# Методичні особливості розв'язування задач з стереометрії у старшій школі

**І. В. Житарюк, Р. С. Колісник, В. С. Сікора**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна

Paper received 14.10.16; Accepted for publication 22.10.16.

**Анотація.** У роботі досліджуються питання, що стосуються внутріпредметних зв'язків, зокрема планіметрії та стереометрії. Акцентується увага на тому, що геометричні конфігурації, пов'язані з зовнівписаними колами, зустрічаються у багатьох задачах як планіметрії, так і стереометрії. Звертається увага на системний підхід щодо введення і застосування поняття зовнівписаного кола у старшій школі та класах з поглибленим вивченням математики; вказано на методичні особливості розв'язання певних задач з стереометрії з використанням поняття зовнівписаного кола.

***Ключові слова:*** *внутріпредметні зв'язки, зовнівписане коло, планіметрія, старша школа, стереометрія.*

**Постановка проблеми.** Для успішної участі у сучасному суспільному житті молода людина повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язування практичних задач з подальшим їх детальним аналізом і узагальненням. Навчання математики у старшій школі має бути розвивальним і мати прикладну спрямованість: розвиток інтелекту, математичної інтуїції, вміння застосовувати отримані знання для розв'язування практичних і прикладних задач, зокрема внутрішньопредметних. Особливо це стосується математики старшої школи академічного та профільного рівня і класів з поглибленим вивченням математики. Тому одним з головних завдань математичної підготовки у старшій школі є забезпечення умов для досягнення кожним суб'єктом навчання практичної компетентності, наприклад, при розв'язуванні задач з стереометрії з використанням певних понять планіметрії.

Застосування поняття зовнівписаного кола з планіметрії та його властивостей дає можливість навести повне розв'язання окремих задач з стереометрії у старшій школі як в 10, так і в 11 класах, що й обумовлює вибір зазначеної теми.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Поняттю зовнівписане коло присвячено праці [1-3], в яких акцентується увага на понятті зовнівписаного кола, наведено низку тверджень та розв'язано значну кількість задач за допомогою даного поняття і встановлених тверджень. Зокрема, М. Г. Гохідзе у [3] наводить приклад розв'язання задачі 2 з пірамідою з використанням зовнівписаного кола без детального обґрунтування існування чотирьох розв'язків задачі та розглядаючи лише випадок, коли грані піраміди утворюють з площиною її основи однакові кути. О. Д. Блінков та Ю. Д. Блінков у [2, с. 38] зазначають: "Зовнівписане коло часто виникає і при вивченні стереометрії" і наводять приклад для 10 класу старшої школи.

Незважаючи на зазначені наукові дослідження, присвячених досліджуваній проблемі, не простежується системний підхід щодо методичних особливостей можливості застосування зовнівписаних кіл при розв'язуванні задач з стереометрії у старшій школі як у 10, так і в 11 класах.

**Метою статті** є дослідження особливостей розв'язування задач у старшій школі з стереометрії.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Обсяг знань, який потрібно засвоїти за час навчання у старшій школі, обмежений, а тому подача його на рівні, достатньому для майбутнього вибору професії чи участі в олімпіадах з математики різного рівня, є нереальною.

Серйозних змін потребує змістовний бік математичних дисциплін у ЗНЗ. Проблема ілюстрації математичних понять і методів певними застосуваннями дуже складна. У фундаментальних і спеціальних дисциплінах загальну формулу прагнуть підкріпити розрахунками для певної ситуації. Цей прийом зберігається і в математиці. Для ілюстрації застосування на практиці якої-небудь конкретної математичної формули чи моделі необхідно показати широту її можливостей при розв'язуванні різних задач.

Зазначимо, що на всіх рівнях системи освіти актуальною є проблема методології як між- , так внутріпредметної діяльності. Одержані учнями на заняттях знання, наприклад з планіметрії, повинні певною мірою реалізовуватися при вивченні стереометрії. Зв'язки, що визначають даний процес або явище, бувають іноді настільки складними, що, власне, застосування планіметрії в стереометрії порівнюється деколи з свого роду мистецтвом.

Викладання геометрії має бути побудовано так, щоб не лише забезпечувати учням старшої школи певний обсяг знань, наприклад, з планіметрії, але й демонструвати на доступних прикладах можливість і необхідність їх застосуванню при вивченні, наприклад, стереометрії. Учень повинен переконатися в тому, що кожне математичне поняття, кожний комплекс математичних ідей має лише обмежені можливості для моделювання реальних явищ, а збільшення знань сприяє введенню нових понять, розробці нових методів дослідження.

Знання з планіметрії і стереометрії мають бути тісно пов'язані з постановкою задач та орієнтуватися у першу чергу на внутрішньо-математичні системи і зв'язки.

Починаючи з сьомого класу, а особливо при систематизації та узагальненні фактів і методів планіметрії у 10 класі старшої школи чи у класах з поглибленим вивченням математики доцільно розглядати таку задачу.

*Нехай на площині задано три прямі, що попарно перетинаються в точках A, B і C. Скільки існує точок, рівновіддалених від цих прямих*?

Відповідь на поставлене запитання приводить до поняття зовнівписаного кола трикутника.

Проведемо бісектриси зовнішніх кутів трикутника ABC при вершинах A, B і C (див. рис. 1).

 

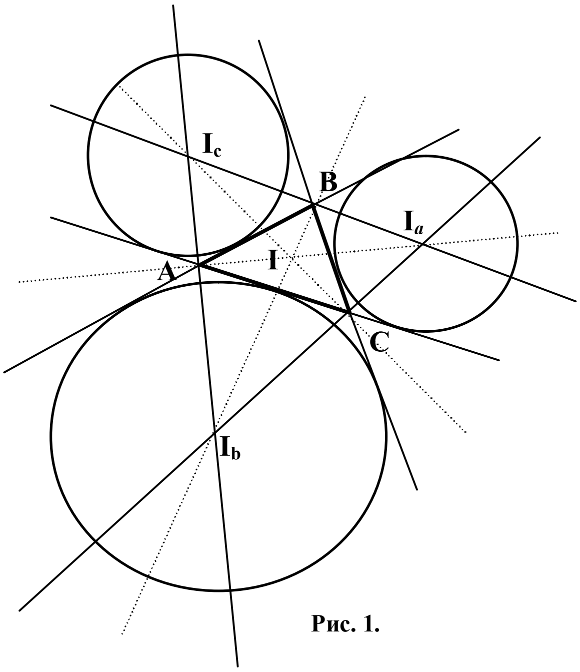

**Рис. 1.**

Оскільки сума трьох зовнішніх кутів трикутника ABC дорівнює 360° (скориставшись тим, що зовнішній кут при певній вершині трикутника дорівнює сумі двох його внутрішніх кутів не суміжних з даним зовнішнім і тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°, отримуємо ∠B + ∠C + ∠A + ∠C + ∠A + ∠B = 2(∠A + ∠B + ∠C) = 360°), а тому сума двох з них менша 360° і, отже, сума половин двох зовнішніх кутів менша 180°. А це означає, що дві зовнішні бісектриси перетинаються (в тій півплощині від сторони трикутника, яка останнього не містить). Якщо б бісектриси були паралельними, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнювала б 180°. Точки $I_a$, $I_b$, $I_c$ перетину зовнішніх бісектрис рівновіддалені від прямих, що містять сторони трикутника ABC, а тому через неї проходить й бісектриси внутрішніх кутів останнього.

Отже, існує чотири точки I, $I_a$, $I_b$, $I_c$, які рівновіддалені від прямих AB, BC і AC, котрі є центрами вписаного і зовнівписаних кіл трикутника відповідно.

Таким чином, коло називають *зовнівписаним* в трикутник, якщо воно дотикається однієї з його сторін і продовжень двох інших.

Для довільного трикутника ABC правильними є такі співвідношення:

$$a)\ \frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p};\ б)\ r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=p^2;\ в)\ r_a+r_b+r_c=r+4R;$$

$$г)\ r_a=\frac{S}{p-a},\ r_b=\frac{S}{p-b},\ r_c=\frac{S}{p-c};\ д)\ \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r};$$

$$е)\ r_a=p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2};\ є)\ rr_ar_br_c=S^2.$$

де $a$, $b$, $c$ – довжини сторін трикутника ABC, p – півпериметр, $r_a$, $r_b$, $r_c$ – радіуси зовнівписаних кіл трикутника, r, R – радіуси вписаного та описаного кіл трикутника, α – кут трикутника, протилежний стороні $a$.

Доведення даних співвідношень можна знайти в [2-4]. Зокрема у [2, 5] наведено цілу низку задач з використанням поняття зовнівписаного кола та наведених співвідношень.

Зовнівписані кола доцільно використовувати й при вивченні ортогонального проектування в стереометрії 10 класу старшої школи. Проілюструємо це на такій задачі.

Розглянемо трикутник ABC і точку D, що лежить поза площиною трикутника, яка рівновіддалена від прямих AB, BC і AC. Нехай точка E – ортогональна проекція точки D на площину ABC. Чим є по відношенню до трикутника точка E?

Оскільки точка D рівновіддалена від прямих, що містять сторони трикутника ABC, то за теоремою про три перпендикуляри і властивістю рівних похилих проведених з однієї точки випливає, що точка E збігається або центром вписаного в трикутник ABC кола, або центром одного із зовнівписаних кіл даного трикутника, що було встановлено вище (див. рис. 2).

При вивченні пірамід і питань, що їх стосуються, варто довести такі твердження для трикутної піраміди DABC:

*а)* Якщо висоти бічних граней, проведені з вершини D піраміди DABC рівні, то ортогональною проекцією вершини D піраміди DABC на площину

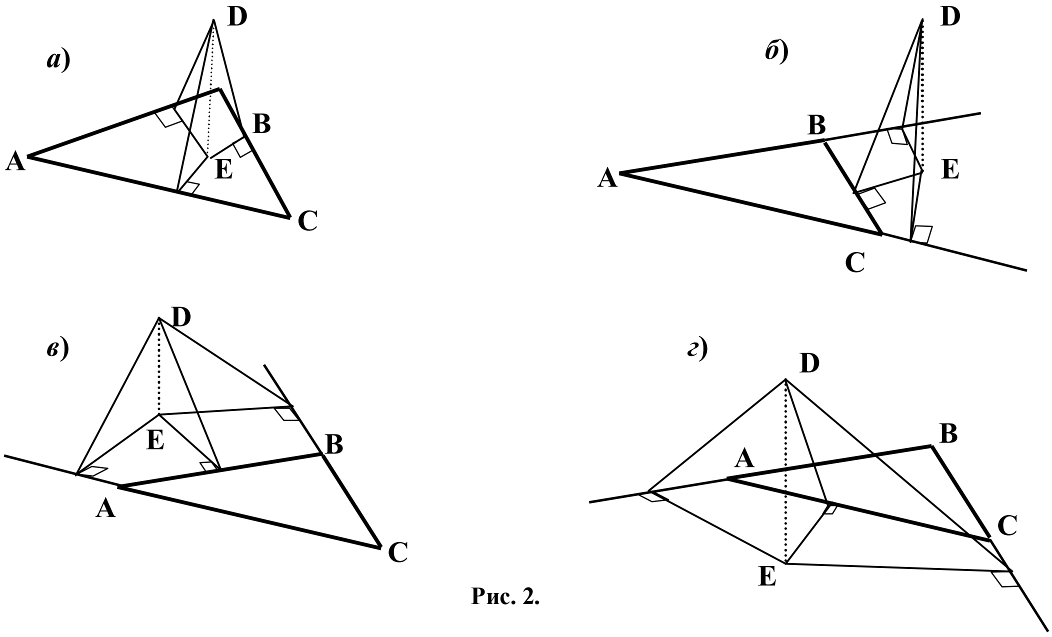


**Рис. 2.**

ABC є або центр вписаного в трикутник ABC кола, або центр одного із зовнівписаних кіл трикутника.

б) Якщо площини бічних граней піраміди DABC утворюють з площиною ABC або з її висотою однакові кути, то ортогональною проекцією вершини D піраміди DABC на площину ABC є або центр вписаного в трикутник ABC кола, або центр одного із зовнівписаних кіл трикутника.

Зауважимо, що у [5, с. 254] наводиться без доведення твердження: якщо бічні грані утворюють з основою рівні між собою кути або апофеми бічних граней рівні, то вершина піраміди проектується в центр вписаного кола в основу піраміди. Проте стосовно трикутної піраміди не зауважується, що можливі ще й наведені вище твердження.

Наведемо приклад розв’язання задачі для трикутної піраміди.

**Задача.** Довжини сторін трикутної піраміди DABC дорівнюють $a$, $b$ і $c$. Площини бічних граней з площиною основи утворюють однакові кути, рівні α. Обчислити об’єм піраміди.

**Розв’язання.** З урахуванням викладеного вище (див. рис. 2 і твердження б) задача має чотири розв’язки, тобто існує чотири піраміди, які відрізняються висотами, котрі (див. рис. 2) легко обчислити.

У нашому випадку маємо:

$$H = r\,tg\alpha,\ H_1 = r_a tg\alpha,\ H_2 = r_b tg\alpha,\ H_3 = r_c tg\alpha.$$

Тоді скориставшись формулою для обчислення об’єму піраміди та формулою для обчислення площі трикутники за допомогою довжин сторін і радіусів вписаного та зовнівписаних кіл трикутника ABC, отримаємо, що

$$V = \frac{S^2 tg\alpha}{3p},\ V_1 = \frac{S^2 tg\alpha}{3(p-a)},\ V_1 = \frac{S^2 tg\alpha}{3(p-b)},\ V_1 = \frac{S^2 tg\alpha}{3(p-c)},$$

де p – півпериметр трикутника ABC, а $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

В залежності від того чи є трикутник різносторонним, рівнобедреним чи правильним, то відповідно матимемо чотири, три і два різних значення для об’єму шуканої піраміди.

**Висновки.** В сучасних умовах вже недостатньо просто навчити учнів, дати їм певну, досить значну суму знань. Необхідно навчити їх постійно обновлювати знання, систематично шукати нове та зв’язки із уже вивченим.

Для повноцінної математичної освіти потрібно формувати математичні курси з урахуванням вимог внутріпредметних зв’язків та принципу наступності і системного підходу щодо викладання матеріалу планіметрії та стереометрії і його узагальнення.

Вважаємо, що наведені поняття, твердження і формули, а також розв’язані задачі, допоможуть вчителям для підготовки до занять у 10 і 11 класах старшої школи академічного і профільного рівня чи у класах з поглибленим вивченням математики, а учням набути нові знання з геометрії.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Билецкий Ю. О пользе вневписанных окружностей / Ю. Билецкий, Г. Филипповский // Квант. – 2001. – № 2. – С. 28.
2. Блинков А.Д. Вневписанная окружность / А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков // Квант. – 2009. – № 2. – С. 34-37, 45.

3. Гохидзе М.Г. О вневписанной окружности и задачах по стереометрии / М.Г. Гохидзе // Математика в школе. – 1987. – № 5. – С. 61.
4. Житарюк І.В. Елементарна математика і методика викладання математики. Конспект лекцій. Ч. 1. Вибрані питання елементарної математики : Навч. посібник / Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів : Лист Міністерства освіти і науки України № 1/11-6454 від 30.04.2014 року. – Чернівці : Прут, 2015. – 404 с.
5. Збірник задач з математики для вступників до вузів : Пер. з рос. / В.К. Егерєв, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемський та ін. ; под ред. М.І. Сканаві. – К. : ОНІКС, 2005. – 608 с.

**REFERENCES**

1. Byletskiy Yu. About the benefit of excircumferences / Yu. Byletskiy, G. Fylypovsky // Quantum. – 2001. – № 2. – P. 28.
2. Blynkov A. Excircle / A. Blynkov, Yu. Blynkov // Quantum. – 2009. – № 2. – P. 34-37, 45.
3. Gochydze M.G. About an excircle and tasks on stereometry / M.G. Gochydze // Mathematics at school. - 1987. - № 5. - P. 61.
4. Zhitaryuk I.V. Elementary mathematics and methodology of teaching of mathematics. Compendium of lectures. P. 1. Chosen questions of elementary mathematics : Educational a manual / is Recommended by Department of education and science of Ukraine as a train aid for the students of higher educational establishments : Sheet of Department of education and science of Ukraine № 1/11-6454 from 30.04.2014. – Chernivtsi : Twig, 2015. – 404 p.
5. Collection of tasks from mathematics for entrants to institutions of higher learning : Trudged. from dews. / V. K. Egerev, V. V. Zaiycev, B. A. Kordemskiy and other ; under by a release M. I. Skanavy. – K. : ONYX, 2005. – 608 p.

**Methodical features of decision of tasks from stereometry at senior school**

**Zhitaryuk I. V., Kolisnyk R. S., Sikora V. S.**

**Abstract.** Questions that touch inwardly subject connections are in process investigated, in particular plane geometries and stereometries. Attention is accented on that the geometrical configurations related to the inwardly subject circles meet in many tasks of both plane geometry and stereometry. Attention applies on approach of the systems in relation to introduction and application of concept of excircle at senior school and classes with the deep study of mathematics; it is indicated on the methodical features of decision of certain tasks from stereometry with the use of concept of excircle.

***Keywords:*** *inwardly subject, excircle, plane geometry, senior school, stereometry.*

**Методические особенности решения задач из стереометрии в старшей школе**

**И. В. Житарюк, Р. С. Колиснык, В. С. Сикора**

**Аннотация.** В работе исследуются вопросы, которые касаются внутридисциплинарных связей, в частности планиметрии и стереометрии. Акцентируется внимание на том, что геометрические конфигурации, связанные с вневписанными окружностями, встречаются в многих задачах как планиметрии, так и стереометрии. Обращается внимание на системный подход относительно введения и применения понятия вневписанной окружности в старшей школе и классах с углубленным изучением математики; указано на методические особенности решения определенных задач из стереометрии с использованием понятия вневписанной окружности.

***Ключевые слова:*** *внутридисциплинарные связи, вневписанная окружность, планиметрия, старшая школа, стереометрия.*