MATHEMATICS

Теореми про стійкість для систем випадкової структури зі скінченною післядією

І. В. Юрченко, В. К. Ясинський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Paper received 01.12.16; Accepted for publication 10.12.16.

Анотація. У роботі встановлено, що для систем випадкової структури з післядією, які мають ту чи іншу ймовірнісну стійкість, існують функціонали Ляпунова-Красовського з визначеними властивостями.

Ключові слова: *системи випадкової структури, післядія, стійкість, функціонали Ляпунова-Красовського.*

Вступ. Основними працями зі стійкості та оптимальної стабілізації для детермінованих систем звичайних диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь з післядією є [1-3]. Можливість урахування в диференціальних рівняннях імпульсних збурень систематично викладена в монографії [4], а також ця ситуація предметно вивчена не тільки для диференціальних рівнянь, а й для різницевих рівнянь у монографії [5]. Вплив марковських збурень на стійкість динамічних систем можна знайти в наступних роботах і наведеній в них цитованій літературі [6-15]. Метод функцій Ляпунова в задачах стійкості та стабілізації систем випадкової структури описується в роботі [11].

У даній роботі розглянуто та розв'язано задачу про поведінку динамічної системи при наявності марковських збурень (параметрів), яка володіє властивістю асимптотичної стійкості за ймовірністю в цілому, а для лінійних систем – властивістю експоненціальної стійкості в середньому квадратичному.

Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, P, F\ )$, $F\ \equiv \{F_t \subset F, t \ge 0\}$, задана система випадкової структури з післядією (СВСП) за допомогою стохастичного диференціально-функціонального рівняння вигляду

$$dx(t) = a(t, x_t, \xi(t)) + b(t, x_t, \xi(t))dw(t) \quad (1.1)$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi_0(t,\omega), \quad t_0 - \tau \le t \le t_0, \quad \xi(t_0) = y_0 \in Y, \quad (1.2)$$

де $x(t) \equiv x(t,\omega) \in R^n$, $x_t \equiv \{x(t+\theta), -\tau \le \theta \le 0\} \in \mathbf{D}([-\tau,0])$, де $\mathbf{D}([-\tau,0])$ – простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі, функціонали $a: R_+ \times \mathbf{D}([-\tau,0]) \times Y \to R^m$; $b: R_+ \times \mathbf{D}([-\tau,0]) \times Y \to R^m$; $w(t) \equiv w(t,\omega)$ – стандартний вінерів процес [17]; $\xi(t)$ – простий марковський ланцюг зі скінченним числом станів $\xi(t) \equiv \xi(t,\omega) \in Y \equiv \{y_1, y_2, ..., y_k\}$, який задано ймовірностями переходу для $\forall t \ge s \ge 0$ [11]:

$$P\{\xi(t+\Delta t) = y_j \mid y(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad (1.3)$$

$$P\{y(s) \equiv y_i, t \le s \le t + \Delta t \mid y(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t). \quad (1.4)$$

Розглянемо випадок, коли в момент $s > 0$ зміни структури системи (1.1), (1.2) відбувається випадкова стрибкоподібна зміна фазового вектора $x(s-0) = x$, $x(s) = z$, для якого задана умовна щільність $p_{ij}(\tau, z/x)$, тобто

$$P\{x(s) \in [z, z+dz) \mid x(s-0) = x\} = p_{ij}(s, z/x)dz + o(dz). \quad (1.5)$$

Припустимо, що функціонали a і b задовольняють у довільній скінченній області $\| x_t \| < H$, $\| x_t \| \equiv \sup\limits_{-\tau \le \theta \le 0} |x(t+\theta)|$, умову Ліпшиця для довільних $\varphi, \psi \in C([-\tau,0])$

$$|a(t,\varphi,y) - a(t,\psi,y)| + |b(t,\varphi,y) - b(t,\psi,y)| \le L \|\varphi - \psi\|, \quad (1.6)$$

$$|a(t,\varphi,y)| + |b(t,\varphi,y)| \le L(1 + \|\varphi\|), \quad (1.7)$$

при всіх $y \in Y$, $t \in J \equiv \{t \mid t \ge t_0 \ge 0\}$, де $\|\varphi\| \equiv \sup\limits_{-\tau \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$, стала L залежить тільки від розмірів області H. Якщо $w(t) \equiv w(t,\omega)$, $\forall t \ge t_0 \ge 0$, не залежить від початкового випадкового вектора $\varphi_0(t,\omega)$, причому $E|\varphi_0(t,\omega)|^2 < \infty$, виконуються умови (1.6), (1.7), тоді існує сильний розв'язок СВСП (1.1)–(1.2) $x(t) \equiv x(t,\omega)$. Зауважимо, що простір Скорохода $\mathbf{D}([-\tau,0])$ з нормою $\| x_t \| \equiv \sup\limits_{-\tau \le \theta \le 0} |x(t+\theta)|$ є неповним, тому всі нижчевикладені співвідношення справджуються в розширеному просторі $\overset{\sqcup}{\mathbf{D}}([-\tau,0])$, який містить всі границі відповідних послідовностей. Припускається також, що траєкторії процесу можна продовжувати при всіх $t \ge t_0 \ge 0$. Для рівнянь (1.1) з $\tau = 0$, $b \equiv 0$, тобто

$$dx(t) = a(t, x(t), \xi(t))dt, \quad (1.8)$$

з неперервними фазовими траєкторіями проблема оборотності була розв'язана у праці [14]. У цій статті розглядаються питання про існування функціоналів Ляпунова-Красовського для систем зі скінченною післядією.

Будемо, не втрачаючи загальності, досліджувати на стійкість тривіальний розв'язок СВСП (1.1), (1.2), тобто вимагатимемо, щоб

$$a(t,0,y)=b(t,0,y)=0, \quad \forall t \ge t_0 \ge 0, \quad y \in Y. \quad (1.9)$$

Означення 1.1. *Розв'язок* $x(t)=0$ *системи (1.1), (1.2) назвемо асимптотично стійким за ймовірністю в цілому, якщо для довільної обмеженої області* $\|\varphi_0\| \le H_0$ *і чисел* $\gamma>0$, $p>0$, $q>0$ *існує обмежена область* $\|x_t\| < H_1$ *і число* $T(H_0,\gamma,q)>0$ *такі, що*

$$P\{[\sup \|x_t\| \,|\, t \ge t_0] < H_1|_{x_0,y_0}\} > 1-p, \quad (1.10)$$

$$P\{[\sup \|x_t\| \,|\, t \ge t_0+T] < \gamma|_{x_0,y_0}\} > 1-q-p, \quad (1.11)$$

Означення 1.2. *Розв'язок* $x(t)\equiv 0$ *СВСП (1.1), (1.2) є асимптотично стійкий за ймовірністю в цілому рівномірно за часом* $t_0 \ge 0$ *і початковими даними з області*

$$\|x_{t_0}\| \equiv \|\varphi_0\| \le H_0; \quad y_0 \in Y, \quad t_0 \ge 0, \quad (1.12)$$

якщо він задовольняє всі умови означення 1.1, при цьому сталу $T(q,\gamma)$ *можна вибрати такою, що не залежить від початкових даних (1.12).*

Означення 1.3. *Тривіальний розв'язок* $x(t)\equiv 0$ *системи (1.1), (1.2) назвемо* $p(H)$*-асимптотично стійким за ймовірністю в цілому, рівномірним за початковими даними (1.12), якщо*

$$P\{[\sup \|x_t\| \,|\, t \ge t_0] < H \,|\, x_0, y_0\} > 1-p(H), \quad (1.13)$$

де $p(H)$ *– стала, яка оцінює ймовірність того, що розв'язок* $x(t)$ *виходить з області* $\|x_t\| < H$.

Умови асимптотичної стійкості за ймовірністю в цілому рівномірно відносно початкових даних

Диференціально-функціональне рівняння випадкової структури (1.1), ймовірнісні характеристики процесу $\xi(t)\in R^m$, $t \ge t_0 \ge 0$, (1.3), (1.4), умова (1.5) стрибка фазового вектора $x(t)\equiv x(t,\omega)\in R^m$ у моменти стрибкоподібної зміни структури системи визначають марковський процес $\{x_t, y_t\}$ з неперервними справа реалізаціями.

Розглянемо функціонал $v(t,y,\varphi)$, $\varphi \in \mathbf{D}([-\tau,0])$, який володіє такими властивостями:

i) v – додатно визначений в області $G\times Y$, якщо для $\forall r>\varepsilon>0$ можна вказати таке число $\delta>0$, що $v(t,y,\varphi)\ge\delta$ при $t \ge t_0$, $(y,\varphi)\in\{G\cap\{\varepsilon \le \|\varphi\| \le r\}\times Y\}$;

ii) допускає нескінченно малу вищу границю $\sup\limits_{\substack{y\in Y, t\in R_+ \\ \|\varphi\|\le r}} v(t,y,\varphi)\equiv \underline{v}(r)\to 0$ при $r\to 0$;

iii) допускає нескінченно велику нижню границю $\inf\limits_{\substack{y\in Y, t\in R_+ \\ \|\varphi\|\ge r}} v(t,y,\varphi)\equiv \overline{v}(r)\to \infty$ при $r\to\infty$;

iv) існує $E\{v(t,\xi(t),x_t)\,|\,x_s=\varphi, y(s)=y\}$;

v) існує інфінітезимальний оператор від v в силу (1.1)–(1.2)

$$\lim_{t\to s+0}\frac{E\{v(t,\xi(t),x_t)-v(s,y,\varphi)\}}{t}\equiv (Lv)(s,y,\varphi). \quad (2.1)$$

Зауваження 2.1. Якщо існує

$$\lim_{t\to s+0}\frac{1}{t}E\{v(t,\xi(t),x_t)\}=h(s,y,\varphi), \quad (2.2)$$

тоді має місце формула Динкіна

$$E\{v(t,\xi(t),x_t)\,|\,x_s=\varphi,\xi(s)=y\}=v(s,y,\varphi)$$

$$+\int_s^t E\{(Lv)(u,\xi(u),x_u)\,|\,x_s=\varphi,\xi(s)=y\}du. \quad (2.3)$$

Ця формула є стохастичним аналогом класичної формули Ньютона-Лейбніца $F(t,x(t))=F(s,x(s))+\int_s^t dF(u,x(u))$. Зауважимо, що формула (1.7) справедлива також для марковських моментів часу $\tau(\omega)$ [23, 24], якщо $E\tau(\omega)<\infty$. Нехай τ_U – момент першого виходу процесу з множини $U\equiv Q\times Y$ (Q – відкрита обмежена множина простору $\mathbf{D}(R^m,[-\tau,0])$, Y – відкрита обмежена множина простору $Y([-\tau,0])$). Тоді $\tau_U\equiv\min\{t,\tau_U\}$ – марковський процес. Якщо $\{x_s,\xi_s\}\in U$, то справедливою є формула Динкіна

$$E\{v(\tau_U(t),\xi(\tau_U(t)),x_{\tau_U(t)})\,|\,x_s\equiv\varphi,\xi(s)=y\}=$$

$$=v(s,y,\varphi)+E\{\int_s^{\tau_U(t)}(Lv)(u,\xi(u),x_u)du\,|\,x_s=\varphi,\xi(s)=y\}. \quad (2.4)$$

При цьому процес $\{x_{\tau_U(t)}, y_{\tau_U(t)}\}$ також буде строго марковським, а інфінітезимальний оператор буде обчислюватися за однією з формул [17].

$L1$) Якщо виконуються умови (1.3)–(1.4) стану системи (1.1), (1.2) випадкової структури, тоді

$$(Lv)(s,y,\varphi)=\frac{\partial v}{\partial s}+(\nabla v(s,y,\varphi),a(s,y_i,\varphi))$$

$$+\frac{1}{2}sp(\nabla^2 v(s,y_i,\varphi)b(s,y_i,\varphi),b'(s,y_i,\varphi))+$$

$$+\sum_{j\ne i}^{k}[\int v(s,y_j,z)p_{ij}(s,z/\varphi)dz-v(s,y_i,\varphi)]q_{ij}, \quad (2.5)$$

де $\nabla v\equiv(\frac{\partial v}{\partial x_1},...,\frac{\partial v}{\partial x_n})'$, $\nabla^2 v\equiv\{\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\}_{i,j=\overline{1,m}}$, "'" – знак транспонування, sp – слід матриці.

Зокрема, коли в моменти зміни структури $y_i\to y_j$ фазовий вектор змінюється неперервно $x(\tau-0)=x(\tau)=x$, формула (2.5) спрощується, а саме,

$$(Lv)(s,y,\varphi)=\frac{\partial v}{\partial s}+(\nabla v,a)+\frac{1}{2}sp(\nabla^2 vb,b')+$$

$$\sum_{j\ne i}^{k}[v(s,y_j,\varphi)-v(s,y_i,\varphi)]q_{ij}. \quad (2.6)$$

Теорема 2.1 [17]. *Нехай для системи випадкової структури (1.1), (1.2) виконуються умови (1.7), (1.8), i) – v). Тоді тривіальний розв'язок* $x(t)\equiv 0$ *буде* *асимптотично стійкий за ймовірністю в цілому рівномірно відносно початкових даних з довільної скінченної області (1.12).*

3. Існування функціонала Ляпунова-Красовського для систем випадкової структури зі скінченною післядією

Викладені у § 2 результати дають можливість стверджувати, що питання про існування функціоналу Ляпунова-Красовського (див. вимоги i)–iii)) можна висувати тільки у припущенні про справедливість рівномірної асимптотичної стійкості за ймовірністю нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи випадкової структури (1.1), (1.2). Справджуються такі допоміжні твердження [17].

Лема 3.1. *Нехай для системи (1.1)–(1.5) виконуються умови:*

1) умовна щільність розподілу стрибків фазового вектора $p_{ij}(\tau, z/x)$ неперервна за τ і має компактний носій, для якого

$$h_1 \| x_t \| \le \| z_t \| \le h_2 \| x_t \|, \quad 0 < h_1 < h_2;$$

$$p_{ij}(\tau, z/0) = \delta(z); \ (3.1)$$

2) функціонали a і b задовольняють умову Ліпшиця (1.6).

Тоді існують константи $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ такі, що для $\forall t \ge t_0 \ge 0$

$$E\{\| x_t \|^2 | x_{t_0} = \varphi_0; \xi(t_0) = y_0\} \le \| \varphi_0 \|^2 e^{L_2(t-t_0)}, \ (3.2)$$

$$E\{\| x_t \|^2 | x_{t_0} = \varphi_0; \xi(t_0) = y_0\} \ge \| \varphi_0 \|^2 e^{-L_1(t-t_0)}. \ (3.3)$$

Лема 3.2 [17]. *Нехай тривіальний розв'язок* $x(t) \equiv 0$ *системи (1.1)–(1.5) рівномірно асимптотично стійкий в цілому. Тоді для довільної області* $\Gamma \equiv \{x_t \in C([-\tau, 0]) : a \le \| x_t \| \le b\}$ *справедливе існування невласного інтеграла* $\int_{t_0}^{\infty} P\{x_t \in \Gamma\} dt < \infty.$

Теорема 3.1 (обернена теорема Ляпунова для системи (1.1)–(1.5)) [17]. *Нехай нульовий розв'язок* $x(t) \equiv 0$ *системи випадкової структури зі скінченною післядією (1.1)–(1.2) асимптотично стійкий за ймовірністю рівномірно відносно початкових даних з області (1.12).*

Тоді в цій області H_0 *існує додатно визначений неперервний функціонал Ляпунова-Красовського* $v : R_+ \times Y \times C([-\tau, 0]) \to R_+$*, що допускає нескінченно малу вищу границю;* $\sup_{y \in Y, t \in R_+, \|\varphi\| \le r} v(t, y, \varphi) \equiv \underline{v}(r) \to 0$ *при* $r \to 0$ *з від'ємно визначеним інфінітезимальним оператором* $(Lv)(t, y, \varphi) < 0.$

Висновки. У роботі встановлено, що для систем випадкової структури з післядією, які мають ту чи іншу ймовірнісну стійкість, існують функціонали Ляпунова-Красовського з визначеними властивостями. Зауважимо, що питання про побудову алгоритмів для вибору функціоналів Ляпунова-Красовського залишається відкритим для конкретних СДФР, що моделюють ситуації реального світу.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Красовский Н.Н., Лидский Э.А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами // Автоматика и телемеханика.–1961.– т 22, №9. – С.1145-1150, №10. –С. 1273-1278, №11. –С. 1425-1431.

[2] Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием.– М.:Наука, 1992.– 336 с.

[3] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.– М.:Наука, 1981.– 448 с.

[4] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 287 с.

[5] Скороход А.В. Стохастические дифференциально-функциональные уравнения и их применение. – К.: Наукова думка, 1982. – 612 с.

[6] Korolyuk V.S., Limnios W. Stochastic systems in merging Phase Space. – London: World Scientific, 2006. – 331 p.

[7] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях от параметров.– М.: Наука, 1969. – 369 с.

[8] Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // ПММ. –1960.– Т.24, вып.5.– С.809-823.

[9] Ясинський В.К., Ясинський Є.В., Юрченко І.В. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури.– Чернівці: Золоті литаври, 2011.– 738 с.

[10] Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально функциональные уравнения.– Рига: Ориентир, 1992.– 328 с.

[11] Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. Устойчивость стохастических импульсных систем.– Рига: РТУ, 1994. – 300 с.

[12] Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной струкутры. – Екатеринбург: Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998.–222с.

[13] Королюк В.С., Юрченко И.В., Ясинский В.К. Асимптотика вектора состояния импульсных диффузионных систем запаздывающего типа с марковскими параметрами // Кибернетика и системный анализ.– 2011.– №4.– С.79–94.

[14] Tsarkov Ye. Averaging in Dynamical Systems with Markov Jumps.– Bremen: Univ. of Bremen, Inst. of Dynamical Syst., 1993.– № 182, April.– 41 p.

[15] Mao X**.**, Shaikhet L. Delay-dependent stability criteria for stochastic differential delay equations with Markovian switching // Stability and Control: Theory and Applications. – 2000. – Vol.3, №.2. – P.88-102.

[16] Shaikhet L. Numerical simulation and stability of stochastic systems with Markovian switching // Neural, Parallel and Scientific Computations.– 2002.– Vol.10, №2.– P.199-208.

[17] Ясинський В.К., Юрченко І.В. Проблема оборотності теорем про стійкість для систем випадкової структури зі скінченною післядією // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика: Наук. журнал.– 2009.– № 1–2.– С.153–167.

REFERENCES

[1] N.N. Krasovskii, E.A. Lidsky. Analythical construction of regulators on systems with random properties // Avtomatika i telemechanika.– 1961.– T.22, №9.– P.1145–1150; №10.– P.1273–1278; №11.– P.1425–1431. [On Russian].
[2] E.A. Andreeva, V.B. Kolmanovskii, and L.E. Shaikhet, Control of Systems with Aftereffect [in Russian], Nauka, Moscow (1992).
[3] V.B. Kolmanovskii and V.R. Nosov, Stability and Periodic Conditions of Control Systems with Aftereffect [in Russian], Nauka, Moscow (1981).
[4] A.M. Samojlenko, N.A. Perestjuk Differential equations with impulse influence [in Russian]. – Kyiv: Visha shkola, 1987. – 287 p.
[5] A.V. Skorokhod. Stochastic functional differential equations and their applications [in Russian]. – Kyiv: Naukova dumka, 1982. – 612 p.
[6] Korolyuk V.S., Limnios W. Stochastic systems in merging Phase Space. – London: World Scientific, 2006. – 331 p.
[7] R.Z. Khas'minskii, Stability of Systems of Differential Equations under Random Disturbances of their Parameters [in Russian], Nauka, Moscow (1969).
[8] I., Ya. Kaz, N.N. Krasovskii. On stability of systems with random parameters [in Russian] // Applied mathematics and mechanics. –1960. – Vol.24, Iss.5.– P. 809-823.
[9] V.K. Yasynskyy, Ye.V. Yasynskyy, I.V. Yurchenko. Stabilization in dynamical systems of random structure.– Chernivtsi: Zoloti lytavry, 2011.– 738 p. [On Ukrainian].
[10] E.F. Tsar'kov and V.K. Yasinskyy, Quasilinear Stochastic Functional Differential Equations [in Russian], Riga, Orientir (1992).
[11] M.L. Sverdan and E.F. Tsar'kov, Stability of Stochastic Pulse Systems [in Russian], RTU, Riga (1994).
[12] I.Ya. Kats, The Method of Lyapunov Functions in Problems of Stability and Stabilization of Systems of Random Structure [in Russian], UGAPS, Ekaterinburg (1998).
[13] Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Asymptotic of the state vector of delayed impulsive diffusion systems with Markov parameters // Cybernetics and Systems Analysis.– 2011.– Vol.47, №4.– P.571–586.
[17] V.K. Yasynskyy, I.V. Yurchenko. Reversibility Problem of Stability Theorems for Random Structure Systems with Finite Aftereffect [in Ukrainian] // Applied statistics. Actuarial and Financial mathematics.– 2009.– № 1–2.– P.153–167.

Stability theorems for random structure systems with finite aftereffect

I. V. Yurchenko, V. K. Yasynskyy

Abstract. It is solved the problem of the behavior of dynamic systems with Markov perturbations (parameters), which have properties of asymptotic stability in probability in general, and for linear systems - property of exponential stability in the mean square. It is established the existence of the Lyapunov-Krasovskii functionals for random structure systems with probabilistic stability.

Key words: *random structure systems, aftereffect, stability, Lyapunov-Krasovskii functionals.*

Теоремы об устойчивости для систем случайной структуры с конечным последействием

И. В. Юрченко, В. К. Ясинский

Аннотация. Решена проблема поведения динамических систем с марковскими возмущениями (параметрами), которые имеют свойства асимптотической устойчивости по вероятности в целом, а для линейных систем - свойство экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом. Установлено существование функционалов Ляпунова-Красовского для систем случайной структуры с устойчивостью по вероятности.

Ключевые слова*: системы случайной структуры, последействие, устойчивость, функционалы Ляпунова-Красовского.*