

Математико-статистичний аналіз морфометричних властивостей рельєфу

В. Мельник, Ю. Бліндер, О. Піскунова*

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк, Україна

*Corresponding author. E-mail: oli4ka_1308@mail.ru

Paper received 13.09.15; Accepted for publication 14.10.15.

Анотація. В статті розглянуті два методи математичного апроксимування цифрових моделей рельєфу в прямокутних і сферичних координатах. В першому пропонується використання поліномів Чебишева, в другому — простих сферичних функцій, без приєднаних функцій Лежандра. Спільним в цих методах є ортогональність і можливість отримання системи цих функцій за рекурентними співвідношеннями. У випадку значного впливу «шуму» і виникненням некоректності за Адамаром пропонується регуляризоване рішення за методом академіка А. Тихонова. Проілюстрована ефективність регуляризації. Ймовірна оцінка морфометричних властивостей рельєфу можлива на основі отримання шестивимірної коваріаційної матриці та використання спрощеного варіанту через розрахунок варіограм і планарних діаграм анізотропії.

Ключові слова: поліноми Чебишева, сферичні функції, регуляризація, варіограми, анізотропія

Вступ. Починаючи з 60-х років XIX ст. в геоморфології виник новий напрямок цифрового моделювання рельєфу (ЦМР) земної поверхні [1;2]. В основі цього напрямку носіями інформації про рельєф слугували цифрові моделі висоти — дискретні двовимірні функції висоти, які використовувалися для розрахунку ЦМР [3;4;5].

З інтенсивним розвитком комп'ютерних і аерокосмічних технологій ЦМР сформувалося в окрему наукову дисципліну, предметом якої є кількісне моделювання і аналіз рельєфу земної поверхні.

Сучасний стан цього напрямку характеризується інтенсивним його використанням в задачах геоморфології, геоботаніці, гляціології, кліматології та інших дисциплінах [1;2].

Все це обумовлює необхідність різнобічних досліджень морфометричних властивостей рельєфу, їх оптимального і адекватного застосування [6].

Аналіз останніх публікацій. В дослідженнях професора Х. Бурштинської [4;5] розглянуті різні підходи цифрового моделювання рельєфу земної поверхні. Зроблено висновок про пріоритетність методу Крайгінга, проте для цифрового моделювання рельєфу на мікрорівні такий висновок не підтверджується [6]. В роботі [3] зроблено аналіз морфометричних ознак рельєфу із застосуванням чисельного диференціювання (знаходження перших і других похідних) дискретних цифрових моделей рельєфу. Порівняно з апроксимуючими математичними моделями метод має обмеження по точності та універсальності [2;5].

Дослідження [1;2] характеризуються чіткою регламентацією практичного застосування в різних сферах ґрунтознавства. Передбачається, що вихідною інформацією є топографічні карти різних масштабів. Подібне обмеження не узгоджується з сучасними тенденціями космо-аеро-методами дистанційного зондування [4].

В монографії [6] зроблено акцент на цифрове моделювання рельєфу на мікрорівні (ЦММР). Проте з метою всебічності вказані дослідження потребують подальшого розвитку.

Мета. Розглянути з єдиних позицій методологію цифрового моделювання рельєфу (ЦМР) в прямокутних та сферичних координатах. Теоретично обґрунтувати оригінальний алгоритм регуляризації ЦМР. Практично проілюструвати ефективність застосування в дослідженнях морфометрії рельєфу варіограм та планіметричного відображення анізотропії.

Виклад основного матеріалу

I. Апроксимування цифрових моделей рельєфу (ЦМР) в прямокутних і сферичних координатах. Апроксимування поліномами Чебишева

Нехай в деякій області Ω в N точках з координатами $(x_k, y_k) \in \Omega$ відомі виміряні (фотограмметричні, геодезичні тощо) значення невідомої функції рельєфу

$f(x, y)$, які визначені на всій ділянці $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, де

$\Omega_i \cap \Omega_j = 0$ для $\forall i, j \in 1..n$. При цьому представляється рельєф дискретно, тобто висота z точки визначається як функція положення (координат x та y).

проте в більшості випадків потрібно рельєф апроксимувати тією чи іншою математичною моделлю. В практиці геоморфологічних досліджень часто застосовується апроксимування добре відомими в прикладній математиці поліномами Чебишева [7;8].

Поліноми Чебишева є ортогональними і при їх застосуванні не виникає утруднень з отриманням обернених матриць:

$$f(x, y) = Z(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{e=0}^{m-k} a_{ke} T_k(x) T_e(y) \quad (1)$$

де $T_k(x), T_e(y)$ — поліноми Чебишева.

Починаючи з другого порядку поліноми Чебишева розраховуються за рекурентною формулою [7]:

$$T_k(x) = 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad (2)$$

При цьому $T_0 = 1, T_1 = x$.

Коефіцієнти a_{ke} знаходять за МНК із визначенням оптимальної степені полінома, при цьому приймаються до уваги результати статистичної перевірки гіпотези про рівність нулю математичних очікувань оцінок $a_{ke}(x, y)$.

Вказані обчислювальні процедури добре висвітлені в спеціальній літературі [7].

II. Апроксимування сферичними функціями

При морфометричних дослідженнях рельєфних поверхонь з чітко вираженою структурою, наприклад у вигляді суперпозиції синусоподібних складових, доцільно застосовувати сферичні функції $f_{l,m}(r_i, \alpha_i, \beta_i)$, де r — радіус одиничної сфери, а α_i, β_i — полярні та азимутальні кути [9;10;11].

Неперервною функцією $f(\alpha, \beta)$ зручно представляти у вигляді суми ряду симетричних ортогональних сферичних функцій $K_l^m(\alpha, \beta)$:

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{l,m} C_l^m K_l^m(\alpha, \beta) \quad (3)$$

де C_l^m – коефіцієнт розкладу.

Сферичні функції $K_l^m(\alpha, \beta)$ отримуються з рекурентного співвідношення [10]:

$$K_l^m \cos \alpha = \left(\frac{l+1-m}{4(l+1)^2-1} \right)^{1/2} \cdot K_{l+1}^m + \left(\frac{e^2-m^2}{4e^2-1} \right)^{1/2} \cdot K_{l-1}^m \quad (4)$$

Залежність між сферичними і прямокутними координатами наступна:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \alpha \cos \beta \\ r \sin \alpha \sin \beta \\ r \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5)$$

III. Метод регуляризації

Вирішення задачі апроксимування в сферичних координатах наступне:

$$A c + v = f \quad (6)$$

де A – матриця системи сферичних функцій; c – вектор коефіцієнтів C_l^m ; f – вектор помірних значень $f = Z(x, y)$; v – випадковий вектор помилок.

За МНК розв'язок (6) має вигляд:

$$c = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T f \quad (7)$$

Проте в багатьох випадках таке стандартне рішення утруднене. Незначні зміни у вимірних величинах викликають значні флуктуації у визначуваних величинах, тобто має місце некоректність за Адамаром. Тому необхідно застосовувати метод регуляризації, запропонований академіком А. Тихоновим [12].

Для випадку застосування сферичних функцій і врахування текстурних рельєфних особливостей пропонується [12] застосовувати метод регуляризації у вигляді:

$$c_{\Theta} = (A^T \cdot A + \Theta Q)^{-1} \cdot A^T f \quad (8)$$

Θ – параметр регуляризації, що характеризує міру гладкості рельєфу.

Для отримання однозначного рішення приймемо, що серед усіх функцій, що проходять через експериментальні значення, шукана функція найбільш гладка. Будемо оцінювати гладкість рішення квадратичною формою $s = c^T Q c$, де Q – квадратна матриця, явний вигляд якої залежить від обраного критерію гладкості [6]. У відповідності з методом регуляризації академіка А. Тихонова, зі всієї множини рішень рівняння будемо вибирати найбільш гладке, залишаючи при цьому обмеженою величину $v^T v$, яка характеризує дисперсію шуму [12].

Стосовно вибору параметра регуляризації Θ немає однозначної думки. В даному випадку доцільно вибрати за критерій міри гладкості функціонал першого порядку – середню величину скалярного квадрату градієнта текстурної функції:

$$s = \frac{1}{4\pi} \int [\nabla f(g) \nabla f(g)] dg \quad (9)$$

де g – текстурна функція $g = f(\alpha, \beta)$, яка характеризує ступінь вертикального розчленування рельєфу, як відношення рельєфної поверхні до ідеально гладкої.

Згідно з теоремою Гріна – Остроградського справедливе співвідношення [9]:

$$\int_V [\nabla f(g) \nabla f(g)] dg + \int_V [\nabla f(g) \nabla^2 f(g)] dg = \int_S \overline{ds} [f(g) \nabla f(g)] dg \quad (10)$$

Поверхневий інтеграл в правій частині виразу (10) дорівнює нулю:

$$\int_V [\nabla f(g) \nabla f(g)] dg + \int_V [f(g) \nabla^2 f(g)] dg = 0 \quad (11)$$

Оскільки $\nabla f(g)$ перпендикулярний до вектора \overline{ds} на границі елементарної області, а апроксимуюча сферична функція є симетричною:

$$\int_V [\nabla f(g) \nabla f(g)] dg = - \int_V [f(g) \nabla^2 f(g)] dg \quad (12)$$

Отже:

$$s = \frac{1}{4\pi} \int [f(g) \nabla^2 f(g)] dg \quad (13)$$

Для сферичних функцій справедлива рівність:

$$\nabla^2 K_l^m(g) = -l(l+1) K_l^m(g) \quad (14)$$

Враховуючи цю обставину, а отже те, що сферичні функції утворюють повну систему ортогональних функцій на сфері одиничного радіуса, остаточно отримаємо:

$$s = \frac{1}{4\pi} \sum_{l,m} l(l+1) (C_l^m)^2 \quad (15)$$

Таким чином, матриця Q діагональна з елементами $g_{ii} = l(l+1)/4\pi$, а вираз $\frac{1}{4\pi} \sum_{l,m} l(l+1)$ означає слід матриці Q , тобто:

$$S = \text{tr} Q (C_l^m)^2 \quad (16)$$

Приклад ефективності і важливості 3D – згладжування показано на рис. 1 а, б, отриманому в програмному середовищі «LandSerf» [13].

IV. Теоретико – ймовірнісна оцінка рельєфу

Інформація, знята з рельєфної поверхні, повинна бути мінімальною за об'ємом, але водночас достатньою для визначення загальновідомих висотних параметрів та параметрів форми нерівностей [2].

Для цього необхідно знати двоаргументну функцію $h(x, y)$, що описує нерівності, як тривимірні об'єкти, а також її перші та другі похідні [6].

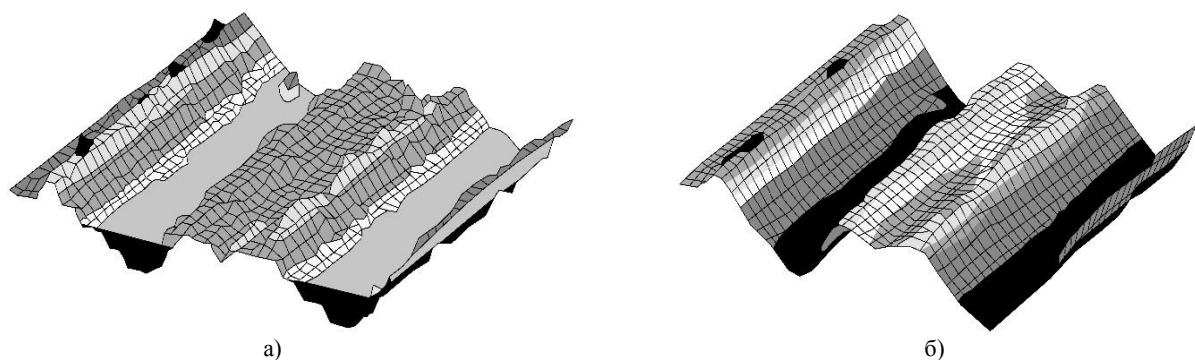


Рис. 1. Процес згладжування поверхні, що реконструюється а) вихідна поверхня; б) поверхня після функції згладжування

Позначимо:

$$h_1 = h(x, y); h_2 = \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}; h_3 = \frac{\partial h(x, y)}{\partial y};$$

$$h_4 = \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2}; h_5 = \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x \partial y}; h_6 = \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2}.$$

За величиною h_1 визначають такі висотні параметри, як середня висота нерівностей, h_2 і h_3 використовують для оцінки градієнта поверхні, площі поверхні, h_4 і h_6 – кривини вершин мікровиступів і т.д.

Для спрощення викладок припустимо, що величини h_1, h_2, \dots, h_6 випадкові і описуються однорідними випадковими полями двох змінних. Поверхні з детермінованим характером нерівностей є одним з граничних варіантів випадкових полів, коли їх показники (кроки, висоти і т.п.) мають постійні значення.

Вивчення геометричних характеристик нерівностей в теоретико-імовірнісному трактуванні потребує [14; 15] знань шестивимірної щільності спільного розподілу ймовірностей величин h_1, h_2, \dots, h_6 , що, в свою чергу, визначаються матрицею:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{vmatrix} \quad (17)$$

де k_{ij} – момент кореляції величин h_1, h_2, \dots, h_6 .

Теоретико – імовірнісний підхід опису рельєфної поверхні, в тому числі матрицею (17), справедливий для будь – якого типу поверхонь.

Розшифруємо моменти k_{ij} . Кореляційний момент двох випадкових величин знаходиться як математичне очікування добутку їх центрованих величин. Оскільки добуток величин h_i, h_j , які являють собою однорідні випадкові поля, дає їх взаємну кореляційну функцію $K_{ij}(\tau_1, \tau_2)$, то визначуваний момент кореляції знайдемо при $\tau_1, \tau_2 = 0$. Тобто:

$$k_{ij} = E\{[h_i(\cdot) - \bar{h}_i][h_j(\cdot) - \bar{h}_j]\} = E\{[h_i(x_1, y_1) - \bar{h}_i][h_j(x_2, y_2) - \bar{h}_j]\} \quad (18)$$

де E – математичне очікування;

$\tau_1 = x_2 - x_1; \tau_2 = y_2 - y_1; h_i, h_j$ – середні значення величин.

Припустимо, що $\bar{h}_i = \bar{h}_j = 0$ і оперуючи далі відхиленнями від середніх значень, матриця (17) набуде вигляду:

$$(M_{ij})tr = \begin{vmatrix} k_{11} & 0 & 0 & -k_{22} & -k_{23} & -k_{33} \\ & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{vmatrix} \quad (19)$$

Отримана матриця містить необхідну кількість вихідних параметрів топографічного подання поверхні рельєфу загального виду. Частковими випадками її можуть бути поверхні з детермінованим, випадковим та змішаним характером нерівностей, ізотропні, неізотропні і анізотропні.

Інший підхід імовірнісної оцінки рельєфу полягає в розрахунках кореляційних функцій (корелограм). Корелограми мають такі переваги: вони не випадкові, можуть бути описані математичними рівняннями, а також дозволяють виявляти детерміновану і випадкову складові.

Техніка відповідних розрахунків добре висвітлена в спеціальній технічній літературі [7;14;15].

В таблиці 1 наведені конкретні значення для імовірнісної характеристики рельєфу дослідної ділянки.

За отриманими даними побудовані корелограми (рис. 3 і табл. 2)

При такому підході важливим є встановлення «поведінки» значень інтервалів кореляції. В табл. 3 наведені значення інтервалів кореляції для 5 дослідних ділянок.

За даними таблиці 3 можна зробити висновок, що значення інтервалів кореляції однозначно залежить від напрямку φ_i . Тому доцільно для ілюстрації анізотропії рельєфу відображати зміну інтервалів кореляції у вигляді еліпса анізотропії, як це показано на рис. 4.

Таблиця 1. Значення кореляційної функції рельєфу дослідної ділянки

τ		0 π	0,1 π	0,2 π	0,3 π	0,4 π	0,5 π	0,6 π	0,7 π	0,8 π	0,9 π
0	$K(\tau)$	276.3828	286.1155	285.5888	320.6745	268.0402	213.8575	254.8493	161.4305	174.6947	186.3224
1	$K(\tau)$	242.2172	217.9458	229.6547	233.0171	168.4420	156.3030	162.2970	64.8241	127.0839	129.2001
2	$K(\tau)$	208.2681	159.3684	166.1328	197.5977	108.8714	106.1053	80.3188	32.5372	73.1661	112.0767
3	$K(\tau)$	174.5889	99.4519	113.8360	178.5899	100.4540	76.7796	53.8354	-0.9412	21.6411	88.6312
4	$K(\tau)$	149.4574	50.8585	67.6987	140.1052	80.1386	60.0964	42.9544	-1.5428	-6.1152	59.1919
5	$K(\tau)$	126.0148	19.6944	47.9173	104.5851	84.1689	41.6073	19.9175	11.3987	-1.7265	54.4382
6	$K(\tau)$	94.6761	-0.0620	45.8111	108.8117	40.1279	10.4771	-3.7791	37.5372	10.9941	47.6977
7	$K(\tau)$	69.8579	-4.7312	38.5601	94.5168	0.7153	-16.0001	-12.7160	39.4650	9.0103	33.1841
8	$K(\tau)$	43.8263	-11.2124	26.3298	89.1945	2.5185	-16.4722	-10.9064	11.5031	-6.0952	30.5755
9	$K(\tau)$	20.7626	-17.2405	19.9660	107.2508	-13.5258	-23.9203	-10.9657	13.6460	-21.8968	27.7421
10	$K(\tau)$	-6.7354	-18.4532	19.1983	76.5301	-11.4352	-23.2990	24.9065	-9.1080	-34.8317	32.0058

Таблиця 2. Значення кореляційної та апроксимуючої функцій рельєфу дослідної ділянки

τ	τ^2	$\cos\omega\tau$	$K'g(\tau)$	$K'c(\tau)$	$K'(\tau)$	$K(\tau)$	$K(\tau) - K'(\tau)$
0	0	1	108,65	130,258460677	238,908460677	242,795621977	-3,887161300
1	1	0,938167	90,52845	54,128682759	144,657136445	42,573893061	102,083243384
2	4	0,760314	65,15883	3,884114367	69,042947982	29,811100746	39,231847237
3	9	0,488436	37,17604	0,048128197	37,224171476	19,306153314	17,918018162
4	16	0,156155	10,55567	0,000102979	10,555773773	11,626860176	-1,071086403
5	25	-0,19544	-11,7331	0,000000038	-11,733145246	6,282535400	-18,015680646
6	36	-0,52286	-27,8784	0,000000000	-27,878389081	1,921930679	-29,800319761
7	49	-0,78562	-37,2024	0,000000000	-37,202443478	-2,443073923	-34,759369555
8	64	-0,95123	-40,0054	0,000000000	-40,005375903	-6,342007731	-33,663368172
9	81	-0,9992	-37,3217	0,000000000	-37,321710083	-9,391049949	-27,930660135
10	100	-0,92361	-30,6387	0,000000000	-30,638716308	-14,503055440	-16,135660867

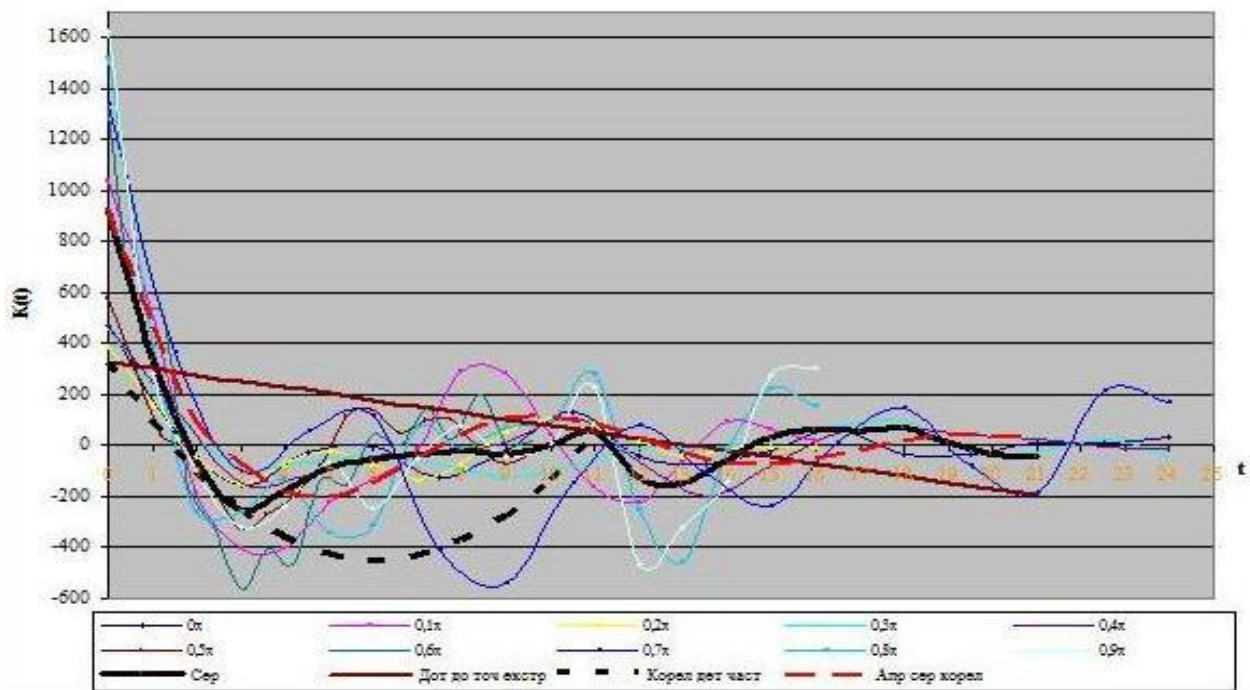


Рис. 3. Корелограма рельєфу дослідної ділянки

Таблиця 3. Значення інтервалів кореляції досліджуваних ділянок

Позначення		Значення інтервалів кореляції									
		0,0 π	0,1 π	0,2 π	0,3 π	0,4 π	0,5 π	0,6 π	0,7 π	0,8 π	0,9 π
Ділянка №1											
$\tau_{кор.}$	L	6	12	12	5	4	7	2	6	10	5
Ділянка №2											
$\tau_{кор.}$	L	8	8	5	3	3	5	5	5	6	10
Ділянка №3											
$\tau_{кор.}$	L	3	3	5	8	11	7	7	9	7	4
Ділянка №4											
$\tau_{кор.}$	L	5	5	7	11	10	9	9	6	9	7
Ділянка №5											
$\tau_{кор.}$	L	9	10	4	7	4	4	12	10	4	6
Ділянка №6											
$\tau_{кор.}$	L	16	15	15	16	12	14	7	4	4	9

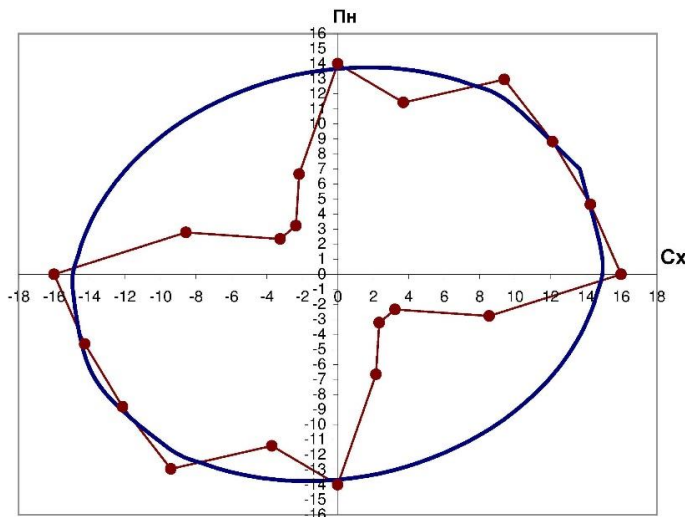


Рис. 4. Приклад характеристики анізотропії рельєфу

Висновки і перспективи подальших досліджень

1. Пропонується використовувати поліноми Чебишева для математичного моделювання ЦМР зі згладженим рельєфом. Для моделювання ЦМР з нестандартною текстурою, що характерна для мікрорельєфних форм доцільно використовувати сферичні функції.
2. Спільним для них є ортогональність і можливість побудови системи цих функцій з рекурентних співвідношень.
3. У випадку значного впливу «шуму» і виникнення певної некоректності пропонується застосовувати метод регуляризації, основою якого є функції висот і функції стрімкості. Таке поєднання дозволяє більш повно враховувати властивості рельєфу при його математичному моделюванні.
4. Аналіз морфометричних властивостей рельєфу із застосуванням корелограм має такі переваги. Корелограми не випадкові, можуть бути описані математично, дозволяють здійснювати поділ на детерміновану та випадкову складову.

ЛІТЕРАТУРА

1. Флоринский И.В. Точный метод расчета локальных характеристик рельефа / И.В. Флоринский // Геодезия и картография. – 2009. – №6. – С. 56–65.
2. Флоринский И.В. О точности вычислений в цифровом моделировании рельефа / И.В. Флоринский // Геодезия и картография. – 2008. – №6. – С. 28–32.
3. Рудий Р.М. Выбор признаков для классификации форм рельефа / Р.М. Рудий // Изв. Вузов.: Геодезия и аэрофотосъемка. – 1987. – №1. – с. 35–39.
4. Бурштинська Х.В. Колокація з умовами у цифровому моделюванні рельєфу / Х.В. Бурштинська // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2002. – Вип. 62. – С. 103–110.
5. Бурштинська Х.В. Теоретичні основи та експериментальні дослідження математичних функцій для побудови цифрових моделей рельєфу / Х.В. Бурштинська, О.С. Заяць // Вісник геодезії та картографії. – 2002. – №4. – С. 32–37.
6. Мельник В.М. Кількісна стереомікрофрактографія: Монографія [Текст] / В.М. Мельник, А.В. Шостак. – Вид. «Твердиня». – М. Луцьк, 2010. – 457 с.
7. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений / А.К. Митропольский. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
8. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
9. Корн Г. Справочник по математике. / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1970. – 720 с.
10. Никифоров А.Ф. Основы теории специальных функций // А.Ф. Никифоров, В.В. Уваров. – М.: Наука, 1974. – 303 с.
11. Bunge, H.J. Mathematische Methoden der Textur analyse / H.J. Bunge – Berlin: Academie Verlag, 1969. – 325 s.
12. Охріменко М.Г. Методи розв'язування некоректно поставлених задач // М.Г. Охріменко, О.А. Жуковська, О.О. Купка. – К.: Центр учб. літер., 2008. – 165 с.
13. Аверченков В.И. Метод компьютерной реконструкции рельефа поверхности интерпретацией сфокусированности изображений / В.И. Аверченков, Д.В. Чмыхов // Вестник БГТУ. – 2008. – №2(18). – С. 111–116.
14. Королюк В.С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1978. – 582 с.
15. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Исследование зависимостей. / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487с.

REFERENCES

1. Florinskiy, I.V. The exact method of calculation of the local characteristics of the relief / I.V. Florinskiy // Geodesy and cartography. – 2009. – №6. – P. 56–65.
2. Florinskiy, I.V. On the accuracy of the calculations in digital terrain modeling / I.V. Florinskiy // Geodesy and cartography. – 2008. – №6. – P. 28–32.
3. Rudi, R.M. Feature selection for classification of land forms / R.M. Rudi // Izvestiya Vuzov «Geodesy and aerophotography». – 1987. – №1. – P. 35–39.
4. Burshtynska, Kh.V. Collocation with conditions in digital terrain modeling / Kh.V. Burshtynska // Geodesy, Cartography and Aerial Photography. – 2002. – Is. 62. – P. 103–110.
5. Burshtynska, Kh.V. The theoretical basis and experimental study of mathematical functions to build digital elevation models / Kh.V. Burshtynska, O.S. Zayacz // Herald of Geodesy and Cartography. – 2002. – №4. – P. 32–37.
6. Melnyk, V.M. Quantitative stereomicrofracturing. Monograph [Text] / V.M. Melnyk, A.V. Shostak. – Pub. House «Tverdinya». – M. Lutsk, 2010. – 457 p.
7. Mitropolskiy, A.K. The technique of statistical computations / A.K. Mitropolskiy. – M.: Nauka, 1971. – 576 p.
8. Pashkovskiy, S. Computational appliace of Tchebychev's polynomials and series / S. Pashkovskiy. – M.: Nauka, 1983. – 384 p.
9. Korn, H. Guide in Mathematics / H. Korn, T. Korn – M.: Nauka, 1970. – 720 p.
10. Nikiforov, A.F. Foundations of the theory of special functions // A.F. Nikiforov, V.V. Uvarov. – M.: Nauka, 1974. – 303 p.
11. Bunge, H.J. Mathematische Methoden der Textur analyse / H.J. Bunge – Berlin: Academie Verlag, 1969. – 325 s.
12. Oxrimenko M.G. Methods of solving ill-posed problems // M.G. Oxrimenko, O.A. Zhukovsika, O.O. Kupka. – K.: Center of Educational Literature, 2008. – 165 p.
13. Averchenkov, V.I. The method of computer-aided reconstruction of the surface topography interpretation of focus of the images / V.I. Averchenkov, D.V. Chmykhov // Vestnik BGU. – 2008 – №2(18). – P. 111–116.
14. Korolyuk, V.S. The manual on the theory of probability and mathematical statistics / V.S. Korolyuk, N.I. Portenko, A.V. Skoro-khod, A.F. Turbin. – K.: Naukova dumka, 1978. – 582 p.
15. Ayvazyan, S.A. Applied Statistics: exploration of dependencies / S.A. Ayvazyan, I.S. Enyukov, L.D. Meshalkin. – M.: Publishing house "Finance and Statistics", 1985. – 487 p.

Mathematic–statistical analysis of morphometric characteristics of the relief

V. Melnik, Yu. Blinder, O. Piskunova

Abstract. The article deals with two methods of mathematical approximation of digital elevation models in a rectangular and spherical coordinate system. The first method offers the appliance of Chebyshev polynomials, the second – ordinary spherical functions without application of Legendre functions. The common features between these methods are orthogonality and possibility of getting the system of these functions by recurrence relations. In case of significant "noise" impact and the appearance of impropriety after Adamar, academician A. Tikhonov's regularized solution method is offered. The effectiveness of regularization is illustrated. Probabilistic estimation of morphometric characteristics of the relief is possible on the basis of receiving hexadimensional covariance matrix and application of a simplified version through calculation of variograms and planar diagrams of anisotropy.

Keywords: Chebyshev polynomials, spherical functions, regularization, variograms, anisotropy