К определению элементарного события в теории вероятностей

С. М. Краснитский, А. А. Курченко

Киевский университет технологий и дизайна, Киевский университет имени Тараса Шевченко
Corresponding author E-mail: olkurchenko@ukr.net

Paper received 23.01.17; Accepted for publication 01.02.17.

Аннотация. В статье обсуждаются два различных подхода к определению элементарного события в теории вероятностей. Доказано, что конечная алгебра случайных событий имеет полную группу элементарных событий.

Ключевые слова: *Теория вероятностей, стохастический эксперимент, случайное событие, элементарное событие.*

Введение. Современная теория вероятностей – раздел математики, в котором математическими методами изучаются закономерности случайных явлений. Эта теория находит применения в производстве (например, статистический контроль качества промышленных изделий), в естествознании (квантовый характер явлений микромира, статистические свойства ансамблей атомов и молекул), при анализе общественных тенденций (социологические опросы) и т.д. Современная теория вероятностей опирается на сложный математический аппарат. Наиболее распространенное логическое построение основ теории вероятностей (аксиоматика теории вероятностей) разработано в 1933 году А.Н.Колмогоровым [1]. Напомним эти аксиомы [2]. Пусть $\Omega -$ пространство элементарных событий (исходов) некоторого стохастического эксперимента. В пространстве элементарных событий выделена система F подмножеств, являющаяся σ-алгеброй. Это означает, что:

A_1) $\Omega \in F$;

A_2) если $A \in F$, то $\bar{A} = \Omega \setminus A \in F$;

A_3) если $A_i \in F, i = 1, 2, \ldots,$ то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

Множества из σ-алгебры F называются случайными событиями. Каждому случайному событию A поставлено в соответствие число $P(A)$ (вероятность случайного события A), обладающее следующими свойствами:

P_1) $P(A) \geq 0$ для каждого $A \in F$;

P_2) $P(\Omega) = 1$; P_3) если $(A_i) -$ последовательность случайных событий такая, что $A_i \cap A_j = \varnothing \,(i \neq j)$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Утверждения $A_1), A_2), A_3), P_1), P_2), P_3)$ составляют систему аксиом теории вероятностей. Тройка (Ω, F, P) называется вероятностным пространством.

Для полного понимания этой аксиоматики необходима достаточно глубокая математическая подготовка, в частности владение основными понятиями теории меры Лебега, которую студенты-математики изучают лишь на третьем курсе, а студенты технических и экономических специальностей, зачастую, вообще никогда. Поэтому представляет интерес подходящее логическое обоснование теории вероятностей для научно-популярного изложения основ теории, доступного школьникам старших классов и студентам младших курсов различных специальностей. Конечно, такое упрощенное обоснование не позволяет в полной мере применить современный математический аппарат для изучения закономерностей случайных явлений, но это и не требуется в элементарных изложениях основ теории. С другой стороны, в прикладных исследованиях инженерного или экономического характера используются готовые результаты и алгоритмы, и для прикладника здесь главное понимать вероятностный характер теоретических схем и практических ситуаций, при этом многие тонкости математических обоснований используемых результатов уходят на второй план.

Краткий обзор публикаций по теме. Книга [3] выдающегося украинского ученого в области теории вероятностей и математической статистики А. В. Скорохода представляет адресованное широкому кругу читателей, в частности ученикам старших классов, элементарное изложение основ теории вероятностей. В этой книге элементарное событие определено без апелляции к теории множеств, на языке событий. Сходные определения находим в учебниках [4,5], а также в справочнике [6]. В статье [7] рассматривается ряд аспектов использования обсуждаемых определений при изложении основ теории вероятностей в высших учебных заведениях.

Цель. Некоторые научно-популярные либо направленные на раннее развитие теоретико-вероятностной интуиции изложения основ теории вероятностей содержат определение элементарного события на языке событий, то есть без апелляции к теории множеств и вероятностному пространству. Цель настоящей работы состоит в исследовании свойств элементарных событий в смысле такого определения.

Материалы и методы. Логический анализ определения элементарного события на языке событий.

Аксиоматическое определение элементарного события. Стохастический эксперимент, случайное событие, вероятность случайного события являются исходными понятиями теории вероятностей. В приведенной во введении аксиоматике теории вероятностей элементарное событие является точкой пространства элементарных событий (исходов) некоторого стохастического эксперимента. Определение элементарного события как точки пространства элементарных событий назовем аксиоматическим. Случайное событие представляет собой элемент σ-алгебры F.

Пример 1. Стохастический эксперимент состоит в подбрасывании шестигранной игральной кости, на гранях которой выбиты очки от одного до шести. Подходящее пространство элементарных событий состоит из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, то есть

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Допустим, что экспериментатор интересуется числом выпавших очков. Тогда в качестве σ-алгебры случайных событий можно выбрать семейство всех подмножеств $\Im = 2^{\Omega}$ пространства элементарных событий Ω. В этом примере элементарные события являются случайными событиями.

Заметим, что элементарное событие, точнее, соответствующее одноэлементное множество, может не быть случайным событием, то есть может не принадлежать σ-алгебре случайных событий. Приведем пример, подтверждающий это замечание.

Пример 2. Допустим, что в стохастическом эксперименте предыдущего примера экспериментатор интересуется лишь четностью числа выпавших очков. Тогда в качестве σ-алгебры случайных событий можно выбрать семейство множеств

$$\{\varnothing, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}.$$

Заметим, что элементарные события предыдущего примера не являются случайными событиями в настоящем примере.

Эвристическое определение элементарного события. В этом пункте мы введем понятие элементарного события независимо от аксиоматики теории вероятностей.

Случайное событие, подобно множеству, является неопределяемым понятием. Мы остановимся на следующем объяснении этого понятия. Случайное событие для заданного стохастического эксперимента – это такое событие, которое происходит или не происходит в результате этого эксперимента. Заметим, что при этом рассматриваются события, которые интересуют исследователя в данном эксперименте. Естественно требовать, чтобы семейство событий данного стохастического эксперимента было алгеброй. Это означает, что семейство событий содержит невозможное событие (обозначим его через V), достоверное событие (обозначим его через U); для каждого случайного события A противоположное ему случайное событие $\overline{A}$ также принадлежит семейству; для двух произвольных событий A, B семейства их сумма $A+B$ (событие, состоящее в том, что происходит хотя бы одно из этих событий), а также их произведение AB (событие, состоящее в том, что происходит каждое из этих событий) принадлежат семейству событий. Приведем два примера стохастического эксперимента и соответствующих алгебр случайных событий.

Пример 3. Стохастический эксперимент состоит в однократном подбрасывании монеты. Результаты: монета легла на пол гербом вверх (выпал герб), монета легла на пол цифрами вверх (выпала решка). В этом эксперименте мы имеем только два случайных события, отличных от невозможного и достоверного: случайное событие A происходит тогда и только тогда, когда выпадает герб, противоположное случайное событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда выпадает решка. Соответствующая алгебра случайных событий

$$\{V, A, \overline{A}, U\}.$$

Пример 4. Стохастический эксперимент состоит в измерении определенной величины, которая может принимать неотрицательные значения. После эксперимента для произвольного замкнутого слева полуинтервала $[a,b) \subset [0,+\infty)$ можно ответить на вопрос о принадлежности результата измерения этому полуинтервалу (но не о точном значении данной величины). Соответствующая алгебра случайных событий состоит из невозможного события, достоверного события и всех событий, каждое из которых состоит в принадлежности результата измерений некоторому конечному объединению замкнутых слева полуинтервалов на неотрицательной полуоси.

Пусть $A, B -$ случайные события некоторого стохастического эксперимента. Говорят, что из события A следует событие B, если всегда, когда в данном эксперименте происходит событие A, происходит и событие B. Обозначение: $A \subset B$. Случайные события A, B называются равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Пусть $\{A_\alpha \mid \alpha \in T\}$, где $T -$ множество индексов, – семейство случайных событий. Событие, состоящее в том, что происходит по крайней мере одно случайное событие из семейства случайных событий $\{A_\alpha \mid \alpha \in T\}$, называется суммой этого семейства случайных событий и обозначается

$$\sum_{\alpha \in T} A_\alpha.$$

Сумма конечного семейства случайных событий является случайным событием, т. е. элементом алгебры случайных событий.

Разностью $A - B$ случайных событий A, B называется случайное событие, состоящее в том, что (в данном эксперименте) случайное событие A происходит, а B не происходит. Вследствие равенства $A - B = A\overline{B}$, разность случайных событий является случайным событием.

Отметим такое свойство отношения следования: если $A \subset B$, то

$$B = A + (B - A). \quad (1)$$

Приведем доказательство равенства (1) на языке событий. Пусть происходит случайное событие B. Если происходит событие A, то, по определению суммы событий, происходит событие правой части (1). Если событие A не происходит, то происходит событие $B - A$, и, следовательно, происходит событие правой части (1). Таким образом, из левой части равенства (1) следует правая. Теперь предположим, что происходит событие правой части (1). Тогда происходит одно из событий A, $B-A$. Если происходит событие A, то, в силу соотношения $A \subset B$, происходит событие B. Если происходит событие $B-A$, то из определения разности событий следует, что происходит событие B. Следовательно, из правой части равенства (1) следует левая. Равенство (1) доказано.

Определение 1 [3, 4, 6]. Случайное событие $E \neq V$ называется элементарным событием, если для произвольного случайного события A имеет место одно из соотношений:

$$E \subset A \text{ или } E \subset \bar{A}.$$

В примере 3 события A и $\bar{A}$ являются элементарными. Определение 1 элементарного события назовем эвристическим.

Согласно эвристическому определению, в отличие от ситуации в рамках аксиоматики теории вероятностей, элементарное событие является случайным событием.

Алгебра случайных событий не обязательно содержит элементарные события. Иначе говоря, элементарные события не обязательно существуют как элементы алгебры случайных событий.

Предложение 1. Алгебра случайных событий в примере 4 не содержит элементарных событий в смысле эвристического определения.

Доказательство. Предположим, алгебра случайных событий в примере 4 содержит элементарное событие. Обозначим его через E. Пусть это событие состоит в том, что результат измерения попал в конечное объединение замкнутых слева полуинтервалов

$$[a_1, b_1) \cup [a_2, b_2) \cup \ldots \cup [a_s, b_s).$$

Рассмотрим событие A, состоящее в том, что результат измерения попал в полуинтервал $[a_1, c_1)$, где $a_1 < c_1 < b_1$. Тогда оба отношения следствия

$$E \subset A, \; E \subset \bar{A}$$

ложны. Следовательно, E не является элементарным событием. Таким образом, алгебра случайных событий примера 4 элементарных событий не содержит. Предложение доказано.

Предложение 2. Пусть E_1, E_2 – элементарные события в смысле определения 1 в некоторой алгебре случайных событий. Тогда

$$E_1 = E_2 \text{ или } E_1 E_2 = V.$$

Доказательство. В силу определения элементарного события,

$$E_1 \subset E_2 \text{ или } E_1 \subset \bar{E}_2,$$

и, симметрично,

$$E_2 \subset E_1 \text{ или } E_2 \subset \bar{E}_1.$$

Если

$$E_1 \subset E_2 \text{ и } E_2 \subset E_1, \text{ то } E_1 = E_2.$$

Если

$$E_1 \subset E_2 \text{ и } E_2 \subset \bar{E}_1,$$

то элементарные события E_1, E_2 исключают друг друга, то есть $E_1 E_2 = V$.

Если $E_1 \subset \bar{E}_2$, то события E_1, E_2 не могут быть реализованы в одном и том же стохастическом эксперименте, то есть, как и выше, $E_1 E_2 = V$. Предложение доказано.

Предложение 3. Случайное событие $E \neq V$ является элементарным в смысле эвристического определения тогда и только тогда, когда для произвольного случайного события $B \neq V$ такого, что $B \subset E$, следует, что $B = E$.

Доказательство. Необходимость. Пусть случайное событие $E \neq V$ является элементарным в смысле эвристического определения. Пусть $B \neq V$, $B \subset E$. Согласно определению 1,

$$E \subset B \text{ или } E \subset \bar{B}.$$

Если $B \subset E$ и $E \subset B$, то $B = E$. Если $B \subset E$ и $E \subset \bar{B}$, то случайные события B и $\bar{B}$ происходят в результате реализации одного и того же стохастического эксперимента, что невозможно для случайного события $B \neq V$, $B \neq U$. Но $B \neq U$ вследствие соотношения $E \subset \bar{B}$. Следовательно, $B = E$.

Достаточность. Пусть $E \neq V$ и для произвольного случайного события $B \neq V$ такого, что $B \subset E$, следует, что $B = E$. Предположим, что случайное событие E не является элементарным в смысле определения 1. Тогда существует такое случайное событие C, что

$$E \not\subset C \text{ и } E \not\subset \bar{C}.$$

Нетрудно видеть, что $C \neq V$, $C \neq U$. Рассмотрим случайное событие $B = EC$. Если $B = V$, то $E \subset \bar{C}$, что противоречит соотношению $E \not\subset \bar{C}$. Пусть $B \neq V$. Так как $B \subset E$, то $B = E$. Но, если $E = EC$, то $E \subset C$, что противоречит соотношению $E \not\subset C$. Следовательно, случайное событие $E \neq V$ является элементарным в смысле эвристического определения.

Предложение доказано.

Определение 2 [5]. Случайное событие $E \neq V$ называется элементарным событием, если в алгебре событий имеется лишь два случайных события, для которых E является следствием: невозможное событие и само E.

Вследствие предложения 3, определение 1 и определение 2 элементарного события эквивалентны.

Говорят, что алгебра случайных событий обладает полной группой элементарных событий, если существует семейство элементарных событий $\{E_\alpha \mid \alpha \in T\}$, где T – множество индексов, такое, что

$$\sum_{\alpha \in T} E_\alpha = U.$$

Это означает, что в результате стохастического эксперимента, алгебра случайных событий которого обладает полной группой элементарных событий, происходит ровно одно элементарное событие.

Так в примере 3 элементарные события A и $\overline{A}$ составляют полную группу элементарных событий.

Теорема 1. Алгебра, состоящая из конечного числа случайных событий, обладает полной группой элементарных событий в смысле эвристического определения.

Доказательство. Если U является элементарным событием, то утверждение тривиально. В противоположном случае найдется такое случайное событие B, что $B \neq V, B \neq U, B \subset U$. Если событие B элементарно, то положим $E_1 = B$. Иначе найдется случайное событие $C \neq V, C \neq B, C \subset B$. Если $C -$ элементарное событие, то положим $E_1 = C$ и т.д. В силу конечности алгебры случайных событий, цепочка рассуждений оборвется на конечном шаге. При этом будет найдено элементарное событие $E_1 \subset U$, причем вследствие равенства (1) будем иметь $U = E_1 + B_1$, где $B_1 = U - E_1$. Если $B_1 -$ элементарное событие, то теорема доказана. В противоположном случае применим к случайному событию B_1 использованную выше цепочку рассуждений, что приведет к равенству $B_1 = E_2 + B_2$, где $E_2 -$ элементарное событие, $B_2 = B_1 - E_2$. Таким образом, получим равенство $U = E_1 + E_2 + B_2$. Повторяем цепочку рассуждений для B_2 и т.д. После $i -$ той цепочки получим равенство $U = E_1 + E_2 + ... + E_i + B_i$, где $E_1, E_2, ..., E_i -$ различные элементарные события, $B_i = U - \left(E_1 + E_2 + ... + E_i\right)$. Вследствие конечности алгебры случайных событий, найдется число r, для которого $B_r = V, B_{r-1} \neq V$. Получим $U = E_1 + E_2 + ... + E_r$. Теорема доказана.

В элементарной теории вероятностей [8, ст. 656, 657] ограничиваются стохастическими экспериментами с конечным числом исходов. Все подходящие для таких стохастических экспериментов алгебры случайных событий конечны. Поэтому алгебры событий в элементарной теории вероятностей всегда обладают полной группой элементарных событий в смысле эвристического определения.

Выводы. Аксиоматическое и эвристическое определения элементарного события различны. Элементарное событие в смысле аксиоматического определения может не быть случайным событием. Элементарное событие в смысле эвристического определения является случайным событием. Элементарные события в смысле аксиоматического определения существуют всегда, а в смысле эвристического определения могут не существовать. В элементарной теории вероятностей в произвольной алгебре случайных событий элементарные события в смысле эвристического определения существуют и образуют полную группу элементарных событий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М., Наука, 1974. – 119 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев, «Вища школа», 1979, 408 с.
3. Скороход А.В. Вероятность вокруг нас. «Наукова думка», Киев, 1980. – 196 с.
4. Скороход А.В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. – Киев: Вища школа, 1980. – 344 с.
5. Краснитский С.М., Хилюк Л.Ф. Теория вероятностей и ее применение в задачах легкой промышленности: Учеб. Пособие. – Киев: УМК ВО, 1991. – 144 с.
6. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М., Наука, 1985. – 640 с.
7. Краснитский С.М., Пилипенко Ю.Н., Хилюк Л.Ф. Изложение концепции элементарного события в ходе изучения основ теории вероятностей. – Проблемы высшей школы, вып. 74. Киев, 1991, с. 84 – 93.
8. Математическая Энциклопедия. Т1 – М. «Советская Энциклопедия», 1977. – 1152 ст.

REFERENCES

1. Kolmogorov A.N.Basic Concepts of Probability Theory [in Russian]. – Moscow, Nauka, 1974. – 119 p.
2. Gikhman I.I., Skorokhod A.V., and Yadrenko M.I. Probability Theory and Mathematical Statistics [in Russian]. – Kyiv, Vischa shkola, 1979. – 408 p.
3. Skorokhod A.V.Probability Around Us [in Russian]. – Kyiv, Naukova Dumka, 1980. – 196 p.
4. Skorokhod A.V. Elements of Probability Theory and Stochastic Processes. – Kyiv, «Vuscha Shkola», 1980. – 344 p.
5. Krasnitskiy S.M. and Khilyuk L.F. Probability Theory and its Application to the Manufacturing Problems [in Ukrainian]. Tutorial. – Kyiv, Ukrainian Department of Highest Education, 1991. – 144 p.
6. Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. Handbook of Probability Theory and Mathematical Statistics [in Russian]. – Moscow, Nauka, 1985. – 640 p.
7. Krasnitskiy S.M., Pilipenko Y.N. and Khilyuk L.F. The Presentation of the Concept of an Elementary Events in the Study of the Principles of Probability Theory // Problemi vischey shkoly, v. 74. – Kyiv, Ukrainian Department of Highest Education, 1991. – p. 84 – 93.
8. Encyclopaedia of Mathematics [in Russian]. T1 – Moscow, «Sovetskaya Encyclopaedia », 1977. – 1152 p.

On the Definition of an Elementary Event in Probability Theory

S. M. Krasnitskiy, A. A. Kurchenko

Abstract. In this article two different approaches to the definition of an elementary event in probability theory are discussed. It is proved that an arbitrary finite algebra of the random events possesses a complete group of elementary events.

Keywords: *probability theory, stochastic experiment, random event, elementary event.*