

## KARTOGRAPHY

## Трансформування картографічних проєкцій за методом Кригінга

В. Мельник, В. Расюн\*, Н. Муляр

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк, Україна

\*Corresponding author. E-mail: vityokko@mail.ru

Paper received 22.06.2016; Accepted for publication 01.07.2016.

**Анотація.** В статті проаналізовано два методи трансформації картографічних проєкцій в ГІС. Розглянуті алгебраїчний і метод Кригінга. Перший метод простий у виконанні, проте вимагає ітераційного підходу, що призводить до втрати точності. Водночас метод Кригінга, який є порівняно новим – більш надійний і коректний. Експериментальні дослідження підтверджують його достатньо високу точність.

**Ключові слова:** картографічна проєкція, алгебраїчний поліном, згладжування, трансформування, Кригінг.

**Вступ.** Геометрична трансформація даних, отриманих із картографічних джерел є найважливішим етапом під час створення ГІС. Оскільки базові проєкції, в яких відображаються шари ГІС, обирає користувач, і їх параметри відомі, то досить трансформувати прямокутні координати з усіх інших картографічних джерел у геодезичні [1]. При відомій проєкції карт трансформування виконується за оберненими формулами проєкції. В такому випадку, інтерес представляє лише корекція оцифрованих координат, яка виконується з метою зменшення помилок, пов'язаних із спотвореннями, що виникають під час друкування карт та похибками процесу оцифрування. Проте, на практиці параметри проєкції картографічного джерела часто є невідомими, або обернених формул не існує. Прикладом є проєкція, задана за допомогою координат вузлів градусної сітки із певним кроком, отримуваних чисельними методами при розв'язанні так званих обернених задач картографії.

Певні проблеми виникають при перетворенні (трансформуванні) картографічних зображень з однієї проєкції в іншу. Вони ускладнюються тим, що на радянських тематичних картах не прийнято вказувати вхідні дані, які відносяться до їх геодезичних і математичних основ. Разом з тим, для автоматизованої обробки важливо знати для якого еліпсоїда будувалася проєкція, та за якими рівняннями. Ці причини, а також велика потреба у ГІС-продуктах сприяють різкому підвищенню попиту на географічні карти в традиційному електронному варіанті [2]. Тому, отримання достовірних і коректних карт є важливим та актуальним завданням.

**Аналіз останніх публікацій.** Протягом останніх років спостерігається пошук досліджень, пов'язаних із питаннями математичної картографії. Особливої уваги заслуговують роботи таких авторів, як В. М. Мельник, П. П. Король, Р. І. Соса, В. Д. Барановський та ін. Цікавими і перспективними є методи застосування варіаційних принципів оптимізації картографічних проєкцій для України та її окремих регіонів [3, 5, 11].

**Мета.** Обґрунтування застосування методу Кригінга для трансформації картографічних проєкцій.

**Виклад основного матеріалу.**

**І. Традиційний метод.** Процес трансформування двох картографічних проєкцій можна представити

рівняннями точкової відповідності двох плоских полів:

$$X = F_1(x, y); Y = F_2(x, y), \quad (1)$$

де  $x, y$  – координати точок трансформуючого поля;  $X, Y$  – координати точок трансформованого поля;  $F_1, F_2$  – деякі однозначні, неперервні разом зі своїми похідними першого і другого порядків функції, що задані в обмеженій області та мають в усіх своїх точках області якобіан перших похідних

$$I = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \neq 0. \quad (2)$$

Такий підхід можливий, коли відомі рівняння проєкцій, де аргументами є переважно географічні координати. Враховуючи можливі деформації вихідного картографічного зображення та неточності географічних координат, побудова рівнянь (1) можлива з використанням наближених методів. Для цього часто використовують метод апроксимуючих функцій двох змінних:

$$\left. \begin{aligned} B &= \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t a_{ij} x^i y^j \\ L &= \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t b_{ij} x^i y^j \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Відомо, що збільшення степеня полінома підвищує точність апроксимації. Однак, спрогнозувати необхідний порядок апроксимуючого полінома функції двох змінних (3) для забезпечення потрібної точності досить складно. Тому цей метод має обмежене застосування. Приклад трансформації двох картографічних проєкцій показано на рис. 1, де праворуч – карта Гренландії в стереографічній проєкції, а ліворуч – карта, отримана з попередньої після трансформації [4].

В сучасних умовах достатньо ефективним і універсальним методом трансформації картографічних проєкцій в ГІС є метод Кригінга.

**II. Метод згладжування.** Для отримання оптимальних параметрів варіограм необхідна попередня фільтрація (згладжування) вихідних даних. Для цього часто використовують метод ковзного середнього [7; 8; 9]. Розглядаючи елемент зображення під маскою (вікно), яка дорівнює зоні впливу, необхідно знайти таку множину вагових коефіцієнтів  $a_i$  при

$i = 1, \dots, k, n$ , завдяки яким середнє зважене значення буде найкращою оцінкою досліджуваних параметрів:

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i, y_i), \quad (4)$$

де  $a_i$  – вагові коефіцієнти;  $f(\tilde{x}, \tilde{y})$  – нове,

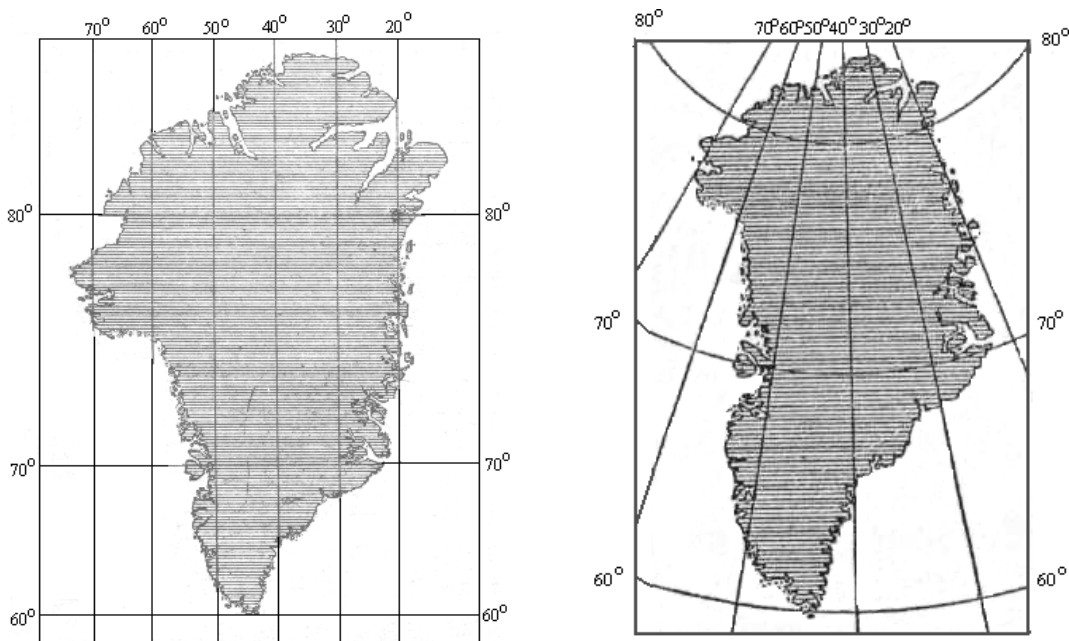


Рис. 1. Приклад трансформації картографічних проєкцій.

фільтроване значення центрального елемента під маскою;  $f(x_i, y_i)$  – нефільтроване значення.

Вагові коефіцієнти  $a_i$  шукають за методом найменших квадратів. Для знаходження визначають частинні похідні, які прирівнюються до нуля.

Інший варіант визначення якості процедури оцінювання полягає у знаходженні дисперсії помилок

$\sigma_e$ , які при цьому виникають. В свою чергу дисперсія помилок визначаються через коваріаційні характеристики. Останні знаходять на основі емпіричних варіограм як різницю  $C + C_0 - \gamma(h)$ , де  $C + C_0$  – поріг іваріограми,  $\gamma(h)$  – значення варіограми.

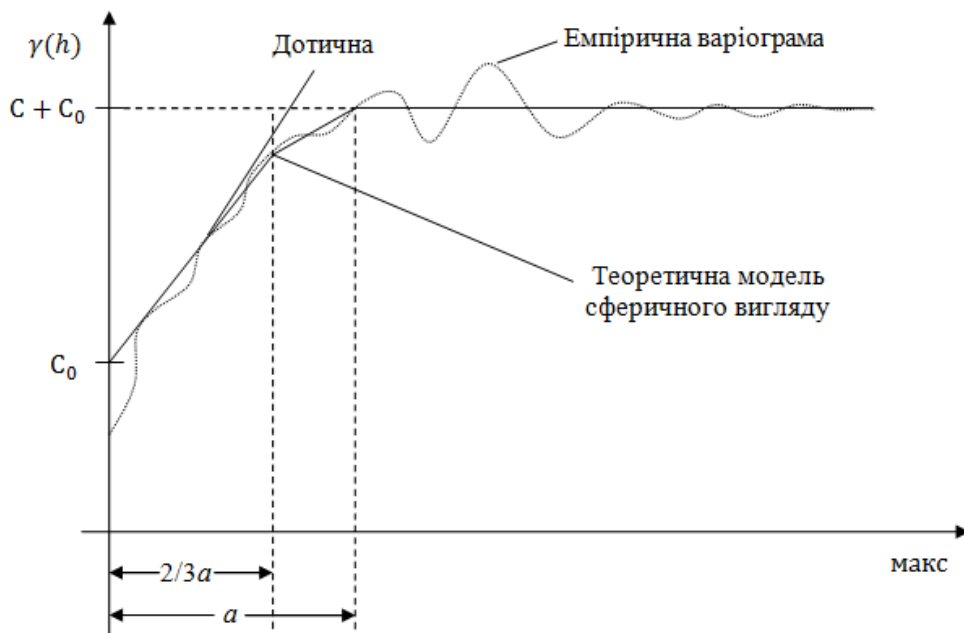


Рис. 2. Параметри сферичної теоретичної варіограми:  $a$  – зона впливу,  $C_0$  – дисперсія шумів,  $C + C_0$  – поріг варіограми.

Можна підібрати такі коефіцієнти  $a_i(a_j)$ , які б мінімізували дисперсію, варіюючи значеннями

коефіцієнтів, щоб мати зважене середнє з найменшою дисперсією помилок. Шукана оцінка не повинна мати систематичних помилок, тобто, повинна виконуватися

умова незміщеності  $\sum_i a_i = 1$ . Отже, з урахуванням додаткових умов необхідно мінімізувати функцію  $F$ :

$$F = \sigma_e^2 + 2\mu \left( \sum_i a_i - 1 \right), \quad (5)$$

де  $\mu$  – множник Лагранжа.

**III. Розрахунок варіограм на площині.** При двовимірних даних варіограми можна розраховувати принаймні в чотирьох напрямках для перевірки анізотропії. Перший крок є вибір лага (lag) варіограми і його допуск, потім – основних кутів і кутовий допуск [8].

Процедура розрахунку реалізується наступним чином. На першому кроці для кожної точки програма вибирає всі можливі пари з рештою точок і класифікує їх за встановленими класами відстаней і напрямків. Потім для кожної пари обчислюється квадрат різниці

$$(f(x_i, y_i) - f(x_i, y_i + h))^2 \quad (6)$$

і результати додаються до суми відповідного класу. Кількість пар в класі також збільшується на одиницю. Коли всі можливі пари будуть оброблені для точки  $f(x_i, y_i)$ , програма перейде до наступної точки. В

кінці процесу підсумок діляться на два і на кількість пар, які були вибрані для даного класу.

**IV. Метод Кригінга.** Як показали дослідження [6;8] у випадку застосування методу Кригінга, для трансформації картографічних проєкцій доцільніше працювати з одновимірним випадком, тобто здійснювати опрацювання в широтному та довготному напрямках. Розглянемо детальніше ці питання.

Перетворення прямокутних координат можна представити у вигляді двох функцій:

$$\begin{aligned} B &= F_b(x, y), \\ L &= F_l(x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

За методом Кригінга ці функції можна представити у вигляді зваженої суми значень в опорних точках:

$$\begin{aligned} F_b(x, y) &= \sum_{i=1}^N b_i(x, y) B_i; \\ F_l(x, y) &= \sum_{i=1}^N l_i(x, y) L_i, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $b_i$  та  $l_i$  – вагові коефіцієнти, що вираховуються окремо для кожної точки  $\bar{P} = (x_i, y_i)$ . У традиційній формі запису система рівнянь може бути записана наступним чином.

Перший випадок – без врахування лінійного тренду.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ 1 \\ X_p \\ Y_p \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Тут враховано:

$$\sum b \gamma_{ij} = \sum \gamma_i; \sum b_i = 1; X_p = \sum b \cdot x_i; Y_p = \sum b \cdot y_i. \quad (10)$$

Другий випадок – з урахування лінійного тренду –  $\mu + x \cdot a_x + a_y$ :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} & 1 & x_1 & y_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} & 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ \mu \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ 1 \\ X_p \\ Y_p \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Для отримання експериментальної варіограми спочатку задаються деяким кроком усереднення  $h$ ,

потім для відстаней  $t_k = \frac{h}{2} + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots$  обчислюються значення  $\tilde{\gamma}(t_k) = \frac{1}{2n_k} \sum_{i,j} (B_i - B_j)^2$ ,

де підсумок ведеться при всіх парах точок  $\bar{P}_i, \bar{P}_j$ , для яких  $kh < |\bar{P}_i - \bar{P}_j| \leq (k+1)h$  – число таких пар.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1,89 & 1,89 & 1,89 & 1,89 & 1 \\ 1,89 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1,89 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1,89 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1,89 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,88 \\ 1,86 \\ 1,86 \\ 1,86 \\ 1,86 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

З розв'язку (12) отримаємо:

$$a_1 = 0,60; a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0,1,$$

тобто

$$\sum_{i=1}^5 a_i = 1.$$

Важливим моментом при застосуванні варіограм є коректний вибір теоретичної варіограми. Відома значна кількість теоретичних варіограмних моделей, поширених на практиці. Обмежимося кількома найбільш широко застосовуваними: сферичній, експоненціальній, гаусівській та логарифмічній. Значні картографічні дослідження, виконані в лабораторії картографії і геоінформатики МДУ ім. М. В. Ломоносова за програмою «Чорне море», показали, що найкращі результати досягаються при використанні логарифмічних теоретичних варіограм. В цьому випадку процедура обчислюваної операції така. Логарифмічна варіограма виглядає наступним чином:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ c \left( \frac{t}{a} \right)^2 \left[ 1 - 2 \log \left( \frac{t}{a} \right) \right], & 0 < t \leq a, \\ c & t > a, \end{cases} \quad (13)$$

Проілюструємо зроблені викладки модельним прикладом. За даними роботи [8; 9; 10], метричне рівняння має вигляд:

де варіограмами є радіус впливу (лаг)  $a$  і поріг  $c$ .

Для перевірки ефективності трансформації картографічних проєкцій за методом Кригінга було виконано наступні дослідження. Була складена комп'ютерна програма «засміченості» через старіння і деформації вихідних зображень. Випадковий шум враховувався шляхом накладання гаусівської кривої нормального розподілу.

Крім цього моделювалися локальні деформації. Опрацьовувалися три рівні зашумленості. Рівень зашумленості оцінювався по відношенню до ідеальної комплексної картографічної сітки. В результаті таких досліджень встановлено, що особливо важливою є попередня фільтрація вихідної картографічної сітки, яка дозволяє підвищити точність в середньому на 45% і дає можливість визначити координати трансформованої картографічної сітки з точністю 0,1мм в масштабі карти.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Лященко А. А. Методологічні основи та інформаційно-технологічні моделі інфраструктури геопросторових даних міських кадастрових систем: Дис. ... д-ра наук: 05.24.04 / Лященко Анатолій Антонович. – 2004.
2. Лурье И. К. Геоинформационное картографирование и информатика: недавнее прошлое и настоящее / И. К. Лурье // Сб. Взаимодействие картографии и информатики. – М.: Научный мир, 2000. – С. 73-84.
3. Соса Р. І. Обґрунтування вибору рівнопроміжної кінчної проєкції для середньо- і дрібномасштабного картографування України / Р. І. Соса, П. П. Король, В. У. Волошин // Вісник геодезії і картографії. – 2014. – № 4 (91). – С. 7-13.
4. Мельник В. М. Основи картографії / В. М. Мельник. – Луцьк: СЛУ ім. Лесі Українки, 2012. – 211 с.
5. Барановський В. Д. Варіаційні методи оптимізації картографічних проєкцій для України та її окремих регіонів / В. Д. Барановський // Вісник геодезії та картографії. – 2006. – № 3. – С. 13-18.
6. Світличний О. О. Основи геоінформатики / О. О. Світличний, С. В. Плотницький // Суми: Університетська книга, 2008. – 293 с.
7. Бурштинська Х. В. Теоретичні та методологічні основи цифрового моделювання рельєфу за фотограмметричними та картометричними даними: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.24.02 / Христина Василівна Бурштинська. – Львів: Б.в., 2003. – 36 с.
8. Армстронг М. Основы линейной геостатики / М. Армстронг / Пер. Р. М. Фомкина. – Фонта-небло, 1998. – 149 с.
9. Щеглов В. М. Математические методы и автоматизированные системы в геологии. Практические методы Кригінга / В. М. Щеглов. – М.: ВИЭМС, 1989. – 50 с.
10. Аляутдинов А. Р. Электронный атлас картографических проєкций / А. Р. Аляутдинов, Б. Б. Серапинас // Сб. Взаимодействие картографии и геоинформатики. – М.: Научный мир, 2000. – С. 112-117.
11. Мельник В. М. До вибору картографічних проєкцій транскордонних екологічних ситуацій / В. М. Мельник, В. Л. Расюн, Н. В. Лавренчук // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Геодезія, картографія і аерофотознімання» – Львів: Вид-во Львівської політехніки. – Вип. 81, 2015. – С. 58-67.

#### REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED

1. Liashchenko A. A. Metodolohichni osnovy ta informatsiino-tehnolohichni modeli infrastruktury heoprosorovykh danykh miskykh kadastrykh system: Dys. ... d-ra nauk: 05.24.04 [Methodological bases and information technology infrastructure of geospatial data model of urban cadastral system: Dis. ... Dr. sciences: 05.24.04] / Liashchenko Anatolii Antonovych. – 2004.
2. Lur'e I. K. Geoinformacionnoe kartografirovaniye i informatika: nedavnee proshloe i nastoyashchee [GIS mapping and computer science: recent past and the present] / I. K. Lur'e // Sb. Vzaimodejstvie kartografii i informatiki. – M.: Nauchnyj mir, 2000. – S. 73-84.
3. Sosa R. I. Obruntuvannya vyboru rivnopromizhnoi konichnoi proektsii dlia seredno- i dribnomasshtabnoho kartohrafuvannya Ukrainy [Justification of the choice of rivnopromizhnoyi conical projection for medium and small-scale mapping Ukraine] / R. I. Sosa, P. P. Korol, V. U. Voloshyn // Visnyk heodezii i kartografii. – 2014. – № 4 (91). – S. 7-13.
4. Melnyk V. M. Osnovy kartografii [Fundamentals of cartography] / V. M. Melnyk. – Lutsk: SNU im. Lesi Ukrainky, 2012. – 211 s.
5. Baranovskyi V. D. Variatsiini metody optymizatsii kartohrafichnykh proektsii dlia Ukrainy ta yii okremykh rehioniv [Variational methods of optimization map projections for Ukraine and its separate regions] / V. D. Baranovskyi // Visnyk heodezii ta kartografii. – 2006. – № 3. – S. 13-18.
6. Svitlychnyi O. O. Osnovy heoinformatyky [Basics of Geoinformatics] / O. O. Svitlychnyi, S. V. Plotnytskyi // Sumy: Universytetska knyha, 2008. – 293 s.
7. Burshtynska Kh. V. Teoretychni ta metodolohichni osnovy tsyfrovoho modeliuvannya reliefu za fotogrammetrychnymy ta kartometrychnymy danymy: avtoref. dys. ... d-ra tekhn. nauk: 05.24.02 [Theoretical and methodological foundations for digital terrain modeling and photogrammetric data kartometrychnymy: Author. Dis. ... Dr. Sc. Sciences: 05.24.02] / Khrystyna Vasylivna Burshtynska. – Lviv: B.v., 2003. – 36 s.
8. Armstrong M. Osnovy linejnoy geostatiki [Fundamentals of linear geostatic] / M. Armstrong / Per. R. M. Fomkina. – Fonta-neblo, 1998. – 149 s.
9. Shcheglov V. M. Matematicheskie metody i avtomatizirovannyye sistemy v geologii. Prakticheskie metody Kriginga [Mathematical methods and automated systems in geology. Practical methods of Kriging] / V. M. Shcheglov. – M.: VIEHMS, 1989. – 50 s.
10. Alyautdinov A. R. Elektronnyj atlas kartograficheskikh proekcij [Electronic atlas map projections] / A. R. Alyautdinov, B. B. Serapinas // Sb. Vzaimodejstvie kartografii i geoinformatiki. – M.: Nauchnyj mir, 2000. – S. 112-117.
11. Melnyk V. M. Do vyboru kartohrafichnykh proektsii transkordonnykh ekolohichnykh sytuatsii [The choice of map projections transboundary environmental emergencies] / V. M. Melnyk, V. L. Rasiun, N. V. Lavrenchuk // Mizhvidomchyi naukovy-tekhnichniy zbirnyk «Heodeziia, kartohrafiia i aerofotoznimannia» –Lviv: Vyd-vo Lvivskoi politekhniki. –Vyp. 81, 2015. – S.58-67.

#### The transformation of map projections by Kryhinh's method

Melnyk V., Rasiun V., Muliar N.

**Abstract.** The article deals with the analysis of two methods of map projections in GIS. The algebraic and Kryhinh's method are considered. The first method is simple in execution, but requires an iterative approach that results in loss of precision. However Kryhinh's method, which is relatively new - is more reliable and correct. Experimental studies confirming the sufficient high accuracy.

**Keywords:** Cartographic projection, algebraic polynomial, smoothing, transformation, kriging.

#### Трансформация картографических проекций по методу Кригинга

В. Мельник, В. Расюн, Н. Муляр

**Аннотация.** В статье проанализированы два метода трансформации картографических проекций в ГИС. Рассмотрены алгебраический и метод Кригинга. Первый метод прост в исполнении, однако требует итерационного подхода, что приводит к потере точности. В то же время метод Кригинга, который является сравнительно новым - более надежный и корректный. Экспериментальные исследования подтверждают его достаточно высокую точность.

**Ключевые слова:** картографическая проекция, алгебраический полином, сглаживание, трансформации, Кригинг.