Вотякова Л. А., Дьогтєва І. О.

Математична модель одноканальної системи масового обслуговування із зростаючим надходженням вимоги

Вотякова Леся Андріївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Дьогтєва Ірина Оксентіївна, аспірант
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

Анотація. В роботі представлена математична модель одноканальної системи масового обслуговування, для якої час надходження вимоги складається з двох етапів.

Ключові слова: *система масового обслуговування, ланцюг Маркова, перехідні ймовірності, показниковий розподіл*

Вимоги практики вже майже півстоліття висувають перед теорією масового обслуговування велике число постановок задач [1]. Кожна нова постановка має за мету побудову математичної моделі, яка б відображала істинний характер досліджуваних явищ. Найбільш ефективним у цьому плані виявився інструментарій, розроблений в теорії випадкових процесів і особливо марковських [2].

Процеси, у яких переходи визначаються вкладеним ланцюгом Маркова, а час перебування у кожному стані показниково розподілена випадкова величина, виявились придатними для описання функціонування найрізноманітніших систем [1-5].

Новизна пропонованої тут математичної моделі у характері вхідного потоку [3-4]. Якщо стандартний підхід передбачає, що вхідний потік є рекурентний, то в нашій роботі час надходження вимоги складається з часу підготовки вимоги і часу власне надходження (транспортування) її, причому тривалість кожного стану є показниково розподілена випадкова величина.

Зрозуміло, що за цих умов функціонування такої системи описується марковським процесом, а тому при знаходженні основних ймовірнісних характеристик були використані методи теорії марковських процесів.

Нехай на обслуговуючий пристрій надходить рекурентний потік вимог. Час надходження вимоги має функцію розподілу

$$F(t)=\begin{cases} 0, якщо t\le 0, \\ 1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_1 t}, якщо t>0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ ($\lambda_1\ne\lambda_2$). Якщо вимога надходить в момент, коли обслуговуючий пристрій вільний, то вона негайно потрапляє на обслуговування і обслуговується час η із функцією розподілу

$$G(t)=\begin{cases} 0, якщо t\le 0, \\ 1-e^{-\mu t}, якщо t>0, \end{cases} \quad (2)$$

причому випадкова велична η не залежить від вхідного потоку. Якщо ж вимога надходить в момент, поки пристрій зайнятий, то вона втрачається.

Оскільки час надходження вимоги є сумою двох незалежних випадкових величин ξ_1 і ξ_2, то будемо вважати, що ξ_1 – час підготовки вимоги до відправлення (має показниковий розподіл з параметром λ_1), ξ_2 – час надходження вимоги (має показниковий розподіл з параметром λ_2). У зв'язку з цим функціонування системи можна описати у такий спосіб. Система може перебувати у станах:

e_1 – система вільна, йде підготовка до відправлення вимоги, перебуває у цьому стані час ξ_2 і переходить із ймовірністю одиниця в другий стан;

e_2 – система вільна, вимога обслуговується, перебуває у цьому стані час $\min(\xi_1,\eta)$ (вважаємо, що відправник дістає інформацію про прибуття вимоги і починає готувати наступну) і переходить в стан e_1 з ймовірністю

$$p_{31}=P(\eta<\xi_1)=\frac{\mu}{\lambda_1+\mu} \quad (3)$$

або у стан e_4 з ймовірністю

$$p_{34}=P(\xi_1<\eta)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu}; \quad (4)$$

e_4 – вимога продовжує обслуговуватись, перебуває у цьому стані час $\min(\xi_2,\eta)$ і переходить у стан e_2 з ймовірністю

$$p_{42}=P(\eta<\xi_2)=\frac{\mu}{\lambda_2+\mu} \quad (5)$$

або у стан e_3 з ймовірністю

$$p_{43}=P(\xi_2<\eta)=\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu}. \quad (6)$$

Час перебування системи у станах e_1, e_2, e_3, e_4 має показниковий розподіл відповідно з параметрами λ_1, λ_2, $\lambda_1+\mu$, $\lambda_2+\mu$.

Таким чином, функціонування досліджуваної системи масового обслуговування описується марковським процесом $\xi(t)$, множиною станів якого є множина $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, граф його можливих переходів має вигляд

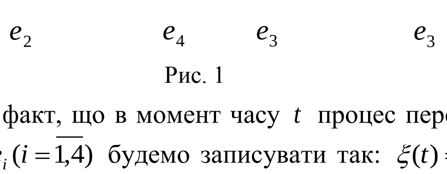

Рис. 1

Той факт, що в момент часу t процес перебуває у стані $e_i\,(i=\overline{1,4})$ будемо записувати так: $\xi(t)=i$, зокрема згідно з нашим припущенням $\xi(0)=1$. Переходи здійснюються згідно з вкладеним ланцюгом Маркова, який задається такою матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu}{\lambda_1+\mu} & 0 & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu} \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda_2+\mu} & \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Основними характеристиками процесу $\xi(t)$ є ймовірності того, що процес у момент часу t знаходиться у стані e_j за умови, що у початковий момент він знаходиться у стані e_i. Позначимо їх

$$P_{ij}(t) = P(\xi(t) = j \mid \xi(0) = i).$$

Скориставшись формулою повної ймовірності, складемо систему функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} &P_{11}(t+\Delta t) = P_{11}(t)P(\xi_1 > \Delta t) + P_{13}(t)P(\eta < \Delta t)P(\xi_1 > \Delta t) + o(\Delta t), \\ &P_{12}(t+\Delta t) = P_{11}(t)P(\xi_1 < \Delta t) + P_{12}(t)P(\xi_2 > \Delta t) + P_{14}(t)P(\eta < \Delta t)P(\xi_2 > \Delta t) + o(\Delta t), \\ &P_{13}(t+\Delta t) = P_{12}(t)P(\xi_2 < \Delta t) + P_{13}(t)P(\eta > \Delta t)P(\xi_1 > \Delta t) + P_{14}(t)P(\eta > \Delta t)P(\xi_2 < \Delta t) + o(\Delta t), \\ &P_{14}(t+\Delta t) = P_{13}(t)P(\eta > \Delta t)P(\xi_1 < \Delta t) + P_{14}(t)P(\eta < \Delta t)P(\xi_2 < \Delta t) + o(\Delta t). \end{aligned} \qquad (8)$$

Звідки дістанемо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} P_{11}'(t) = -\lambda_1 P_{11}(t) + \mu P_{13}(t), \\ P_{12}'(t) = \lambda_1 P_{11}(t) - \lambda_2 P_{12}(t) + \mu P_{14}(t), \\ P_{13}'(t) = \lambda_2 P_{12}(t) - (\lambda_1+\mu)P_{13}(t) + \lambda_2 P_{14}(t), \\ P_{14}'(t) = \lambda_1 P_{13}(t) - (\lambda_2+\mu)P_{14}(t). \end{cases} \qquad (9)$$

Її характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} x+\lambda_1 & 0 & -\mu & 0 \\ -\lambda_1 & x+\lambda_2 & 0 & -\mu \\ 0 & -\lambda_2 & x+\lambda_2+\mu & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & x+\lambda_2+\mu \end{vmatrix} = x^4 + 2(\lambda_1+\lambda_2+\mu)x^3 +$$

$$+((\lambda_1+\lambda_2+\mu)^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu)x^2 +$$

$$+(\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 + 3\lambda_1\lambda_2\mu + \lambda_1^2\mu + \lambda_1\mu^2 + \lambda_2\mu^2)x = 0.$$

Очевидно, що $x_1 = 0$, $x_2 = -(\lambda_1+\lambda_2+\mu)$ – корені цього рівняння. Ще два корені рівняння дістанемо з рівняння $x^2 + (\lambda_1+\lambda_2+\mu)x + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu = 0$,

тобто $x_{3,4} = \frac{1}{2}(-(\lambda_1+\lambda_2++\mu) \pm$

$\pm\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\mu^2-2\lambda_1\lambda_2-2\lambda_1\mu-2\lambda_2\mu})$.

Тоді загальний розв'язок системи (9) подається у вигляді:

$$\begin{aligned} &P_{11}(t) = c_{11} + c_{12}e^{x_2 t} + c_{13}e^{x_3 t} + c_{14}e^{x_4 t}, \\ &P_{12}(t) = c_{21} + c_{22}e^{x_2 t} + c_{23}e^{x_3 t} + c_{24}e^{x_4 t}, \\ &P_{13}(t) = c_{31} + c_{32}e^{x_2 t} + c_{33}e^{x_3 t} + c_{34}e^{x_4 t}, \\ &P_{14}(t) = c_{41} + c_{42}e^{x_2 t} + c_{43}e^{x_3 t} + c_{44}e^{x_4 t}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Оскільки $\mathrm{Re}\, x_k < 0$ для $k = 2,3,4$, то існують границі $\lim_{t\to+\infty} P_{1k}(t) = c_{k1}$ $(t = \overline{1,4})$, які позначимо відповідно π_1, π_2, π_3, π_4 (стаціонарні ймовірності).

Стаціонарні характеристики $\pi_k (k = \overline{1,4})$ можна знайти за формулами:

$$\pi_k = \frac{p_k m_k}{p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 + p_4 m_4}, \qquad (11)$$

де p_1, p_2, p_3, p_4 – стаціонарні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова, що задається матрицею (7), $m_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, $m_2 = \frac{1}{\lambda_2}$, $m_3 = \frac{1}{\lambda_3}$, $m_4 = \frac{1}{\lambda_4}$ – середній час, який процес $\xi(t)$ проводить відповідно у станах e_1, e_2, e_3, e_4. Стаціонарні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова є розв'язок системи:

$$\begin{cases} p_1 = p_3 \frac{\mu}{\lambda_1+\mu}, \\ p_2 = p_1 + p_4 \frac{\mu}{\lambda_2+\mu}, \\ p_3 = p_2 + p_4 \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu}, \\ p_4 = p_3 \frac{\lambda}{\lambda_1+\mu}, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \end{cases} \qquad (12)$$

яку розв'яжемо графо-аналітичним методом [6].

За графом переходів вкладеного ланцюга Маркова побудуємо нижні решітки кожної вершини і для них знайдемо індекси:

для першої вершини

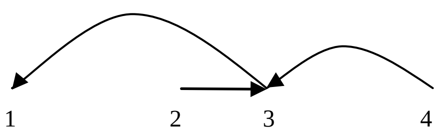

Рис. 2

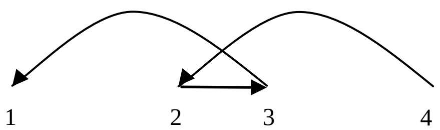

Рис. 3

$$I_1 = \frac{\mu}{\lambda_1+\mu}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu} + \frac{\mu}{\lambda_1+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda_2+\mu} = \frac{\mu}{\lambda_1+\mu}, \qquad (13)$$

для другої вершини

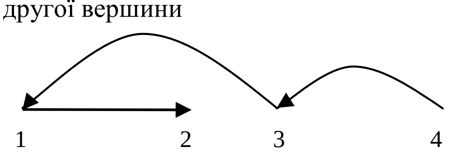

Рис. 4

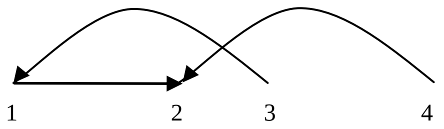

Рис. 5

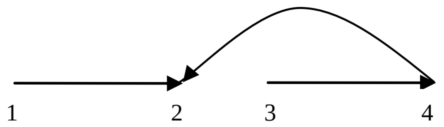

Рис. 6

$$I_2 = \frac{\mu}{\lambda_1+\mu}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu} + \frac{\mu}{\lambda_1+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda_2+\mu} + + \frac{\mu}{\lambda_2+\mu}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu} = \frac{\mu}{\lambda_2+\mu} + \frac{\mu}{\lambda_1+\mu}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu}, \qquad (14)$$

для третьої вершини

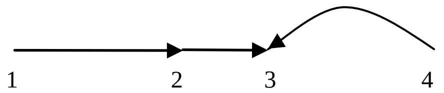

Рис. 7

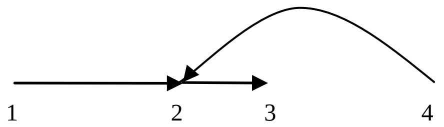

Рис. 8

$$I_3 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu} + \frac{\mu}{\lambda_2+\mu} = 1, \qquad (15)$$

для четвертої вершини

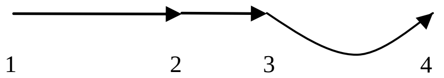

Рис. 9

$$I_4 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu}. \qquad (16)$$

Тоді $p_k = \frac{I_k}{I}$, де

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2 + \frac{\mu}{\lambda_2+\mu} + \frac{\mu}{\lambda_1+\mu} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu}, \qquad (17)$$

точніше

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda_2\mu+\mu^2}{2\lambda_1\lambda_2+3\lambda_1\mu+3\lambda_2\mu+3\mu^2}, \\ p_2 &= \frac{\lambda_1\mu+\mu^2+\lambda_2\mu}{2\lambda_1\lambda_2+3\lambda_1\mu+3\lambda_2\mu+3\mu^2}, \\ p_3 &= \frac{\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\mu+\mu^2+\lambda_2\mu}{2\lambda_1\lambda_2+3\lambda_1\mu+3\lambda_2\mu+3\mu^2}, \\ p_4 &= \frac{\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\mu}{2\lambda_1\lambda_2+3\lambda_1\mu+3\lambda_2\mu+3\mu^2}. \end{aligned} \qquad (18)$$

Скориставшись формулою (11), маємо

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{\Lambda}(\lambda_2{}^2\mu+\lambda_2\mu^2), \\ \pi_2 &= \frac{1}{\Lambda}(\lambda_1{}^2\mu+\lambda_1\mu^2+\lambda_1\lambda_2\mu), \\ \pi_3 &= \frac{1}{\Lambda}(\lambda_1\lambda_2{}^2+\lambda_1\lambda_2\mu), \pi_4 = \frac{1}{\Lambda}\lambda_1{}^2\lambda_2, \end{aligned} \qquad (19)$$

де

$$\Lambda = \lambda_1{}^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2{}^2 + 2\lambda_1\lambda_2\mu + \lambda_1\mu^2 + \lambda_1{}^2\mu + \lambda_2{}^2\mu + \lambda_2\mu^2.$$

Нарешті, врахувавши, що

$P_{11}(0)=1$, $P_{12}(0)=P_{13}(0)=P_{14}(0)=0$, $P_{11}{}'(0)=-\lambda_1$, $P_{12}{}'(0)=\lambda_1$, $P_{13}{}'(0)=P_{14}{}'(0)=0$, $P_{11}{}''(0)=\lambda_1{}^2$, $P_{12}{}''(0)=-\lambda_1{}^2-\lambda_1\lambda_2$, $P_{13}{}''(0)=\lambda_1\lambda_2$, $P_{14}{}''(0)=0$, маємо чотири системи для визначення $c_{ik}(i=\overline{1,4}, k=2,3,4)$

$$\begin{cases} c_{12}+c_{13}+c_{14}=1-\pi_1, \\ x_2c_{12}+x_3c_{13}+x_4c_{14}=-\lambda_1, \\ x_2{}^2c_{12}+x_3{}^2c_{13}+x_4{}^2c_{14}=\lambda_1{}^2, \end{cases} \qquad (20)$$

$$\begin{cases} c_{22}+c_{23}+c_{24}=-\pi_2, \\ x_2c_{22}+x_3c_{23}+x_4c_{24}=\lambda_1, \\ x_2{}^2c_{22}+x_3{}^2c_{23}+x_4{}^2c_{24}=-\lambda_1{}^2, \end{cases} \qquad (21)$$

$$\begin{cases} c_{32}+c_{33}+c_{34}=-\pi_3, \\ x_2c_{32}+x_3c_{33}+x_4c_{34}=0, \\ x_2{}^2c_{32}+x_3{}^2c_{33}+x_4{}^2c_{34}=0, \end{cases} \qquad (22)$$

$$\begin{cases} c_{42}+c_{43}+c_{44}=-\pi_4, \\ x_2c_{42}+x_3c_{43}+x_4c_{44}=0, \\ x_2{}^2c_{42}+x_3{}^2c_{43}+x_4{}^2c_{44}=\lambda_1\lambda_2. \end{cases} \qquad (23)$$

Таким чином, побудовані перехідні ймовірносні характеристики, які повністю описують функціонування одноканальної системи з двоетапним надходженням вимоги.

ЛІТЕРАТУРА (REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И. Н. Введения в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1966. – 431с.

Gnedenko B.V., Kovalenko I. N. Vvedeniya v teoriyu massovogo obsluzhivaniya [Introduction to queuing theory]. – M.: Nauka, 1966. – 431 s.

2. Боровков А.А. Вероятностные методы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 368с.

Borovkov A.A. Veroyatnostnyye metody v teorii massovogo obsluzhivaniya [Probabilistic methods in queuing theory]. – M.: Nauka, 1972. – 368 s.

3. Породников В.Д., Шаташвили А.Д. Об одной системе с изменяющимся входным потоком и групповым обслуживанием // Тез. докл. XXI школы-коллоквиум по т. в. и м. ст.: Тбилиси, 1987. – с.37.

Porodnikov V.D., Shatashvili A.D. Ob odnoy sisteme s izmenyayushchimsya vkhodnym potokom i gruppovym obsluzhivaniyem [About one of a system with a variable input stream and group maintenance] // Tez. dokl. XXI shkoly-kollokvium po t. v. i m. st.: Tbilisi, 1987. – s. 37.

4. Породников В.Д., Шаташвили А.Д. Исследование систем массового обслуживания с переключаемым режимом работы, зависящий от длины очереди // В кн. Эргодическая теория марковских процессов. Всесоюзная школа-семинар, т. докладов Кедвел, 1987. – с. 44-45.

Porodnikov V.D., Shatashvili A.D. Issledovaniye sistem massovogo obsluzhivaniya s pereklyuchayemym rezhimom raboty, zavisyashchiy ot dliny ocheredi [A study of queuing systems with switched-mode, depending on the length of the queue] // V kn. Ergodicheskaya teoriya markovskikh protsessov. Vsesoyuznaya shkola-seminar, t. dokladov Kedvel, 1987. – s. 44-45.

5. Philippe Nain Basic elements of queuing theory. Application to the Modelling of Computer Systems. The University of Massachusetts, 1998. – 110 p.

6. Вотякова Л.А. Напівгрупи напівстохастичних матриць та їх застосування. Канд. дис. – К.: 2004. – 148.

Votyakova L.A. Napivhrupy napivstokhastychnykh matryts ta yikh zastosuvannya [Semigroups half of stochastic matrices and their applications]. Kand. dys. – K.: 2004. – 148.

Votiakova L.A., Dohtieva I.O.

A mathematical model of a single-channel queuing system with increasing intake of applications

Absrtact. Mathematical model of queuing system with the receipt of requests consisting of two stages is constructed.

Keywords*: queuing system, Markov chain, transition probabilities, exponent distribution*

Вотякова Л.А., Дёгтева І.А.

Математическая модель одноканальной системы массового обслуживания с возрастающим поступлением заявок

Аннотация. В работе представлена математическая модель одноканальной системы массового обслуживания, для которой время поступления требования состоит из двух этапов.

Ключевые слова*: система массового обслуживания, цепь Маркова, переходные вероятности, показательное распределение*