

## До розрахунку на стійкість пружних анізотропних оболонок обертання в тривимірній постановці при осьовому стисканні

М. П. Семенюк, В. М. Трач, А. В. Подворний

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ; Національний університет водного господарства та природокористування  
\*Corresponding author. E-mail: mikolasem@ukr.net; trach-vm@ukr.net; andrei\_podvorniy@ukr.net

Paper received 23.06.17; Accepted for publication 28.06.17.

**Анотація.** Запропонований підхід до реалізації задачі тривимірної стійкості товстостінних анізотропних оболонок обертання під дією осьового стискання. Для представлення можливості запропонованого підходу, стосовно встановлення величин критичних навантажень, що базується на використанні процедури Бубнова-Гальоркіна та чисельному методі дискретної ортогоналізації проведено розрахунок циліндричної анізотропної оболонки з матеріалу, характеристики якого описуються однією площиною пружної симетрії. Досліджено залежність величин критичних навантажень від кута повороту головних напрямів пружності такого матеріалу відносно ліній головних кривизн конструкції. Результати представлені у вигляді графіків та проведений їх аналіз.

**Ключові слова:** стійкість, товстостінні анізотропні оболонки, тривимірна постановка

**Вступ.** Анізотропні товстостінні оболонки з композитів широко використовуються у найрізноманітніших конструкціях сучасної техніки. Найчастіше умови їх експлуатації такі, що в оболонці виникають напруження стискання, що можуть досягати критичних величин. Ці напруження можливо відшукати за попередньо проведеними експериментальними дослідженнями або знайти розрахунковим шляхом. В більшості розроблених, на даний час, методик приймається структурна ідеалізація композиту завдяки чому матеріал має три площини пружної симетрії. Однак, при виготовленні оболонок, наприклад, намотуванням виникає ефект анізотропії, що є наслідком розбіжності між напрямком армування та осями координат оболонки. Тому виникає необхідність в розробці методів розв'язку задач стійкості оболонок з композитних матеріалів із використанням більш загальної моделі композиту з найменшим рівнем симетрії матеріалу.

**Скорочений огляд публікацій по темі.** На основі двовимірних теорій задача стійкості тонких анізотропних оболонок детально досліджена в роботі [1]. Що стосується тривимірної постановки, то розрахунок напружено-деформованого стану та стійкості товстостінних анізотропних композитних оболонок мало досліджений у зв'язку із складністю побудови аналітичних та чисельних методів розрахунку таких тривимірних систем. Однак необхідно зауважити, що для ізотропних і ортотропних оболонок конструкцій такі дослідження проведені: в роботах [4, 5, 8] досліджена стійкість циліндрів при розподіленому зовнішньому тиску та осьовому стисканні, а в [2, 3] розглянутий напружено-деформований стан ортотропних та анізотропних циліндрів при зовнішніх діях.

**Метою** представленої роботи є розв'язок задачі стійкості анізотропних оболонок з композитів на основі тривимірної теорії пружності [7] з використанням залежностей [6] при визначенні докритичного

напружено-деформованого стану. Отримані тривимірні розв'язки зможуть слугувати еталонами в розрахунках на стійкість, чисельними методами, оболонковими конструкціями більш складної геометрії.

**Матеріали та методи.** Для прикладу, розглядаються пружні анізотропні оболонки, віднесені до циліндричної (криволінійної) системи координат  $r, z, \theta$ . Вісі  $r$  та  $\theta$  є полярними координатами колового поперечного перерізу циліндра,  $z$  – нормальна до цього перерізу вісь, початок якої співпадає з центром основи. Матеріал конструкції має одну площину пружної симетрії, що обумовлено поворотом головних напрямів пружності початкового ортотропного матеріалу відносно осі  $z$  розглядуваної системи координат. Геометрія циліндра визначається довжиною твірної  $L$ , а також радіусами внутрішньої  $R_1$  та зовнішньої  $R_2$  поверхонь.

В нелінійній теорії пружності [7] умови рівноваги елемента, при використанні циліндричної системи координат, зводяться до трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \hat{\sigma}_{rr} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\tau}_{rz}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\tau}_{r\theta}) - \hat{\sigma}_{\theta\theta} + r F_r \right]; \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \hat{\tau}_{rz} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\sigma}_{zz}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\tau}_{\theta z}) + r F_z \right]; \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \hat{\tau}_{r\theta} + \hat{\tau}_{\theta r} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\tau}_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\sigma}_{\theta\theta}) + r F_\theta \right] \quad (1) \end{aligned}$$

де  $F_r, F_z, F_\theta$  – проекції вектора питомих об'ємних сил на напрямки дотичних до координатних ліній  $r, z, \theta$ ;  $\hat{\sigma}, \hat{\tau}$  – проекції напружень на вісі прийнятої криволінійної системи координат до деформування оболонки [7].

При цьому лінеаризовані компоненти деформацій та кути повороту оболонок пов'язані з її переміщеннями такими залежностями

$$\begin{aligned} e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r & e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ e_{z\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & e_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & e_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ \omega_z &= \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{2r} u_\theta - \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \omega_\theta &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z} & \omega_r &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad (2) \end{aligned}$$

Тут  $u_z, u_\theta, u_r$  – переміщення точок циліндра у напрямках осей  $z, \theta, r$  відповідно.

Співвідношення узагальненого закону Гука, що пов'язують компоненти деформацій та напружень, при повороті осей ортотропії відносно осі  $z$ , запишемо так [6]:

$$\begin{aligned} e_{zz} &= a_{11}\sigma_{zz} + a_{12}\sigma_{\theta\theta} + a_{13}\sigma_{rr} + a_{16}\tau_{z\theta} \\ e_{rr} &= a_{13}\sigma_{zz} + a_{23}\sigma_{\theta\theta} + a_{33}\sigma_{rr} + a_{36}\tau_{z\theta} \\ e_{r\theta} &= a_{44}\tau_{r\theta} + a_{45}\tau_{rz} \\ e_{\theta\theta} &= a_{12}\sigma_{zz} + a_{22}\sigma_{\theta\theta} + a_{23}\sigma_{rr} + a_{26}\tau_{z\theta} \\ e_{z\theta} &= a_{16}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{\theta\theta} + a_{36}\sigma_{rr} + a_{66}\tau_{z\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11} \cos^4 \psi + (2a'_{12} + a'_{66}) \cos^2 \psi \sin^2 \psi + a'_{22} \sin^4 \psi ; \\ a_{22} &= a'_{22} \cos^4 \psi + (2a'_{12} + a'_{66}) \cos^2 \psi \sin^2 \psi + a'_{11} \sin^4 \psi ; \\ a_{12} &= a'_{12} + (a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} - a'_{66}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi ; \\ a_{66} &= a'_{66} + 4(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} - a'_{66}) \cos^2 \psi \sin^2 \psi ; \\ a_{16} &= [2a'_{22} \sin^2 \psi - 2a'_{11} \cos^2 \psi + (2a'_{12} + a'_{66})(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)] \cos \psi \sin \psi ; \\ a_{26} &= [2a'_{22} \cos^2 \psi - 2a'_{11} \sin^2 \psi - (2a'_{12} + a'_{66})(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)] \cos \psi \sin \psi ; \\ a_{13} &= a'_{13} \cos^2 \psi + a'_{23} \sin^2 \psi ; \quad a_{23} = a'_{23} \cos^2 \psi + a'_{13} \sin^2 \psi ; \quad a_{36} = 2(a'_{23} - a'_{13}) \cos \psi \sin \psi ; \\ a_{33} &= a'_{33} ; \\ a_{44} &= a'_{44} \cos^2 \psi + a'_{55} \sin^2 \psi ; \quad a_{55} = a'_{55} \cos^2 \psi + a'_{44} \sin^2 \psi ; \quad a_{45} = (a'_{44} - a'_{55}) \cos \psi \sin \psi , \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\psi$  – кут повороту головних напрямків пружності попередньо волокнистого ортотропного матеріалу відносно осі  $z$  прийнятої системи координат.

Співвідношення узагальненого закону Гука, для матеріалів з однією площиною пружної симетрії (3), запишемо в оберненому вигляді [2], який використаємо при розв'язку системи (1):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= b_{11}e_{zz} + b_{12}e_{\theta\theta} + b_{16}e_{z\theta} + c_1\sigma_{rr} \\ \tau_{z\theta} &= b_{16}e_{zz} + b_{26}e_{\theta\theta} + b_{66}e_{z\theta} + c_3\sigma_{rr} \\ e_{rz} &= a_{45}\tau_{r\theta} + a_{55}\tau_{rz} \\ \sigma_{\theta\theta} &= b_{12}e_{zz} + b_{22}e_{\theta\theta} + b_{26}e_{z\theta} + c_2\sigma_{rr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \sigma_{rr} + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_{rz} + \sigma_{zz}^0 \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right) \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tau_{r\theta} + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \sigma_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} u_\theta \right) \right) - \left( \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} u_r \right) + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right) \right] ; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \tau_{rz} + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma_{zz} + \sigma_{zz}^0 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tau_{z\theta} + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right) ; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \tau_{r\theta} + \left( \tau_{r\theta} + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_{z\theta} + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right) + \sigma_{zz}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} u_r \right) + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right] , \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\sigma_{zz}^0, \sigma_{\theta\theta}^0$  и  $\tau_{z\theta}^0$  – докритичні напруження отримані відповідно до методу запропонованого в [6].

Замінюючи в (6) напруження  $\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta}$  їх виразами (5) з урахуванням (2) і, використовуючи спів-

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{c_2 - 1}{r} \sigma_{rr} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{b_{22}}{r^2} u_r + \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} -$$

$$e_{rz} = a_{45}\tau_{r\theta} + a_{55}\tau_{rz} . \quad (3)$$

Зауважимо, що напруження  $\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}, \tau_{z\theta}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}$  пов'язані з  $\hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{\theta\theta}, \hat{\sigma}_{rr}, \hat{\tau}_{z\theta}, \hat{\tau}_{r\theta}, \hat{\tau}_{rz}$  в (1) за допомогою співвідношень [7]. В (3)  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 6$ ) – механічні константи матеріалу, що має одну площину пружної симетрії, зв'язок яких з константами матеріалу, чий вісі ортотропії співпадають з координатними  $a'_{ij}$ , запишемо відповідно [6]:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= -c_1 e_{zz} - c_2 e_{\theta\theta} - c_3 e_{z\theta} + c_4 \sigma_{rr} \\ e_{r\theta} &= a_{44} \tau_{r\theta} + a_{45} \tau_{rz} , \end{aligned} \quad (5)$$

де  $b_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 6$ ),  $c_i$  ( $i=1, 4$ ) – характеристики, що визначаються з використанням механічних констант  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 3, 5, 6$ ) матеріалу оболонки [2].

Для розв'язку задачі стійкості циліндричних анізотропних оболонок, згідно до статичного критерію Ейлера, проведемо лінеаризацію системи (1), записаної відносно похідних за змінною  $r$ :

відношення для деформації  $e_{rz}, e_{r\theta}, e_{rr}$  (2), отримаємо систему рівнянь стійкості для анізотропних циліндричних оболонок:

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; \\
 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = & -c_1 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz} - \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{b_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} \\
 & - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2b_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - b_{16} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta}; \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = & -\frac{c_2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - b_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - c_3 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} \\
 & - \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{2b_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta}; \\
 \frac{\partial u_r}{\partial r} = & c_4 \sigma_{rr} - \frac{c_2}{r} u_r - c_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - c_3 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{c_2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \\
 \frac{\partial u_z}{\partial r} = & a_{55} \tau_{rz} + a_{45} \tau_{r\theta} - \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (7)
 \end{aligned}$$

Одним з напрямів розв'язку отриманої тривимірної задачі (7) є можливість у перетворенні її в одновимірну, для чого скористаємось процедурою Бубнова-Гальоркіна. У відповідності з нею, розкладемо всі функції у тригонометричні ряди за координатою уздовж твірної циліндра  $z$  так, щоб вони задовольняли крайовим умовам на торцях оболонки

$$\sigma_{zz} = -\sigma_{zz}^0, u_r = u_\theta = 0,$$

а також врахуємо періодичність функцій за коловою координатою  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1,pk}(r) \cos k\theta + y'_{1,mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
 \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2,pk}(r) \cos k\theta + y'_{2,mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
 \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3,pk}(r) \sin k\theta + y'_{3,mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z; \\
 u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4,pk}(r) \cos k\theta + y'_{4,mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
 u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{5,pk}(r) \cos k\theta + y'_{5,mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
 u_\theta(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{6,pk}(r) \sin k\theta + y'_{6,mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z \quad (8)
 \end{aligned}$$

Після деяких математичних перетворень та розділення змінних в рівняннях (7) за допомогою співвідношень (8), отримаємо нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші:

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r)\bar{y}, \quad T(r) = t_{i,j}(r), \quad (9)$$

де  $\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}$  – розв'язуюча вектор-функція. Ненульові елементи матриці  $T(r)$  приведені в роботі [9].

Реалізація отриманої системи рівнянь (9) при граничних умовах на внутрішній  $r = R_1$  та на зовнішній  $r = R_2$  поверхнях оболонки

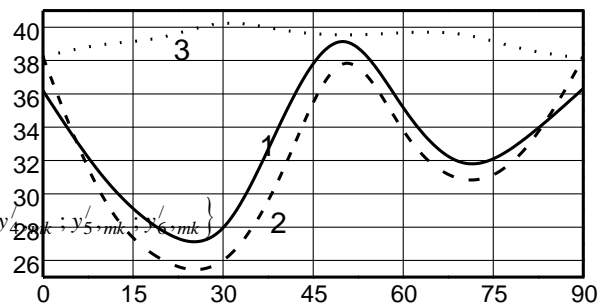
$$\sigma_{rr} = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0 \quad (10)$$

проводиться з використанням чисельного методу дискретної ортогоналізації [3]. Алгоритм розв'язку задачі стійкості оболонок обертання, що знаходяться

під дією осевого стискання, реалізований у вигляді пакетів прикладних програм для ПК.

**Результати та їх обговорення.** В якості тестування та реалізації можливостей запропонованого підходу розглянемо стійкість, при осьовому стискаючому навантаженні, циліндричної оболонки, утвореної намотуванням, з такими геометричними та механічними характеристиками: радіусами внутрішньої  $R_1 = 0.59$  м та зовнішньої  $R_2 = 0.61$  м поверхонь, довжиною твірної  $L = 1.2$  м,  $E_z = 1900$  МПа,  $E_\theta = 1200$  МПа,  $\sigma_{zz}^{cr} = 450$  МПа,  $G_{z\theta} = 300$  МПа,  $G_{zr} = G_{\theta r} = 230$  МПа,  $\nu_{z\theta} = 0.15$ ,  $\nu_{r\theta} = 0.3$ ,  $\nu_{rz} = 0.07$ . На рис. 1 приведені графіки в осях  $\sigma_{zz}^{cr} - \psi$ , де  $\sigma_{zz}^{cr}$  – критичне значення осевого напруження оболонки з гвинтовим армуванням кут якого визначається величиною  $\psi$ . При цьому суцільна крива 1 отримана при використанні теорії Кірхгофа-Лява [1], криві 2 та 3 відповідають запропонованому підходу, але 3 отримана без урахування в співвідношеннях пружності (3) констант матеріалу  $a_{16}, a_{26}, a_{36}, a_{45}$ , тобто оболонка є ортотропною.

Рис.1. Залежність осевих стискаючих напружень від кута повороту напрямків пружності матеріалу



**Висновки.** Отриманий розв'язок задачі стійкості циліндричних оболонок з урахуванням анізотропії, обумовленої наявністю однієї площини пружної симетрії. Докритичний напружено-деформований стан описується на основі використання залежностей [6]. Розв'язуюча система диференціальних рівнянь стійкості отримана на основі тривимірних співвідношень теорії пружності. Для задоволення крайових умов на

торця використовується процедура Бубнова-Гальоркіна.

На цій основі досліджена залежність критичних значень осевих стискаючих напружень від напрямку армування стінок оболонки. Видно, що отримані за запропонованим підходом результати добре узго-

джуються з визначеними на основі класичної теорії. Це дозволяє використовувати розроблену методику при розрахунку товстостінних циліндричних конструкцій, де двовимірні підходи призводять до наближених результатів.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела.- 2010. – 352 с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачі теорії пружості неоднородних тел – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
3. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей: Монография – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
4. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища школа, 1986. – 511 с.
5. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Пространственные задачи теории пружости и пластичности. Т.4. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
6. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
7. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – Л. - М.: ОГИЗ, 1948. - 211 с.
8. Kardomateas G.A. Bifurcation of Equilibrium in Thick Orthotropic Cylindrical Shells Under Axial Compression. – Journal of Applied Mechanics, March 1995, Vol. 62/43.
9. Semenuk M.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Stability of cylindrical anisotropic shells under axial pressure in three-dimensional statement // 36. наук. пр. “Опір матеріалів і теорія споруд”/ КНУБА. -№94, -2015.- С. 192-206.

#### REFERENCES

1. Bazenov V.A., Semenuk M.P., Trach V.M. Nonlinear deformation, stability and overcritical behavior of anisotropic shells: Monograph. – K.: Karavela.- 2010. – 352 p.
2. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. Tasks of the theory of elasticity of non-uniform bodies – K.: Nauk. dumka, 1991. – 216 p.
3. Grigorenko Ya.M., Vlaykov G.G., Grigorenko A.Ya. The numerical and analytical solution of problems of mechanics of shells on the basis of various models: Monograph. – K. : Akademperіodika, 2006. – 472 p.
4. Guz A.N. Bases of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Kiev: Vischa shkola 1986. – 511 p.
5. Guz A.N., Babich I.U. Spatial tasks of the theory of elasticity and plasticity. T.4. Three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – K.: Nauk. dumka, 1985. – 280 p.
6. Lehnitskiy S.G. Theory of elasticity of an anisotropic body. – the 2nd edition corrected and additional. – M.: Nauka, 1977. – 415 p.
7. Novozilov V.V. Bases of the nonlinear theory of elasticity. – L. - M.: OGIZ, 1948. - 211 p.

#### To calculation on stability of elastic anisotropic shells of rotation in three-dimensional statement at axial compression

**M. P. Semenuk, V. M. Trach, A. V. Podvornyi**

**Abstract.** Approach to realization of a problem of three-dimensional stability of thick-walled anisotropic shells of rotation under the influence of axial compression is offered. For representation of a possibility of the offered approach, on establishment of sizes of critical loadings, Bubnov-Galerkina based on use of the procedure and a numerical method of discrete orthogonalization calculation of a cylindrical anisotropic shell from material which characteristics are described by one plane of elastic symmetry is carried out. Dependence of sizes of critical loadings on an angle of rotation of the main directions of elasticity of such material concerning lines main curvatures designs is investigated. Results are presented in the form of schedules and the analysis is carried out them.

**Keywords:** stability, thick-walled anisotropic shells, three-dimensional statement

#### К расчету на устойчивость упругих анизотропных оболочек вращения в трехмерной постановке при осевом сжатии

**Н. П. Семенюк, В. М. Трач, А. В. Подворный**

**Аннотация.** Предложен подход к реализации задачи трехмерной устойчивости толстостенных анизотропных оболочек вращения под действием осевого сжатия. Для представления возможности предлагаемого подхода, по установлению величин критических нагрузок, основанного на использовании процедуры Бубнова-Галеркина и численном методе дискретной ортогонализации проведен расчет цилиндрической анизотропной оболочки из материала, характеристики которого описываются одной плоскостью упругой симметрии. Исследована зависимость величин критических нагрузок от угла поворота главных направлений упругости такого материала относительно линий главных кривизн конструкции. Результаты представлены в виде графиков и проведен их анализ.

**Ключевые слова:** устойчивость, толстостенные анизотропные оболочки, трехмерная постановка