по решению задач. Ер., “Эдит Принт”, 2011, 260 с.
9. Э. И. Айвазян. Методика преподавания математики. Е., изд. МГУ, 2016. 202 стр.
10. Философский энциклопедический словарь. М., «Советская энциклопедия», 1983, 840 стр.
11. Э. И.Айвазян. Методологические основы обучения математическим доказательствам, Е., «Эдит Принт», 2013, 306 стр.
12. Н. Ф.Талызина. Н.Ф., Теоретические проблемы программированного обучения. М., Изд. МГУ, 1969, 133 стр.
13. Г. А. Брутян. Курс логики. Ер., изд-во ЕГУ, 1976, 507 с.
14. М. И. Кондаков. Логический словарь-справочник, М., «Наука», 1975, 717 стр.
15. В. Г Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И Шабунин. Лекции и задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1972, 592 стр.
16. В. П. Супрун, Избранные задачи повышенной сложности по математике. Минск, «Полымя», 1998, 102 стр.

REFERENCES

1. G.G. Gevorkyan,A.A. Sahakyan. Algebra and the beginning of Mathematics analysis. – 10. “Tigran Mets”, 2017, 206 p.
2. G.G. Gevorkyan,A.A. Sahakyan. Algebra and the beginning of Mathematics analysis – 11. “Tigran Mets”, 2017, 200 p.
3. G.G. Gevorkyan,A.A. Sahakyan. Algebra and the beginning of Mathematics analysis – 12. “Tigran Mets”, 2017, 204 p.
4. G.S. Mikaelyan. “Algebra 6, 7, 8”. “Hay Edith”, 1999-2001.
5. E.I. Ayvazyan. Algebra and the beginning of Mathematics analysis 10-12. Methodical teacher edition for teachers, Natural Mathematical direction. Yerevan. “Edit Print”, 2008, 80 p.
6. E.I. Ayvazyan. Algebra and the beginning of Mathematics analysis 10. Guide to solving problems. Yerevan, “Edit Print”, 2009, 112 p.
7. E.I. Ayvazyan. Algebra and the beginning of Mathematics analysis 11. Guide to solving problems. Yerevan, “Edit Print”, 2010, 198 p.
8. E.I. Ayvazyan. Algebra and the beginning of Mathematics analysis 11. Guide to solving problems. Yerevan, “Edit Print”, 2011, 260 p.
9. E.I. Ayvazyan. Methodology of teaching Mathematics. Yerevan, ed.MSU, 2016. 202 p.
10. Encyclopedic dictionary of Philosophy. M., «Soviet encyclopedia», 1983, 840 p.
11. E.I. Ayvazyan. Methodological basis of teaching Mathematical proof, Yerevan, «Edit Print», 2013, 306p.
12. N.F. Talizina, Theoretical problems teach in programming. M., Ed.MSU, 1969, 133p.
13. G.A.Brutyan. Logic courses. Yerevan, Ed.MSU, 1976, 507p.
14. M. I. Kondakov. Logical dictionary-guidebook, M., «Science», 1975, 717 p.
15. V.G. Boltyanskiy, Yu. V. Sidorov, M.I.Shabunin. Lectures and problems on Elementary Mathemarics. M., «Science», 1972, 592p.
16. V.P. Suprun, Selected problems of increased complexity in Mathematics. Minsk, «Polimya», 1998, 102p.

About methodology of studying method of exclusion of evidence

I. E. Ayvazyan

Abstract. The article is devoted to the discussion of the methodological issues of evidence-based policy on teaching methods in school course of Mathematics. It includes structure, stages, problem types and subtleties of the using on the practice of the method of exclusion. It can be useful for Mathematics teachers and high schools students.

Keywords: *evidence, method of evidence, direct and indirect evidences, law of evidence, evidence-based training method.*