Вплив податливості до зсуву та стиснення на деформативність рівномірно нагрітої композитної пластини-смуги

М.В. Марчук[1,2], В.С. Пакош[1]

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів, Україна
[2] Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, Україна

Paper received 04.12.15; Accepted for publication 12.12.15.

Анотація. Запропоновані співвідношення уточненої теорії термопружності податливих до трансверсальних зсуву та стиснення пластин-смуг. У випадку рівномірного нагріву за шарнірного закріплення на торцях нижньої лицевої площини знайдено аналітичний розв'язок. Проаналізовано вплив параметрів податливості до зсуву та стиснення на деформативність.

Ключові слова: *композитна пластина-смуга, термопружність, податливість до зсуву та стиснення, деформативність*

Вступ. Композитні елементи пластинчастого типу є досить поширеними навантаженими складовими відповідальних конструкцій різноманітного цільового призначення, котрі піддаються впливу інтенсивних температурних полів [7]. Це зумовлено їхніми високими питомими міцнісними характеристиками та нижчою в порівнянні з традиційними матеріалами матеріалоємністю. Для оцінки надійності вказаних елементів експлуатаційних умовах поряд з розрахунком на дію силових факторів необхідно також оцінювати їхню реакцію на вплив температурних напружень.

Аналіз досліджень по темі. Для випадку традиційних ізотропних матеріалів термопружний стан вказаних об'єктів детально досліджений на основі класичної теорії пластин [5, 6, 9]. Ефекти впливу врахування податливості до трансверсального зсуву вивчені на основі узагальненої теорії в працях [2, 3]. Однак, елементи конструкцій із сучасних армованих композиційних матеріалів на полімерній основі, окрім вказаної властивості, мають значну податливість також до трансверсального стиснення [1, 8]. Для визначення впливу на термопружний стан вказаного фактора необхідно використовувати дво- або тривимірні співвідношення термопружності, що не завжди дає змогу отримати точний або коректний числовий розв'язок, або ж теорії вищих порядків [10, 11].

Мета дослідження. На основі двовимірних співвідношень термопружності отримані рівняння уточненої теорії пластин-смуг, що дають можливість врахувати вплив податливості до трансверсальних деформацій як зсуву, так і стиснення.

Виклад основного матеріалу дослідження.

1. Формулювання задачі. Розглянемо трансферсальний ортотропний пружний шар товщини $2h$, який віднесено до ортогональної системи координат x_i, $i = 1, 2, 3$ з початком у центрі перерізу $x_2 = 0$. Вважаємо, що цей шар має значно більший розмір уздовж осі x_2 проти довжини перерізу $x_2 = 0$ серединної площини $x_3 = 0$. Тоді, якщо умови закріплення торців шару $x_1 = \pm l$ та умови навантаження не залежать від координати x_2, то через незначний вплив умов закріплення країв $x_2 = \pm b$ функції, які визначають термопружний стан залежать лише від координат x_1, x_3. Співвідношенням Дюамеля-Неймана [5] надамо вигляду

$$e_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu'}{E'}\sigma_3 + \alpha_T T\ ;$$
$$0 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 + \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu'}{E'}\sigma_3 + \alpha_T T\ ;$$
$$e_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{E'}\sigma_3 + \alpha'_T T\ .$$

Звідси записуємо вирази для σ_1 і σ_3, необхідні для подальших викладок:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu-2\nu\nu'}\left[\frac{1-\nu\nu'}{1+\nu}e_1 + \nu' e_3 - (\alpha_T + \nu'\alpha'_T)T\right],$$
$$\sigma_3 = E_0\,[\,e_3 + \lambda e_1 - (2\lambda\alpha_T + \alpha'_T)T\,]\ ,$$

де $E_0 = E'(1-\nu)/\delta^2$, $\delta^2 = 1-\nu-2(\nu')^2(E/E')$, $\lambda = \nu'(E/E')/(1-\nu)$; E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантній їй площинах; E', ν' – ті ж величини у перпендикулярних до серединної площинах; α_T і α'_T – коефіцієнти лінійного температурного розширення в напрямках x_1 та x_3 відповідно.

Розвинення компонент вектора переміщення, тензорів деформацій та напружень при одночасному задоволенні однорідних крайових умов у напруженнях на лицевих площинах [4] з використанням (1) дає змогу отримати співвідношення уточненої термопружності податливих до трансверсальних зсуву та стиснення пластин-смуг, що містять

– рівняння рівноваги:

$$N' = 0\ ,\quad M' - Q_0 = 0\ ,\quad Q'_0 = 0\ ,\quad Q'_1 - 6\sigma_3^0 = 0\ ;$$

– співвідношення термопружності:

$$N = \overline{B}(e_1^0 + \lambda e_3^0) - N_T\ ,\quad M = \overline{D}\overline{e}_1^1 - M_T\ ,$$
$$Q_0 = \Lambda\cdot 2e_{13}^0\ ,\quad Q_1 = \frac{3}{4}\Lambda\cdot 2e_{13}^1\ ,$$
$$\sigma_3^0 = \frac{5}{6}E_0\,[\,e_3^0 + \lambda e_1^0 - (2\lambda\alpha_T + \alpha'_T)T_0\ ;$$

– деформаційні співвідношеннями:

$$e_1^0 = u'\ ,\ \overline{e}_1^1 = \gamma'\ ,\ 2e_{13}^0 = \gamma + w'\ ,\ 2e_{13}^1 = w'_1\ ,\ e_3^0 = w'_1/h\ .$$

У рівностях (2) – (4) вжиті загальноприйняті позначення для розтягувального N, перерізувального Q_0 та стискувального Q_1 зусиль і згинного моменту M; компонент тензора напружень σ_{ij}, переміщень u точок серединної площини в тангенціальному напрямку x_1, кута повороту γ нормального до серединної площини елемента перед деформуванням; переміщення w

точок серединної площини вздовж нормальної координати x_3, переміщення w_1 точок лицевих площин вздовж нормальної координати, поздовжньої e_1^0 та згинної $\bar{e}_1^1$ деформацій, трансверсальних деформацій зсуву e_{13}^0 і стиснення e_{13}^1 та e_3^0, а також для введених жорсткісних характеристик: $\overline{B} = 2Eh(1+\alpha)/(1-\nu^2)$ – узагальненої жорсткості на розтяг, $\overline{D} = h^2\overline{B}/3$ – узагальненої згинної жорсткості, $\Lambda = 2k'hG'$ – зсувної жорсткості, $\alpha = (1+\nu)(\nu')^2(E/E')/\delta^2$, G' – трансверсального модуля зсуву; температурних розтягувального зусилля $N_T = \overline{B}\beta_T T_0$ і згинного моменту $M_T = \overline{D}\beta_T T_1/h$, $T = T_0(x_1) + T_1(x_1)(x_3/h)$ – температурного поля в пластині-смузі, $\beta_T = \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T$, $k' = 14/15$.

Крайові умови при $x = \pm l$ за шарнірного закріплення пластини на нижніх ребрах торців мають вигляд

$$N(\pm l) = 0,\ u(\pm l) \pm h\gamma(\pm l) = 0,$$
$$w(\pm l) - w_1(\pm l) = 0,\ Q_1(\pm l) = 0. \quad (5)$$

Рівняння (2) разом із співвідношеннями (3) та (4) і крайовими умовами (5) описують термопружний стан пластини-смуги, викликаний температурним полем T, і явно враховують податливість до трансверсальних зсуву та стиснення.

2. Відшукання розв'язку задачі. Розглянемо випадок рівномірного нагріву пластини-смуги, тобто, коли $T_0 = const$, а $T_1 = 0$. У цьому випадку система розв'язувальних рівнянь після почергової підстановки (4) в (3) і результату в (2) набуде вигляду при $\nu = \nu'$, $\alpha_T = \alpha_T'$, $E = E'$:

$$u' + \lambda w_1/h = C_1/\overline{B} + \beta_t T_0, \quad (6)$$
$$w'' - \frac{20}{3}\frac{E_0}{\Lambda}(w_1/h + \lambda u' - \beta_t T_0) = 0, \quad (7)$$
$$\gamma'' - \kappa^2(\gamma + w') = 0, \quad \kappa^2 = \Lambda/\overline{D}, \quad (8)$$
$$\gamma' + w'' = 0, \quad (9)$$

де константу C_1 слід визначати з крайових умов.

З рівнянь (6) – (9) при $w_1 \equiv 0$ отримуємо випадок застосування теорії на основі зсувної моделі С.П. Тимошенка [8]. Всі характеристики термопружного деформування тоді визначаються через функцію прогину серединної площини $w(x)$, для якої маємо вираз

$$w = \frac{\alpha_T(1+\nu)T_0}{2h}(l^2 - x^2). \quad (10)$$

Очевидно, що при $T > 0$ будемо мати вигнуту в напрямку осі x_3 пластину, а при $T < 0$ – ввігнуту.

Оскільки температурне навантаження T_0 не входить у співвідношення термопружності для зсувних складових, то ідентичний результат отримаємо також для випадку застосування класичної теорії пластин.

За явного врахування стиснення функція w_1, що характеризує зміну довжини нормального елемента, і тангенціальне переміщення u задовольняють систему рівнянь (6) – (7), а для прогину серединної площини w та кута повороту нормалі γ маємо формули

$$w = a_1 + a_2 x^2,\ (11)$$
$$\gamma = -w',\ (12)$$

де сталі a_1 і a_2 визначаємо з другої та третьої рівностей в умовах (5).

Для визначення функції w_1 із системи (6) – (7) маємо рівняння

$$w_1'' - \frac{k^2}{h^2}w_1 = -\frac{k^2}{h}(1-\nu)\beta_T T_0, \qquad k^2 = \frac{10}{3}\frac{B}{\Lambda},$$

розв'язок якого має вигляд

$$w_1 = C_3 sh(kx/h) + C_4 ch(kx/h) + h(1-\nu)\beta_T T_0.$$

З умови симетрії $w_1(-x) = w_1(x)$ та четвертої рівності в (5) маємо $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

Для тангенціального переміщення u точок серединної площини з (6) отримуємо

$$u = \alpha_T(1+\nu)T_0\, x.\ (13)$$

З урахуванням (12) з другої рівності в (5) знаходимо коефіцієнт a_2 для виразу (11)

$$a_2 = -\alpha_T(1+\nu)T_0/2h\ (14)$$

Тоді третя рівність в (5) набере вигляду

$$a_1 - \frac{\alpha_T(1+\nu)T_0}{2h}l^2 - h\alpha_T(1+\nu)T_0 = 0,$$

звідки

$$a_1 = \alpha_T(1+\nu)T_0(h + l^2/2h).$$

Таким чином, функція прогину серединної площини при врахуванні податливості до стиснення набере вигляду

$$w = \frac{\alpha_T(1+\nu)T_0}{2h}\left(\frac{h^2}{2} + l^2 - x^2\right)$$

Результати та їх аналіз. Деформативність пластини-смуги (максимальний прогин серединної площини) без врахування податливості до стиснення (класична та зсувна теорії пластин) визначаємо з (10)

$$w_{(1)} = \frac{\alpha_T(1+\nu)T_0}{2h}\ l^2,$$

а з урахуванням – з (16)

$$w_{(2)} = \frac{\alpha_T(1+\nu)T_0}{2h}\left(\frac{h^2}{2} + l^2\right).$$

Ввівши позначення $\eta = w_{(2)}/w_{(1)}$ з (17) – (18) отримаємо

$$\eta = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad (19)$$

де $\varepsilon = h/l$ – параметр тонкостінності.

Висновки. Урахування податливості до стиснення ізотропного матеріалу пластини-смуги спричиняє незначне підвищення деформативності (тобто, пониження жорсткості), оскільки $\eta > 1$ завжди (згідно з (19)). У подальшому такі дослідження необхідно провести для загального випадку трансверсальної ортотропії термопружних характеристик матеріалу та різних крайових умов на видовжених торцях.

ЛІТЕРАТУРА

1. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
2. Максимук О.В., Махніцький Р.М., Щербина Н.М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: Національна академія наук України. ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2005. – 396 с.
3. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
4. Пелех Б.Л., Марчук М.В. Обобщенная нелинейная теория термоупругих оболочек с учетом трансверсальных деформаций // Температурные задачи и устойчивость пластин и оболочек. Межвузовский науч. сб. – Саратов: Изд-во СГУ, 1988. – С. 6-8.
5. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
6. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – Киев : Наук. думка, 1976. – 310 с.
7. Прочность ракетных конструкций / Под ред. В.И. Моссаковского. – М.: Высшая школа, 1990.
8. Christensen, R.M. Mechanics of composite materials. – New York: J. Wiley & Sons, 1979. – 348 p.
9. Encyclopedia of Thermal Stresses / Hetnarski, R.B. (ed.). – Springer, 2014. – Vol. 1 – Vol. 11.
10. Youssef, H.M. and El-Bary, A.A. Generalized Thermoelastic Infinite Layer Subjected to Ramp-Type Thermal and Mechanical Loading under Three Theories – State Space Approach // Journal of Thermal Stresses, Vol. 32, No. 12, 2009, pp. 1293-1310. DOI:10.1080/01495730903249276.
11. Dimitrienko, Yu.I., Yakovlev, D.O. The Asymptotic Theory of Thermoelasticity of Multilayer Composite Plates // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal. – Vol. 6, Issue 1, 2015, P. 13-51. DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.V6.I1.20.

REFERENCES

1. Composite Materials: Handbook / Vasilyev, V.V., Protasov, V.D., Bolotin, V.V., etc.; Vasilyev, V.V. and Tarnopolsky, Yu.M. (ed.). – M.: Mechanical Engineering, 1990 – 512 p.
2. Maksymuk, O.V., Mahnitskyy, R.M., Shcherbyna, N.M. Mathematical Modeling and Calculation Methods of Thin-Walled Composite Structures. – Lviv: National Academy of Sciences of Ukraine. Pidstryhach IAPMM, 2005. – 396 p.
3. Pelekh, B.L. Theory of Shells with Finite Shear Stiffness. – Kiev: Nauk. dumka, 1973. – 248 p.
4. Pelekh, B.L., Marchuk M.V. Generalized Nonlinear Theory of Thermo-Elastic Shells taking into account the Transversal Deformations // Temperature Problem and the Stability of Plates and Shells. Interuniv. Sci. Comp. – Saratov: Saratov State University Publishing House, 1988. – C. 6-8.
5. Podstrigach, Ya.S., Shvets, R.N. Thermoelasticity of Thin Shells. – K .: Nauk. dumka, 1978. – 344 p.
6. Podstrigach, Y.S., Kolyano, Yu.M. Generalized Thermomechanics. – Kiev: Nauk. dumka, 1976. – 310 p.
7. Strength of Rocket Constructions / Mossakovskii, V.I. (ed.). – M.: Higher School, 1990.
8. Christensen, R.M. Mechanics of composite materials. – New York: J. Wiley & Sons, 1979. – 348 p.
9. Encyclopedia of Thermal Stresses / Hetnarski, R.B. (ed.). – Springer, 2014. – Vol. 1 – Vol. 11.
10. Youssef, H.M. and El-Bary, A.A. Generalized Thermoelastic Infinite Layer Subjected to Ramp-Type Thermal and Mechanical Loading under Three Theories – State Space Approach // Journal of Thermal Stresses, Vol. 32, No. 12, 2009, pp. 1293-1310. DOI:10.1080/01495730903249276.
11. Dimitrienko, Yu.I., Yakovlev, D.O. The Asymptotic Theory of Thermoelasticity of Multilayer Composite Plates // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal. – Vol. 6, Issue 1, 2015, P. 13-51. DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.V6.I1.20.

The influence pliability to shear and compression on the deformability uniformly heated of composite plate-strip

M.V. Marchuk, V.S. Pakosh

Abstract. The relations of the refined theory of thermoelasticity for the plates-strips pliable to transversal shear and compression are obtained. In the case of uniform heating at hinge fixing on the end faces of lower facial plane the analytical solution is found. The influence of parameters pliability to shear and compression on deformability is analyzed.

Keywords: *composite plate-strip, thermoelasticity, pliability to shear and compression, deformability*