

## TECHNICAL SCIENCES

### Оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных линиях положения, полученная имитационным моделированием

Б. М. Алексейчук, В. Е. Сикирин, Д. В. Астайкин

Национальный Университет «Одесская Морская Академия», Одесса, Украина  
Corresponding author. E-mail: burmaka-mob@ukr.net

Paper received 20.06.17; Accepted for publication 28.06.17.

**Аннотация.** С помощью имитационного моделирования получена оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных измерениях, вычисленных методом наименьших квадратов, в случае, когда погрешности линий положения подчиняются смешанным законам распределения. Вычислены значения эффективности координат по аналитическим выражениям в зависимости от существенного параметра распределения. Оценки эффективности координат судна, полученные имитационным моделированием, и рассчитанные по аналитическим выражениям, имеют хорошую сходимость.

**Ключевые слова:** избыточных измерения, эффективности координат судна, метод наименьших квадратов, смешанные законы распределения, имитационное моделирование.

**Введение.** Определение места судна с помощью нескольких изолиний обобщено с помощью метода линий положения, при котором изолиния заменяется линией положения в районе счислимой точки судна. При наличии избыточных линий положения выбор обсервованных координат производится таким образом, чтобы их точность была максимальной. Это достигается расчетом координат методом максимального правдоподобия, алгоритм расчета которого однозначно определяется законом распределения вероятностей погрешностей линий положения. Так как до недавнего времени считалось, что случайные погрешности измерений навигационных параметров, как и погрешности линий положения, подчиняются нормальному закону распределения вероятностей, то расчет обсервованных координат производится методом максимального правдоподобия для нормального закона. Однако в течение последних 30 лет исследования случайных погрешностей измерения навигационных параметров показали, что их законы распределения зачастую отличаются от закона Гаусса. Поэтому в случае расчета обсервованные координаты при избыточных линиях положения методом наименьших квадратов может происходить потеря их точности. Эффективность обсервованных координат, полученных при определении места судна по избыточным линиям положения и рассчитанных методом наименьших квадратов, характеризует потерю их точности при распределении погрешностей линий положения по закону отличному от закона Гаусса.

**Краткий обзор публикаций по теме.** В работах [1, 2] анализируются статистические данные погрешностей навигационных измерений, полученные в натурных наблюдениях, и показано, что погрешности не подчиняются нормальному закону распределения. Как указывается в работе [3], анализ статистических материалов показал, что предположение о распределении случайных погрешностей определения широты и долготы по закону Гаусса не является корректным и требует альтернативного подхода. Смешанные законы двух типов, альтернативные нормальному закону, предложены для описания случайных погрешностей навигационных измерений в работе [4], а в работе [5] с этой же целью предложен обобщенный закон Пуассона.

Оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных линиях положения произведена в работе [6], показано, что при смешанных законах распределения эффективность меньше единицы, и с ростом существенного параметра она стремится по величине к единице.

**Цель.** Цель настоящей статьи - проверка корректности аналитических выражений для оценки эффективности обсервованных координат судна при избыточных линиях положения с помощью имитационного моделирования.

**Материалы и методы.** Как показано в работе [7], анализ статистических материалов, полученных в натуральных наблюдениях в реальных условиях эксплуатации, показал, что погрешности измерений навигационных параметров подчиняются смешанным законам распределения двух типов, плотности которых имеют вид [4]:

$$f_1(x) = \frac{2^n \alpha^{n+\frac{1}{2}} n!}{\sqrt{2\pi} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \frac{1}{(x^2/2 + \alpha)^{n+1}}, \quad (n \leq 6)$$

$$f_2(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1) \alpha^{n+1}}{\sqrt{2} 2^{n+1} n!} \frac{1}{(x^2/2 + \alpha)^{n+3/2}}, \quad (n \leq 5) \quad (1)$$

где  $\alpha$  - масштабный параметр;  
 $n$  - существенный параметр.

При определении места судна при избыточных линиях положения, погрешности которых распределены по смешанным законам распределения, если обсервованные координаты рассчитываются методом наименьших квадратов, то их эффективность можно оценить с помощью выражения [8]:

$$e = \frac{q^2}{ps},$$

где несобственные интегралы  $p, q$  и  $s$  имеют следующий вид:

$$p = \int_{R_1} f(\xi) \left\{ \left[ \frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \xi} \right]^2 \right\} d\xi,$$

$$q = \int_{R_1} f(\xi) \left\{ \frac{\left[ \frac{\partial^2 \phi(\xi)}{\partial \xi^2} \phi(\xi) \right] \phi(\xi) - \left[ \frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \xi} \right]^2}{\phi^2(\xi)} \right\} d\xi \quad \text{и}$$

$$s = \int_{R_1} \frac{\left[ \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \right]^2}{f(\xi)} d\xi,$$

причем  $\phi(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$  - плотность нормального распределения;  $f(\xi)$  - плотность смешанного закона распределения (1).

В книге [9] показано, что для смешанного закона распределения первого типа с плотностью  $f_1(x)$  выражения (1) несобственные интегралы

$$q = -\frac{1}{\sigma^2}, p = \frac{1}{\sigma^4} \frac{2\alpha}{2n-1}, s = \frac{(n+1)(2n+1)}{2\alpha(n+2)}.$$

Следовательно, в этом случае эффективность:

$$e_1 = 1 - \frac{3}{2n^2 + 3n + 1}. \quad (2)$$

В той же книге получено выражение для эффективности смешанного закона распределения второго типа с плотностью  $f_2(x)$  выражения (1), причем:

$$q = -\frac{1}{\sigma^2}, p = \frac{\alpha}{n\sigma^4}, s = \frac{(2n+3)(n+1)}{\alpha(2(n+5))}.$$

Выражение для эффективности:

$$e_2 = 1 - \frac{3}{2n^2 + 5n + 3}. \quad (3)$$

Анализ выражений (2) и (3) показывает, что эффективности  $e_1$  и  $e_2$  минимальные при  $n=5$  и возрастают с увеличением  $n$ .

**Результаты и их обсуждение.** С целью оценки эффективности обсервованных координат, полученных при избыточных линиях положения и рассчитанных методом наименьших квадратов проводилось имитационное компьютерное моделирование. При этом рассматривались случаи, когда погрешности линий положения подчинялись смешанным законам первого и второго типа. Для проведения имитационного моделирования использовался следующий алгоритм. По выбранному закону распределения вначале генерировалась выборка погрешностей ЛП, содержащая 1000 членов. Расчет координат каждой обсервованной точки производился по 8 линиям положения, элементы которых (переносы  $r_i$  и направления градиентов  $\alpha_i$ ) задавались относительно истинного места судна. Следовательно, переносы  $r_i$  линий положения равны их погрешностям  $\xi_i$ . Направления градиентов  $\alpha_i$  при имитационном моделировании выбирались равными  $30^\circ, 75^\circ, 120^\circ, 165^\circ, 210^\circ, 255^\circ, 300^\circ$  и  $345^\circ$ .

Из сгенерированной выборки получили 125 обсервованных точек, приращения координат X и Y которых являются проекциями векториальной погрешности, позволяющим рассчитать ковариационную матрицу векториальной погрешности обсервации. Формирование 125 обсервованных точек повторялось четыре раза, а их полученные координаты сохранялись, в результате чего накапливалась выборка  $V_{500}$  координат векториальной погрешности численностью 500 значений. Учитывая, что векториальная погрешность определяется относительно истинного места судна, при имитационном моделировании для оценки эффективности обсервованных координат необходимо использовать не дисперсии проекций X и Y, а их вторые начальные моменты.

Расчет обсервованных координат компьютерной программой имитационного моделирования производился

как методом наименьших квадратов, так и методом максимального правдоподобия. В работе [9] приведены алгоритмы расчета координат обоими упомянутыми методами. Так проекции X и Y векториальной погрешности методом наименьших квадратов рассчитываются с помощью выражений:

$$X = \frac{CD - BE}{AD - B^2}, Y = \frac{AE - BC}{AD - B^2}, \quad (4)$$

где  $A = \sum_{i=1}^n \frac{\sin^2 \alpha_i}{\sigma_i^2}, B = \sum_{i=1}^n \frac{\cos \alpha_i \sin \alpha_i}{\sigma_i^2},$

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{\sin \alpha_i}{\sigma_i^2} r_i, D = \sum_{i=1}^n \frac{\cos^2 \alpha_i}{\sigma_i^2}, E = \sum_{i=1}^n \frac{\cos \alpha_i}{\sigma_i^2} r_i.$$

В случае расчета координат методом наибольшего правдоподобия использовались выражения:

$$X = \frac{[\sum_{i=1}^n \frac{\sin \alpha_i}{(\xi_i^2 / 2 + \lambda_i)} (r_i - Y \cos \alpha_i)]}{\sum_{i=1}^n \frac{\sin^2 \alpha_i}{(\xi_i^2 / 2 + \lambda_i)}}, \quad (5)$$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\cos \alpha_i}{(\xi_i^2 / 2 + \lambda_i)} (r_i - X \sin \alpha_i)}{\sum_{i=1}^n \frac{\cos^2 \alpha_i}{(\xi_i^2 / 2 + \lambda_i)}}$$

которые составляют систему нелинейных уравнений и решение находится методом простых итераций.

При имитационном моделировании среднеквадратическое отклонение погрешности линии положения принималась равным 5. Для оценки эффективности обсервованных координат судна рассчитанных методом наименьших квадратов, погрешности линий положения которых подчиняются смешанным распределениям, генерировались выборки погрешностей ЛП по выбранному смешанному закону, а затем с помощью (4) рассчитывались обсервованные координаты методом наименьших квадратов и формировалась выборка  $V_{500}^{МНК}$  координат векториальной погрешности. По значениям тех же погрешностей производился расчет обсервованных координат методом максимального правдоподобия (5) и формировалась выборка  $V_{500}^{ММП}$  составляющих векториальной погрешности. По данным выборкам производился расчет математических ожиданий и вторых начальных моментов  $a_{2x}^{МНК}, a_{2y}^{МНК}$  и  $a_{2x}^{ММП}, a_{2y}^{ММП}$  составляющих X и Y векториальной погрешности. После чего вычислялись значения вторых начальных моментов  $a_{2R}^{МНК} = a_{2x}^{МНК} + a_{2y}^{МНК}$  и  $a_{2R}^{ММП} = a_{2x}^{ММП} + a_{2y}^{ММП}$  модуля векториальной погрешности, полученные соответственно при использовании метода наименьших квадратов и метода максимального правдоподобия. При имитационном моделировании эффективность обсервованных координат  $e_M$ , полученных методом наименьших квадратов, определяется отношением вторых начальных моментов  $a_{2R}^{ММП}$  и

$$a_{2R}^{МНК}, \text{ т. е. } e_M = \frac{a_{2R}^{ММП}}{a_{2R}^{МНК}}. \text{ Значения эффективности}$$

$e_M$  сравниваются с соответствующими значениями эффективности  $e_T$ , рассчитанными теоретически по аналитическим выражениям (2) или (3).

В результате имитационного моделирования получены значения эффективности  $e_M^{(1)}$  для распределения погрешностей линий положения по смешанному закону первого типа, которые сопоставлялись с рассчитанными по (2) значениями  $e_T^{(1)}$ . В табл. 1 показаны зависимости эффективности  $e_M^{(1)}$ , полученной при имитационном моделировании и  $e_T^{(1)}$ , рассчитанной аналитически по формуле (2), от значения существенного параметра  $n$ .

**Таблица 1.** Эффективности  $e_T^{(1)}$  и  $e_M^{(1)}$  смешанного распределения первого типа

n	1	2	3	4	5	6
$e_T^{(1)}$	0,5	0,8	0,893	0,934	0,955	0,968
$e_M^{(1)}$	0,507	0,626	0,704	0,791	0,843	0,890
$\delta e^{(1)} \%$	14	21,8	21,2	15,3	11,7	8

Анализ табл. 1 показывает, что процентное расхождение между эффективностями  $e_T^{(1)}$  и  $e_M^{(1)}$  не превосходит 21,8%.

Для распределения погрешностей линий положения по смешанному закону второго типа также было проведено имитационное моделирование, причем значения эффективности  $e_M^{(2)}$ , полученные при имитационном моделировании сопоставлялись со значениями  $e_T^{(2)}$ , которые рассчитаны по формуле (3). В табл. 2 показаны

зависимости эффективности  $e_M^{(2)}$  имитационного моделирования и  $e_T^{(2)}$ , рассчитанной аналитически, от значения существенного параметра  $n$ .

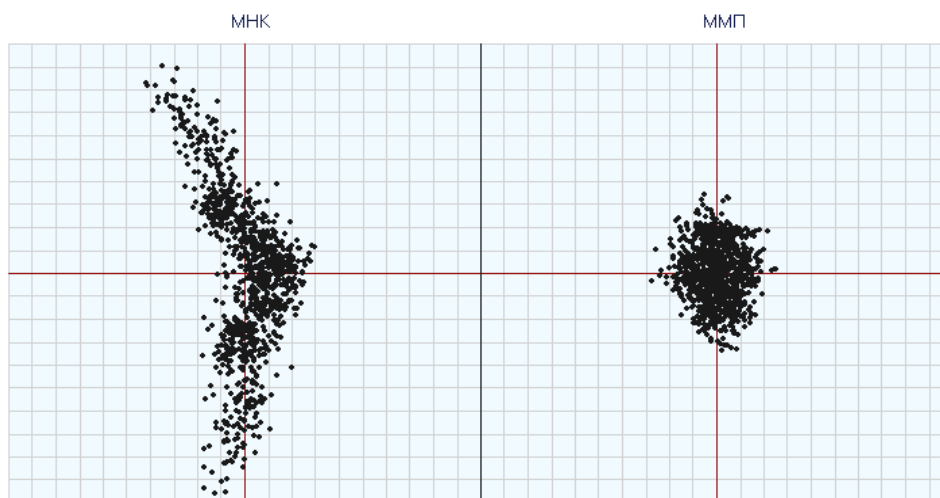
**Таблица 2.** Эффективности  $e_T^{(2)}$  и  $e_M^{(2)}$  смешанного распределения второго типа

n	1	2	3	4	5
$e_T^{(2)}$	0,7	0,857	0,917	0,945	0,962
$e_M^{(2)}$	0,576	0,670	0,752	0,825	0,867
$\delta e^{(2)} \%$	17,7	21,8	18	12,7	9,9

Как показывает анализ табл. 2, расхождение между эффективностями  $e_T^{(2)}$  и  $e_M^{(2)}$  в процентном отношении меньше 22,0%. Проведенное имитационное моделирование показало хорошую сходимость оценок эффективностей, рассчитанных по аналитическим выражениям и полученных имитационным моделированием, что подтверждает корректность аналитического метода оценки эффективности обсервованных координат, рассчитанных методом наименьших квадратов.

При имитационном моделировании предусмотрено графические отображения рассеяния обсервованных точек относительно математического ожидания. Здесь в качестве примера на рис. 1 приведено рассеяние обсервованных точек, погрешности линий положения которых распределены по смешанному закону второго типа с существенным параметром  $n=2$  (левый рисунок), причем расчет координат обсервованных точек производился методом наименьших квадратов, а на правом рисунке - методом максимального правдоподобия.

Таким образом, результаты имитационного моделирования подтвердили корректность аналитических выражений оценки эффективности обсервованных координат, рассчитанных методом наименьших квадратов при распределении погрешностей линий положения по смешанным законам обоих типов.



**Рис. 1.** Обсервованные точки, полученные МНК и ММП при  $n=2$

**Выводы**

1. Приведены аналитические выражения плотности смешанных законов обоих типов распределения вероятностей погрешностей навигационных измерений, кото-

рые являются альтернативными закону распределения Гаусса.

2. Получены формулы для оценки эффективности обсервованных координат судна при избыточных измере-

ниях, вычисленных методом наименьших квадратов, в случае, когда погрешности линий положения подчиняются смешанным законам распределения, и рассчитаны численные значения эффективности в зависимости от существенного параметра распределения.

3. С помощью имитационного моделирования рассчитаны значения эффективности обсервованных координат судна, полученных по восьми линиям положения,

погрешности которых подчиняются смешанным законам распределения.

4. Оценки эффективности координат судна, полученные имитационным моделированием, и рассчитанные по аналитическим выражениям, имеют хорошую сходимость, что подтверждает корректность аналитических выражений оценки обсервованных координат.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кондрашихин В.Т. Определение места судна / Кондрашихин В.Т. - М.: Транспорт, 1989. - 230с.
2. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation / Hsu D. A. // The Journal of Navigation. – Vol. 32.- № 3. – P. 426 - 429.
3. Monteiro Luis. What is the accuracy of DGPS? / Sardinia Monteiro Luis, Moore Terry, Hill Chris. // J. Navig. 2005. 58, № 2, p. 207-225.
4. Астайкин Д.В. Идентификация законов распределения навигационных погрешностей смешанными законами двух типов / Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Автоматизация судовых технических средств: науч. -техн. сб. – 2014. – Вып. 20. Одесса: ОНМА. – С. 3 – 9.
5. Сикирин В.Е. Описание навигационных погрешностей с помощью обобщенного распределения Пуассона/ Сикирин В.Е.// Судовождение: Сб. научн. трудов./ОНМА, Вып. 26. – Одесса: «ИздатИнформ», 2016 - С. 152 – 156.
6. Бурмака И.А. Оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных измерениях / Бурмака И.А., Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Вестник Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. Санкт-Петербург.– 2016. – выпуск 1 (35). – С. 24 - 29.
7. Алексейчук Б.М. Идентификация закона распределения погрешностей измерений / Алексейчук Б.М., Пасечнюк С.С. // Судовождение: Сб. научн. трудов./ ОНМА, Вып. 27. – Одесса: «ИздатИнформ», 2016 - С.
8. Мудров В.М. Методы обработки измерений/ Мудров В.М., Кушко В.Л. - М.: Советское радио, 1976. -192 с.
9. Астайкин Д.В. Оценка точности координат судна при избыточных измерениях/ Астайкин Д.В., Сикирин В.Е., Ворохобин И.И., Алексейчук Б.М. – Saarbrucken, Deutschland/ Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 с.

#### REFERENCES

1. Kondrashikhin V.T. Location of ship / Kondrashikhin V.T. - M.: Transport, 1989. – 230s.
3. Monteiro Luis. What is the accuracy of DGPS? / Sardinia Monteiro Luis, Moore Terry, Hill Chris. // J. Navig. 2005. 58, № 2, p. 207-225.
4. Astayrin D.V. Authentication of laws of distributing of navigation errors by the mixed laws of two types /Astayrin D.V., Alekseychuk B.M.// Avtomatizatsiya sudovyh tehnicyskikh sredstv: nauch.-tehn. sb. – 2014. – Vyp. 20. Odessa: ONMA. – P. 3 – 9.
5. Sikirin V.E. Description of navigation errors by the generalized distributing of Puasson / Sikirin V.E.// Sudovozhdenie: Sb. nauchn. trudov./ONMA, Vyp. 26. – Odessa: «IzdatInform», 2016 - P. 152 – 156.
6. Burmaka I.A. Estimation of efficiency of coordinates of ship at the surplus measuring / Burmaka I.A., Astaykin D.V., Alekseychuk B.M. // Vestnik Gosudarstvennogo univtrsiteta morskogo i rechnogo flota im. admiral S.O. Makarova. Sankt-Peterburg.– 2016. – vypusk 1 (35). – P. 24 - 29.
7. Alekseychuk B.M. Authentication of law of distributing of errors of measuring / Alekseychuk B.M., Pasechnyuk S.S. // Sudovozhdenie: Sb. nauchn. trudov./ONMA, Vyp. 27. – Odessa: «IzdatInform», 2017 - P. 10 – 14.
8. Mudrov V.M. Methods of treatment of measurings / Mudrov V.M., Kushko V.L. - M.: Sovetskoe radio, 1976. -192 p.
9. Astayrin D.V. Estimation of exactness of coordinates of ship at the surplus measuring / Astayrin D.V., Sikirin V.E., Vorokhobin I.I., Alekseychuk B.M. – Saarbrucken, Deutschland/ Germaniya: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 p.

#### Estimation of efficiency of coordinates of ship at the surplus lines of position, got the imitation design

**B. M. Alekseychuk, V. E. Sikirin, D. V. Astaykin**

**Abstract.** By the imitation design estimation of efficiency of coordinates of ship at the surplus measuring calculated by a least-squares method is got, in the case when the errors of lines of position submit to the mixed laws of distributing. The values of efficiency of coordinates on analytical expressions depending on the substantial parameter of distributing are calculated. Estimations of efficiency of coordinates of ship, got the imitation design, and expected on analytical expressions, good coincidence is had.

**Keywords:** surplus measuring, efficiency of coordinates of ship, least-squares method, mixed laws of distributing, imitation design.