Диференційований підхід при вивченні лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

М. В. Босовський, *А. В. Тимошенко

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
*Corresponding author. E-mail: alina.tymoshenko@ukr.net

Paper received 24.10.19; Accepted for publication 09.11.19.

https://doi.org/10.31174/SEND-PP2019-209VII86-03

Анотація. Статтю присвячено проблемі вивчення вищої математики студентами непрофільних спеціальностей. На основі аналізу, узагальнення й систематизації наукових джерел визначено особливості розв'язування диференціальних рівнянь у вищих навчальних закладах. Обгрунтовано основні компоненти диференційованого підходу вивчення розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Ключові слова: *диференціальні рівняння, лінійні диференціальні рівняння, методи розв'язування диференціальних рівнянь.*

Вступ. Передумови для появи теорії диференціальних рівнянь склалися в другій половині XVII ст., коли математики впритул наблизились до усвідомлення взаємно оберненого характеру двох основних операцій аналізу нескінченних малих – диференціювання та інтегрування.

Актуальні на той час так звані «обернені задачі на дотичні», були одним із перших, що зводились до розв'язання диференціальних рівнянь. Багато фізичних явищ і процесів у природі та техніці описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем. Класична теорія звичайних диференціальних рівнянь є потужним апаратом, необхідним для складання математичних моделей різних прикладних задач та їхнього розв'язування.

Знання методів розв'язування диференціальних рівнянь, вміння правильного вибору методу і ефективного його використання є важливим елементом математичної освіти взагалі та фахової підготовки не тільки студентів фізико-математичних факультетів, а й фахівців інженерного профілю.

Короткий огляд публікацій з теми. Диференціальні рівняння винайдені Ньютоном (1642–1727) [1]. Ньютон вважав цей свій винахід настільки важливим, що зашифрував його у вигляді анаграми, сенс якої в сучасних термінах можна вільно передати так: «закони природи виражаються диференціальними рівняннями».

Основним аналітичним досягненням Ньютона було розкладання різних функцій в степеневі ряди (сенс другої, довгої анаграми Ньютона в тому, що для розв'язання будь-якого рівняння потрібно підставити в рівняння ряд і прирівняти члени однакового степеня). Ньютон розклав в «ряди Тейлора» всі основні елементарні функції (раціональ-
ні, радикали, тригонометричні, експоненту і логарифм). Це, разом з складеною ним таблицею первісних (яка перейшла в майже незмінному вигляді в сучасні підручники аналізу), дозволяло йому, за його словами, порівнювати площі будь-яких фігур «за половину чверті години».

Ньютон указував, що коефіцієнти його рядів пропорційні послідовним похідним функції, але не зупинявся на цьому детально, оскільки він справедливо вважав, що всі обчислення в аналізі зручніше проводити не за допомогою кратних диференціювань, а шляхом обчислення перших членів ряду. Для Ньютона зв'язок між коефіцієнтами ряду і похідними був скоріше засобом обчислення похідних, чим засобом складання ряду.

З величезного числа робіт XVIII століття з диференціальних рівнянь виділяються роботи Ейлера (1707–1783) і Лагранжа (1736–1813). У цих роботах була передусім розвинена теорія малих коливань, а отже – теорія лінійних систем диференціальних рівнянь; попутно виникли основні поняття лінійної алгебри (власні числа і вектори в n-мірному випадку). Характеристичне рівняння лінійного оператора довго називали секулярним, оскільки саме з такого рівняння визначаються секулярні (вікові, тобто повільні в порівнянні з річним рухом) збурення планетних орбіт згідно з теорією малих коливань Лагранжа. Услід за Ньютоном Лаплас і Лагранж, а пізніше Гаус (1777–1855) [1] розвивають також методи теорії збуджень.

Мета статті. Розглянути теоретичні та практичні питанням диференційованого підходу формування підготовчого матеріалу під час вивчення лінійних диференціальних рівнянь.

Матеріали і методи. При розв'язанні різних задач математики, фізики, хімії й інших наук часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, що зв'язують незалежну змінну, шукану функцію і її похідні. Такі рівняння називаються диференціальними (термін належить Г. Лейбніцу, 1676 р.). Розв'язком диференціального рівняння називається функція, яка при підстановці у рівняння перетворює його у тотожність. Так, розв'язком рівняння $y' = f(x)$ є функція $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ [4].

Розглянемо деякі загальні відомості про диференціальні рівняння[4].

Якщо шукана (невідома) функція залежить від однієї змінної, то диференціальне рівняння називають звичайним; у противному випадку – диференціальним рівнянням у частинних похідних.

Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називається порядком цього рівняння.

Наприклад, рівняння $y''' + 3'' - 2y = 0$ – звичайне диференціальне рівняння третього порядку, а рівняння $x^2 y' + 5xy = y^2$ – першого порядку; $y \cdot z'_x = x \cdot z'_y$ – диференціальне рівняння у частинних похідних першого порядку.

Процес відшукання розв'язку диференціального рівняння називається його інтегруванням, а графік розв'язку диференціального рівняння – інтегральною кривою.

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні на деякому проміжку функції [2].

Особливість лінійного диференціального рівняння: шукана функція y і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, і не перемножуються між собою.

Загальний розв'язок лінійного рівняння можна отримати методом Бернуллі або методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа).

Алгоритм методу Бернуллі полягає в наступному [4]:

1) розв'язок лінійного диференціального рівняння необхідно подати у вигляді добутку двох невідомих функцій $y = u \cdot v$ від аргумента $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Одну з цих функцій можна вибрати довільно, а друга визначається з даного рівняння;

2) за правилом похідна добутку дорівнює $y = u \cdot v$, то $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3) підставимо запис функції $y = u \cdot v$ та похідної $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ у рівняння $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ і отримаємо $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$. Згрупуємо другий і третій доданки, методом винесенням спільного множника u за дужки і прийдемо до диференціального рівняння $u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x)$;

4) спочатку визначаємо частинний розв'язок $v = v(x)$, для цього розв'язуємо диференціальне рівняння $v' + P(x) \cdot v = 0$ і за довільну сталу інтегрування беремо нуль ($C = 0$). Дане рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними;

5) далі підставимо знайдену функцію $v = v(x)$ у вихідне диференціальне рівняння $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$, яке при цьому спроститься до) $u'v + u \cdot 0 = Q(x)$, тобто до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними $u'v = Q(x)$ відносно $u(x)$. З цього рівняння знаходимо $u = u(x) + C$;

6) Маючи $u = u(x)$ і $v = v(x)$, знаходимо загальний розв'язок через добуток $y = u \cdot v = \left(u(x) + C\right) \cdot v(x)$;

7) якщо задана задача Коші, то з додаткової умови на розв'язок $y(x_0) = y_0$ визначаємо константу C.

Метод Лагранжа [4] (метод варіації довільної сталої) полягає в інтегруванні рівняння $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ у такий спосіб.

Розглянемо відповідне рівняння без правої частини, тобто рівняння $y' + P(x) \cdot y = 0$. Воно називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням першого порядку. У цьому рівнянні змінні відокремлюються:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx = \ln|C_1|$$

Таким чином, $\left|\frac{y}{C_1}\right| = e^{-\int P(x)dx}$, тобто $y = \pm C_1 e^{-\int P(x)dx}$ або $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$, де $C = \pm C_1$.

Метод варіації довільної сталої полягає у тому, що сталу C в отриманому розв'язку заміняємо функцією $C(x)$, тобто $C = C(x)$. Розв'язок рівняння $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ шукаємо у вигляді $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$.

Знаходимо похідну: $y' = C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(-P(x)\right)$.

Підставляємо значення y і y' у рівняння $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$:

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

Другий і третій доданки взаємно знищуються, і рівняння прийме вигляд

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

Отже, $dC(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx$.

Інтегруючи, знаходимо: $C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C$.

Підставляючи вираз $C(x)$ у рівність (2.14), одержимо загальний розв'язок ДР (2.11):

$$y = \left|\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C\right| \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Природно, та ж формула була отримана методом Бернуллі.

Отже, незалежно від методу розв'язування лінійного диференціального рівняння першого порядку, розв'язок буде однаковий.

Розглянемо застосування поданих методів на прикладі.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + 2xy = 2x$ методом Бернуллі і Лагранжа.

Розв'язання. Метод Лагранжа (або метод варіації сталої)

Розв'язуємо рівняння $y' + 2xy = 0$. Після відокремлення змінних маємо $\frac{dy}{y} = -2dx$, або $y = Ce^{-x^2}$.

Заміняємо C на $C(x)$, тобто розв'язок диференціального рівняння $y' + 2xy = 2x$ шукаємо у виді $y = C(x)e^{-x^2}$. Маємо $y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2} \cdot (-2x)$.

Тоді

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2} \cdot (-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = 2x,$$

тобто $C'(x)e^{-x^2} = 2x$. Розв'язуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними і отримуємо $C(x)=\int 2xe^{x^2}dx$, тоді $C(x)=e^{x^2}+C$.

Отже, $y=\left(e^{x^2}+C\right)e^{-x^2}=1+C\cdot e^{-x^2}$ – загальний розв'язок даного рівняння.

Для розв'язування методом Бернуллі введемо заміну $y=u\cdot v$, тоді $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Підставляємо отримані значення у початкове рівняння: $u'\cdot v+u\cdot v'+2u\cdot v=2x$. Звідси маємо $u'v+u\left(v'+2xv\right)=2x$. Спочатку розв'язуємо рівняння

$v'+2x\cdot v=0$

$\frac{dv}{dx}=-2x\cdot v$ (отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними)

$\frac{dv}{v}=-2x\cdot dx$ (диференціальне рівняння з відокремленими змінними)

$\ln|v|=-\int 2xdx=-x^2+\ln|C_1|$. Тоді $v=C\cdot e^{-x^2}$.

Покладемо $C=1$, звідси маємо $v=e^{-x^2}$.

Тепер розв'язуємо рівняння $u'e^{-x^2}+u\cdot 0=2x$, тобто $\frac{du}{dx}=2x\cdot e^{x^2}$ (отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними)

$du=2x\cdot e^{x^2}dx$ (диференціальне рівняння з відокремленими змінними)

$u=\int 2x\cdot e^{x^2}dx=e^{x^2}+C$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння $y=u\cdot v=\left(e^{x^2}+C\right)e^{-x^2}=1+C\cdot e^{-x^2}$.

Як бачимо, обчислення диференціальних рівнянь вимагає знання основних методів розв'язання, оскільки для кожного виду даних рівнянь існує свій підхід.

Відповідні навички отримуються в результаті значного числа вправ.

Завдання. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння першого порядку:

$y'+2x^2y=3x$

$y'-xy=6x^2$

$y'-4xy=-4x^3$ [3]

$y'+\frac{3y}{x}=\frac{2}{x^3}$ [3]

$y'+\frac{y}{x+1}=\frac{6}{x}$

$y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$ [3]

$y'+ytgx=\cos^2 x$

$y'-2yctgx=6x\sin x$

$y'-\frac{y}{x}=-2\frac{\ln x}{x}$

$y'-3x^2y=\frac{1}{3}x^2\left(1+x^3\right)$.

Висновки. Отже, на основі аналізу теоретичних джерел, було представлено методи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Формування компетентностей в умовах диференційованого підходу при підготовці до вивчення диференціальних рівнянь здійснюється системою вправ для покращення засвоєння матеріалу студентами вищих навчальних закладів, які мають різний рівень знань, таким чином, щоб на їх основі можна було будувати виклад теоретичного матеріалу змістового блоку «Диференціальні рівняння».

ЛІТЕРАТУРА

1. История отечественной математики. Киев, 1967. Т. 2, 616 с.
2. Возняк О., Боднар Д., Буяк Л. Диференціальні рівняння: методи розв'язування. Тернопіль, 2010. 112 с.
3. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): учеб. пособие для вузов. М., 1983. 175с.
4. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. Київ, 2003. 600 с.

REFERENCES

1. *History of domestic mathematics*. Kyev: Nauka (1967)
2. Wozniak O., Bodnar D., Buyak L. (2010). *Differential equations: methods of solving.* Ternopil: Navchalna knyha – Bohdan.
3. Kuznetsov L. A. (1983). *The collection of tasks in higher mathematics (model calculations): study guide for universities.* Moscow: Vysshaya shkola.
4. Samoilenko A., Perestyuk M., Parasyuk I. (2003). *Differential equations.* Kyiv: Lybid.

A differentiated approach in the study of first order linear differential equations

M. V. Bosovskyi, A. V. Tymoshenko

Abstract. The article is devoted to the problem of studying of higher mathematics by the students of non-core specialties. On the basis of the analysis, generalization and systematization of scientific sources, the peculiarities of solving differential equations in higher educational institutions are determined. The basic components of the differential approach of studying first-order linear differential equations are substantiated.

Keywords: *the differential equations, the linear differential equations, the methods of solving differential equations.*