Диференційований підхід при вивченні невизначеного інтеграла

М. В. Босовський, А. В. Тимошенко*

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
*Corresponding author. E-mail: alina.tymoshenko@ukr.net

Paper received 18.10.18; Accepted for publication 24.10.18.

https://doi.org/10.31174/SEND-PP2018-180VI74-03

Анотація. Статтю присвячено проблемі вивчення вищої математики студентами непрофільних спеціальностей. На основі аналізу, узагальнення й систематизації наукових джерел визначено особливості вивчення невизначених інтегралів та їх властивостей у вищих навчальних закладах. Обгрунтовано основні компоненти диференційованого підходу вивчення методу безпосереднього інтегрування.

Ключові слова: *невизначений інтеграл, метод безпосереднього інтегрування, властивості невизначеного інтеграла.*

Вступ. Поняття інтеграла пронизує всю сучасну математику. І не тільки це – в науках фізичного і технічного циклів знаходять застосування різні варіації інтеграла. Варто розкрити будь-яку книгу, що відноситься до точних наук, як зустрінеться знак інтеграла і пропозиції, включаючи слово «інтеграл». Більш того, останнім часом увійшли до ужитку такі терміни, як, наприклад, «інтегральна схема», «економічна інтеграція», які прямого відношення до інтеграла не мають, але смислове навантаження зберігають і знаходять широке розповсюдження в літературі і розмовній мові.

Знання методів розв'язування інтегралів, вміння правильного вибору методу і ефективного його використання є важливим елементом математичної освіти взагалі та фахової підготовки не тільки студентів фізико-математичних факультетів, а й фахівців інженерного профілю.

Короткий огляд публікацій з теми. Початки інтегральних методів простежуються в працях Архімеда, що користувався ними при вирішенні багатьох геометричних завдань і доказі теорем. У книгах по історії математики відповідні розділи так і називаються - «Інтегральні методи Архімеда». Вдосконалення методів Архімеда і створення інтегрального числення, його розвиток здійснювалися в роботах Кеплера, Кавальєрі, Торрічеллі. Паскаля, Ферма, Валліса, Роберваля, Барроу, Ньютона, Лейбніца, братів Якоба і Іоганна Бернуллі [1] (І. Бернуллі належить термін «інтегральне числення»; він перший прочитав, курс лекцій з інтегрального числення для маркіза Лоппіталя), Ейлера, Коші, Рімана [1].

Відкриття Ньютона і Лейбніца зробило переворот в математиці. Якщо раніше вона була доступна лише вузькому кругу фахівців, які розв'язували кожне окреме завдання придуманими ними методами, то після створення алгоритму диференціального і інтегрального числення, застосовного до широкого круга завдань, математика стала інструментом в руках людей, що займаються різними дослідженнями, але що не володіють достатньо глибокими математичними знаннями.

Після знаменного часу Ньютона і Лейбніца [2] розвиток ідеї інтеграла пішов в двох напрямах: інтеграл, що трактувався як межа деякої суми, певний інтеграл, набував досконалих і всеосяжних форм, знаходив все більше і більше застосування при вирішенні задач самої математики, в якій він склався, механіки, фізики, проник в технічні науки і став інструментом, необхідним у всіх галузях природних наук; інтеграл як сімейство первісних, невизначений інтеграл, своїм розвитком викликав виникнення абсолютно нового розділу аналізу – методів інтегрування функцій, а це у свою чергу було зв'язано з появою функцій, не відомих раніше, – клас інтегрованих функцій весь час поповнювався; найважливіше застосування невизначеного інтеграла відноситься до інтегрування диференціальних рівнянь, складових могутнього апарату багатьох наук.

Мета статті. Розглянути теоретичні та практичні питанням диференційованого підходу формування підготовчого матеріалу під час вивчення невизначеного інтегралу.

Матеріали і методи. У диференціальному численні розв'язується задача: по даній функції $f(x)$ знайти її похідну (або диференціал). Інтегральне числення вирішує зворотну задачу: знайти функцію $F(x)$, знаючи її похідну $F'(x)=f(x)$ (або диференціал). Шукану функцію $F(x)$ називають первісною функції $f(x)$.

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-кого $x\in(a;b)$ виконується рівність $F'(x)=f(x)$ (або $dF(x)=f(x)dx$).

Очевидно, що первісними будуть також будь-які функції $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$, де C – стала, оскільки $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2=f(x)$, $(x\in R)$.

Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на $(a;b)$, то множина всіх первісних для $f(x)$ задається формулою $F(x)+C$, де C – стала.

Функція $F(x)+C$ є первісною $f(x)$. Дійсно $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$.

Нехай $\Phi(x)$ - деяка інша, відмінна від $F(x)$, первісна функції $f(x)$, тобто $\Phi'(x)=f(x)$. Тоді для будь-якого $x\in(a;b)$ маємо $(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$.

Отже, $\Phi(x)=F(x)+C$.

Множина всіх первісних функцій $F(x)+C$ для $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$.

Таким чином, за означенням $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Тут $f(x)$ називається підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтеграції, $\int$ – знак невизначеного інтеграла.

Операція знаходження невизначеного інтеграла від функції називається інтегруванням цієї функції.

Визначимо ряд властивостей невизначеного інтеграла, виходячи з його визначення.

1. Диференціал від невизначеного інтеграла, рівний підінтегральному виразу, а похідна невизначеного інтеграла рівна підінтегральній функції:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx,\ \left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Завдяки цій властивості правильність інтеграції перевіряється диференціюванням. Наприклад, рівність $\int(3x^2+4)dx=x^3+4x+C$ правильна, оскільки $(x^3+4x+C)=3x^2+4$.

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції рівний сумі цієї функції і довільної сталої: $\int dF(x)=F(x)+C$.

3. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла: $\int af(x)dxd=a\int f(x)dx$, $a\neq 0$ – стала.

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа неперервних функцій рівний алгебраїчній сумі інтегралів від складових функцій: $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

5. (Інваріантність формули інтеграції). Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то і $\int f(u)du=F(u)+C$, де $u=\varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну.

Таким чином, формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи є змінна інтеграції незалежною змінною або будь-якою функцією від неї, що має неперервну похідну.

Так, з формули $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$ шляхом заміни x на u $(u=\varphi(x))$ одержуємо $\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$.

В інтегральному численні немає простих і універсальних правил пошуку первісних від елементарних функцій, як в диференціальному численні. Методи знаходження первісних (тобто інтеграції функції) зводяться до вказівки прийомів, що приводять даний (шуканий) інтеграл до табличного. Отже, необхідно знати табличні інтеграли і уміти їх розпізнавати.

Метод інтегрування, при якому даний інтеграл шляхом тотожних перетворень підінтегральної функції (або виразу) і застосування властивостей невизначеного інтеграла зводиться до одного або декількох табличних інтегралів, називається безпосереднім інтегруванням.

При зведенні даного інтеграла до табличного часто використовуються наступні перетворення диференціала (операція «приведення під знак диференціала»):

$$du=d(u+a),\ a \text{ – число}$$

$$du=\frac{1}{a}d(au),\ a\neq 0 \text{ – число}$$

$$u\cdot du=\frac{1}{2}d(u^2),$$

$$\cos u du=d(\sin u)$$

$$\sin u du=-d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u}du=d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u}du=d(tgu)$$

Взагалі, $f'(u)du=d(f(u))$, ця формула дуже часто використовується при обчисленні інтегралів.

Приклади:

1) $\int\frac{dx}{x+3}=\int\frac{d(x+3)}{x+3}=\ln|x+3|+C$;

2) $\int(3x-1)^{24}dx=\frac{1}{3}\int(3x-1)^{24}d(3x-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25}+C$;

3) $\int ctg^2xdx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int dx=-ctgx-x+C$;

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3}x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2}+C$;

5) $\int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 12x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 12x d(12x)\cdot\frac{1}{12} =$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$ [3];

6) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)}{(x-1)(x+2)}dx + \frac{1}{3}\int \frac{(x+2)}{(x-1)(x+2)}dx =$

$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{(x+2)} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)} = -\frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C;$

7) $\int tgudu = \int \frac{\sin u}{\cos u}du = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$;

8) $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}du = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}du + \int \frac{\sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}du =$

$= \int ctg\frac{u}{2}d\left(\frac{u}{2}\right) + \int tg\frac{u}{2}d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln\left|\sin\frac{u}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\right| + C = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C$;

9) $\int \frac{\sin x\, dx}{1+3\cos x} = \int \frac{d(-\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x| + C.$

Як бачимо, обчислення інтегралів іноді вимагає деякої винахідливості, так би мовити, «індивідуального підходу до кожної підінтегральної функції».

Відповідні навички отримуються в результаті значного числа вправ.

Завдання. Обчислити інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

$\int (6x+2)^5 dx$

$\int \frac{1}{5x^2+9}dx$

$\int \sqrt{x}dx$

$\int \frac{x}{2x^2+8}dx$

$\int \frac{1}{36-9x^2}dx$

$\int x(3x^2+2)^4 dx$

$\int (5x+3)^8 dx$

$\int \frac{x}{6x^2+7}dx$

Висновки. Отже, на основі аналізу теоретичних джерел, була розроблена система вправ для покращення засвоєння матеріалу студентами вищих навчальних закладів, які мають різний рівень знань.

ЛІТЕРАТУРА

1. История отечественной математики. Киев, 1967. Т. 2, 616 с.
2. Никифоровский В. А. Путь к интегралу. М., 1985. 192 с.
3. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): учеб. пособие для вузов. М.,1983. 175с.

REFERENCES

1. History of domestic mathematics. Kiev: Nauka (1967)
2. Nikiforovsky V. A. (1985). The path to the integral. Moscow: Naukova dumka.
3. Kuznetsov L. A. (1983). The collection of tasks in higher mathematics (model calculations): study guide for universities. Moscow: Vysshaya shkola.

A differentiated approach to the study the indefinite integral

M. V. Bosovskyi, A. V. Tymoshenko

Abstract. The article is devoted to the problem of studying of higher mathematics by the students of non-core specialties. On the basis of the analysis, generalization and systematization of scientific sources, the peculiarities of the study of indefinite integrals and their properties in higher educational institutions have been determined. The main components of the differentiated approach to studying the method of direct integration have been substantiated.

Keywords: *the indefinite integral, the method of direct integration, the properties of an indefinite integral.*