# Місце професійно спрямованих умінь в структурно-логічній схемі пропедевтичного курсу функціонального аналізу

**І.В. Лов'янова, Д.Є. Бобилєв***

Криворізький національний університет, м. Кривий Ріг, Україна
*Corresponding author. E-mail: bob_d@i.ua

Paper received 22.11.15; Accepted for publication 30.11.15.

**Анотація.** В статті виділено професійно спрямовані уміння, які можна формувати під час вивчення елементів функціонального аналізу студентами напряму підготовки 6.040201 Математика* в рамках курсу математичного аналізу. Для кожного з виділених умінь показано місце в структурно-логічній схемі курсу. Проілюстрована методика формування деяких з цих умінь. Показано міждисциплінарний зв'язок функціонального аналізу з методикою навчання математики.

***Ключові слова:*** *професійно спрямовані уміння, структурно-логічна схема курсу, функціональний аналіз*

**Вступ.** В галузевих стандартах підготовки бакалаврів напряму *6.040201 Математика** передбачено вивчення в курсі математичного аналізу модуля «Елементи функціонального аналізу», який можна вважати пропедевтикою курсу «Функціональний аналіз». Мета навчання даному модулю, як вказується в освітньо-професійній програмі для даного напряму підготовки – формування наукового світогляду, одним з елементів якого є розуміння ролі функціонально-аналітичних методів у математиці і точному природознавстві; опанування початками теорії функціональних просторів, лінійних операторів рівнянь; розвиток уміння будувати, досліджувати методами функціонального аналізу моделі з різних областей теоретичної і прикладної математики; створення необхідної математичної основи для подальшого вивчення функціонального аналізу і його застосувань. Але виділені в даній програмі професійно спрямовані уміння, які формуються в процесі вивчення модуля «Елементи функціонального аналізу» в недостатній мірі охоплюють можливі результати навчання. Тому є потреба розширити перелік цих умінь, які формуються в даному модулі.

**Короткий огляд публікацій по темі.** Однією з основних причин існування вказаних недоліків у професійній підготовці вчителів математики є недостатня професійна спрямованість навчання спеціальних математичних дисциплін у педагогічних ВНЗ. Цим і пояснюється значний інтерес науковців до проблеми професійної спрямованості навчання студентів педагогічних вузів спеціальних математичних дисциплін.

Питання навчання спеціальних математичних дисциплін із урахуванням їх професійної спрямованості розглядалося в працях Є.С. Айдарової, В.Е. Гейта, Л.Я. Бондаренко, , Е.К. Брейтігама, М.В. Бородіної, Б.Є. Вейца, Н.Я. Віленкіна, С.С. Дравкіної, К.Г. Керімова, В.А. Тубуєвої С.В. Коржакової, Т.В. Крилової В.І. Левіна, І.В. Лов'янової, Т.С. Максимова, Л.І. Нічуговської, А.Г. Мордковича, О.І. Скафи, З.А. Скопеця, Г.Є. Перевалова, М.В. Потоцького, М.В. Працьовитого, Б.Є. Рабіновича, Г.І. Саранцева, З.І. Слєпкань, Н.А. Тарасенкової, З.Ф. Шибасової і Л.П. Шибасова, І.Є. Шиманського, Р.С. Черкасова, І.М. Яглома та ін.

Проблема професійної спрямованості навчання ґрунтовно досліджувалася і з окремих спеціальних математичних дисциплін: П.І. Кибалка (викладання математичного аналізу), А.М. Сазонової (викладання геометрії), В.С. Дуванової (проведення занять практикуму з розв'язуваня математичних задач).

**Метою статті** є аналіз структурно-логічної схеми, змісту пропедевтичного курсу функціонального аналізу та виділення професійно спрямованих умінь, які можна формувати в цьому курсі.

**Результати та їх обговорення.** Досліджуючи професійно спрямовані уміння майбутнього вчителя, будемо спиратися на визначення сформульоване І.А. Авакумовою та Н.В. Дударьовою, а саме під професійно спрямованим умінням розуміємо здатність виконувати дії, що входять до складу вміння, засвоєні до ступеня готовності застосовувати їх у зміненій ситуації [3]. Відзначимо, що процес формування необхідних умінь вчителя повинен здійснюватися комплексно і носити міждисциплінарний характер, оскільки сформованість умінь майбутнього вчителя математики повинна бути результатом освоєння всієї освітньої програми, а не тільки окремої дисципліни.

Кожне професійно спрямоване уміння найбільш доречно формувати в процесі вивчення певної теми функціонального аналізу Розглянемо місце професійно спрямованих умінь в структурно-логічній схемі пропедевтичного курсу функціонального аналізу, який складається двох модулів яких 4 змістових модуля.

**Модуль „Метричні простори"** складається з двох змістових модулів:

***Змістовий модуль 1. Метричні простори*** (Метрика. Означення метричного простору (МП). Граничні точки, точки дотику, внутрішні та межові точки, ізольовані точки множини. Відкриті, замкнені множини, околи. Повні МП. Стискуючі відображення. Граничні точки, точки дотику, внутрішні та межові точки. Компакти та компактні множини в МП. Метричні компакти. Неперервні відображення метричних компактів. Теорема Арцела.). При вивченні цього модуля студенти повинні оволодіти такими вміннями:

- Вміти з'ясовувати склад і структуру теорії: поняття, наукові факти, закони, принципи та зв'язки між ними.
- Вміти аналізувати теорії на предмет зв'язку з досліджуваним об'єктом та проблемою.
- Вміти аналізувати методи теорій на предмет їх придатності для розв'язування існуючої проблеми.
- Вміти бачити логічні прогалини в обґрунтуванні математичних фактів, побудові математичних теорій.
- Вміти будувати приклади і контрприклади.
- Вміти аналізувати до якої галузі математичних знань належить досліджуваний об'єкт і проблема, з ним пов'язана.

 

- Вміти аналізувати чи має теорія, якій належить проблема, ізоморфні теорії.
- Вміти аналізувати чи нерозв’язана дана проблема в ізоморфній теорії.
- Вміти аналізувати взаємозв’язки досліджуваного математичного об’єкта з відомими об’єктами, а математичної проблеми – з науковими фактами.
- Вміти встановлювати ізоморфність математичних об’єктів.
- Вміти формулювати твердження, що є окремим випадком гіпотетичного твердження, і твердження більш загальне, ніж розглядуване гіпотетичне.
- Вміти відбирати знання, необхідні для доведення або спростування гіпотетичного твердження.
- Вміти аналізувати гіпотетичне твердження і у разі можливості розкладати його на простіші.
- Вміти побудувати логічну схему доведення.
- Вміти використовувати метод від супротивного при доведенні гіпотетичного твердження.
- Вміти використовувати аналітичний метод доведення гіпотетичного твердження.
- Вміти використовувати синтетичний метод доведення гіпотетичного твердження.
- Вміти використовувати аналітико-синтетичний метод доведення гіпотетичного твердження.
- Вміти обирати раціональні методи (способи, прийоми) доведення або спростування гіпотетичного твердження.
- Вміти реалізовувати побудовану логічну схему доведення.
- Вміти будувати контрприклади для спростування гіпотетичного твердження.

***Змістовий модуль 2. Принцип стискуючих відображень*** (Теорема Банаха. Різні способи доведення. Геометрична інтерпретація. Застосування теореми Банаха до розв’язування СЛАР. Застосування теореми Банаха до доведення теореми Коші.). При вивченні цього модуля студенти повинні оволодіти такими вміннями:

- Вміти з’ясовувати склад і структуру теорії: поняття, наукові факти, закони, принципи та зв’язки між ними.
- Вміти аналізувати теорії на предмет зв’язку з досліджуваним об’єктом та проблемою.
- Вміти аналізувати методи теорій на предмет їх придатності для розв’язування існуючої проблеми.
- Вміти обирати понятійний апарат, адекватний математичному об’єкту.
- Вміти встановлювати протиріччя між твердженнями.
- Вміти проводити комп’ютерні експерименти з метою встановлення нових закономірностей.
- Вміти наводити приклади математичних об’єктів, що задовольняють умови гіпотетичного твердження.
- Вміти проводити комп’ютерне моделювання та чисельні експерименти для перевірки гіпотетичного твердження та його окремих випадків.
- Вміти добирати ефективні методи чисельного аналізу математичних моделей різних задач.
- Вміти інтерпретувати, аналізувати та узагальнювати результати розрахунків чисельного експерименту.
- Вміти конструювати математичні об'єкти із заданими властивостями.
- Вміти аналізувати відомі методи, способи, прийоми, засоби на їх придатність до розв’язування проблеми.
- Вміти використовувати індукцію і дедукцію до розв’язування математичної проблеми.
- Вміти використовувати аналітичний, синтетичний, аналітико-синтетичний методи розв’язування математичної проблеми.
- Вміти визначати мету і завдання дослідження (бажаний результат і шляхи його досягнення) та вибирати засоби.
- Вміти підготувати за результатами наукового дослідження з певної теми науковий твір (наукової доповіді, статті, реферату, звіту).
- Вміти встановлювати зв’язки між фактами і теоріями.
- Вміти оцінювати наукову новизну, практичну та теоретичну значущість результату, теорії.
- Вміти оцінювати місце, роль і значення отриманого результату в загальній системі математичних знань.
- Вміти аналізувати отриманий результат на предмет його зв’язку з іншими науковими проблемами суміжних галузей науки і практики.
- Вміти інтерпретувати отриманий результат в термінах ізоморфних теорій.
- Вміти інтерпретувати проблему і отриманий результат в термінах практично важливих проблемних ситуацій, реальних подій, процесів, явищ.

**Модуль „Лінійні нормовані простори”** складається теж з двох змістових модулів:

***Змістовий модуль 3. Лінійні нормовані простори*** (Означення і приклади лінійних нормованих просторів. Простори Банаха. Різні означення опуклості та його геометрична інтерпретація. Доведення опуклості сфери. Геометрична інтерпретація сфери в $\mathbf{R}^2$з різними нормами. Компакти та компактні множини в МП. Метричні компакти. Неперервні відображення метричних компактів. Теорема Арцела.). При вивченні цього модуля студенти повинні оволодіти такими вміннями:

- Вміти з’ясовувати склад і структуру теорії: поняття, наукові факти, закони, принципи та зв’язки між ними.
- Вміти аналізувати теорії на предмет зв’язку з досліджуваним об’єктом та проблемою.
- Вміти аналізувати методи теорій на предмет їх придатності для розв’язування існуючої проблеми.

***Змістовий модуль 4. Лінійні функціонали і оператори*** (Означення і приклади лінійних функціоналів. Неперервність та обмеженість лінійного функціоналу. Теореми Банаха про обернений фунціонал. Означення норми лінійного функціоналу. Приклади обчислення норм.Означення і приклади лінійних операторів. Неперервність та обмеженість лінійного оператору.). При вивченні цього модуля студенти повинні оволодіти такими вміннями:

- Вміти з’ясовувати склад і структуру теорії: поняття, наукові факти, закони, принципи та зв’язки між ними.
- Вміти аналізувати теорії на предмет зв’язку з досліджуваним об’єктом та проблемою.
- Вміти аналізувати методи теорій на предмет їх придатності для розв’язування існуючої проблеми.

- Вміти раціонально і повно використовувати закони логіки.
- Вміти аналізувати математичні факти, закономірності і теорії на предмет логічної строгості та повноти.
- Вміти бачити логічні прогалини в обґрунтуванні математичних фактів, побудові математичних теорій.
- Вміти будувати приклади і контрприклади.
- Вміти формулювати нові коректно поставлені задачі.
- Вміти оцінювати перспективність розв'язування математичної задачі.
- Вміти досліджувати коректність постановки математичної задачі.

На нашу думку найбільш важливим вмінням, яке природно формується при вивченні функціонального аналізу є *вміння встановлювати ізоморфність математичних об'єктів*. В тому числі математичних об'єктів шкільного курсу математики та методики її навчання з фундаментальними поняттями математичної науки.

Наприклад, при вивченні модуля «Метричні простори» доцільно звертати увагу студентів на зв'язок функціонального аналізу також з методикою навчання геометрії. Для цього, в рамках модуля, слід розглянути різні науково-методичні концепції відстані. При цьому студентам необхідно самостійно порівняти концепція відстані Кагана-Біркгофа і концепція відстані Евкліда-Колмогорова.

*Концепція відстані Кагана-Біркгофа.* Поняття відстані в класичній формі тлумачиться як дійсне невід'ємне число. Таке тлумачення відстані запропонував математик В.Ф. Каган (1869 – 1953). Система аксіом Кагана геометрії Евкліда спирається на поняття відстані як інваріанта групи аксіом переміщень, а відстань інтерпретується як дійсне невід'ємне число. Ідею Кагана було розвинуто при побудові шкільного курсу геометрії. Найповніше цю ідею було втілено в працях Джорджа Давіда Біркгофа (1884 –1944). Дана концепція знайшла відображення в різних посібниках і підручниках з геометрії для загальноосвітньої школи [1].

За Каганом-Біркгофом, поняття відстані можна аксіоматично означити так:

1). Для кожної пари точок $A$ і $B$ визначено відстань, яку позначають $\rho(A, B)$.

2). Відстань $\rho(A, B)$ є невід'ємним дійсним числом.

3). $(\forall A, B)[\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B]$.

4). $(\forall A, B)[\rho(A, B) = \rho(B, A)]$.

5). $(\forall A, B, C)[\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)]$.

Концепція Кагана-Біркгофа, коректна з наукового боку, має ряд істотних недоліків методичного характеру, в ній, зокрема:

1) величини пов'язано з процесом вимірювання, що заважає розумінню поняття числа;

2) тлумачення поняття відстані як числа приводить до зачарованого кола: доцільність введення дробових і ірраціональних чисел мотивується потребами вимірювання величин, а пізніше ці величини визначаються як числа;

3) не кожному відрізку можна поставити у відповідність його довжину – число доти, поки не введено множину невід'ємних чисел.

Студенти, під керівництвом викладача, повинні були самостійно знайти вказані вище недоліки і пояснити, чому дана концепція не знайшла місце в курсі математики, хоча широко використовується в сучасній науці.

*Концепція відстані Евкліда-Колмогорова.* Світогляд учнів допомагає формувати концепція, в основі якої лежить чітке розмежування геометричної фігури як носія величини, самої величини і її числового значення – невід'ємного дійсного числа. Такою є концепція відстані, що бере початок від Евкліда і розвинута в працях А.М. Колмогорова, а також В. Кліффорда, В.М. Депутатова та ін. В даній концепції відстань відстань розглядається як невід'ємна скалярна величина. Введення поняття «величина» в шкільний курс математики дає змогу підійти до питання про вимірювання довжин, площ, об'ємів, розглядаючи величини як геометричну властивість протяжності, яку можна кількісно характеризувати дійсним числом. Деякі сучасні вчені вважають, що математика XX ст. може обійтись без поняття величини. З ними можна погодитись лише в чистій математиці, де поняття величини явно не використовується. Що стосується прикладної математики, то тут поняття величини відіграє фундаментальну роль. Тому воно важливе і в шкільному курсі, де особлива увага звертається на практичні застосування математики [2].

У концепції Евкліда-Колмогорова поняття відстані аксіоматично означається так:

1). для кожної пари точок $A$ і $B$ визначено відстань, яку позначають $|AB|$;

2). відстань $|AB|$ є невід'ємною скалярною величиною;

3). $(\forall A, B)[|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B]$;

4). $(\forall A, B)[|AB| = |BA|]$;

5). $(\forall A, B, C)[|AC| \leq |AB| + |BC|]$.

Слід звернути увагу майбутніх вчителів математики, що в шкільних підручниках для позначення відстані і її числового значення використовується один символ: $|XY|$. Але в функціональному аналізі доцільно дотримуватися чіткого розмежування в позначеннях відстані $|XY|$ та її числового значення $\rho(X, Y)$.

При вивченні різних підходів визначення відстані студентам можна запропонувати самостійно довести, що числові значення відстаней в концепції Евкліда-Колмогорова є відстанями в концепції Кагана-Біркгофа.

Тлумачення відстані як величини лежить в основі аксіоматики шкільного курсу геометрії, запропонованої академіком А.М. Колмогоровим. Основними, неозначуваними поняттями тут є: «точка», «відстань», «пряма» – у планіметрії Евкліда; «точка», «відстань», «пряма», «площина» – у стереометрії Евкліда.

Система аксіом А.М. Колмогорова складається з 14 аксіом. Якщо в трьох із цих аксіом замінити відстань як величину її числовим значенням, то дістанемо аксіоми метричного простору.

Як вправу, студентам можна запропонувати довести, що всі евклідові площини ізометричні між собою.

Поняття відстані і метричного простору займають особливе місце в системі наукових знань. Особливо потрібні знання метричних понять старшокласникам, але формування цих понять починається з початкової школи. У програмі з математики для I-III класів значне місце відведено вивченню основних величин, зокрема довжин і площ. Це створює передумови для формування в учнів молодших класів початкових понять про відстань і метричний простір.

В якості самостійної роботи студенти отримують завдання проаналізувати реалізацію різних науково-методичних концепцій відстані в шкільних підручниках.

В заключному огляді модуля «Метричні простори» доцільно провести зі студентами евристичну бесіду, в якій ще раз підкреслити, що у шкільному курсі геометрії вивчають властивості фігур у двовимірному або тривимірному евклідовому просторі, який є моделлю метричного простору. З числовими метричними просторами зустрічаються в курсі алгебри і початків аналізу. Загальне абстрактно-математичне поняття метричного простору слід використовувати для з'ясування таких питань, як несуперечливість, незалежність і категоричність (повнота) системи аксіом. Компактна і проста аксіоматика метричного простору найбільш придатна для цього.

**Висновки.** В результаті аналізу структурно-логічної схеми та змісту пропедевтичного курсу функціонального аналізу виділено професійно спрямовані вміння, які доцільно формувати в цьому курсі.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Агебра і початки аналізу [Текст] : навчальний посібник для 9 і 10 класів середньої школи / за ред. А.М. Колмогорова. – 2-е вид. – К. : Радянська школа, 1977. – 256 с.
2. Антоновский, М.Я. Метрические пространства. (Теория и прил.) / М.Я. Антоновский, А.В. Архангельский. – М. : Знание, 1972. – 48 с. – (Новое в жизни, науке, технике ; серия "Математика, кибернетика". 3).
3. Аввакумова И.А. Технологический подход к формированию профессиональных умений учителя математики при изучении математического анализа / И.А. Аввакумова, Н.В. Дударева // Педагогическое образование в России. – 2014. – № 8. – С. 145-149.

## REFERENCES

1. Algebra and Introduction analysis [Text]: textbook for 9th and 10th grade high school / ed. A.M. Kolmogorova. – 2nd ed. – K. : Radjans'ka shkola, 1977. – 256 p.
2. Antonovskij, M.Ja. Metric spaces. (Theory and application) / M.Ja. Antonovskij, A.V. Arhangel'skij. – M. : Znanie, 1972. – 48 p. – (New in life, science, technology, a series of "Mathematics, Cybernetics." 3).
3. Avvakumova, I.A. Technological approach to formation of professional skills of teachers of mathematics in the study of mathematical analysis / I.A. Avvakumova, N.V. Dudareva // Pedagogical Education in Russia. – 2014. – № 8. – P. 145-149.

**Professional orientation skills in structural and logic of a propaedeutic course of functional analysis**

**I. Lovyanova, D. Bobyliev**

**Abtract.** The article highlights the professional skills aimed to be formed in the study of the elements of the functional analysis of student training direction 6.040201 Mathematics * in the course of mathematical analysis. For each of the selected skills demonstrated in the structurally-logic course. It illustrates the technique of formation of some of these skills. Shown interdisciplinary communication functional analysis and methods of teaching mathematics.

***Keywords:*** *professionally oriented skills, structural logic course, functional analysis*