

Воєвода А.Л.

Місце та роль некоректних задач в шкільному курсі математики

Воєвода Аліна Леонідівна, кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри математики та методики навчання математики
Вінницький державний педагогічний університет ім. М.Коцюбинського, м. Вінниця, Україна

Анотація. У статті розглянуто зміст ключових понять з теорії некоректних задач та обґрунтовано місце і роль некоректних задач у процесі навчання учнів математики. Розглянуто приклади та доцільність застосування окремих некоректних задач на уроках математики.

Ключові слова: задача, коректна задача, некоректна задача, невизначеність даних, суперечливість умов

Вступ. Роль задач в процесі навчання математики неможливо переоцінити. Задачі покликані виконувати найрізноманітніші функції (навчальні, виховні, розвивальні, контролюючі), і аж ніяк не зводяться тільки до застосування отриманих школярами знань. Позиція сучасної методики навчання математики: задачі мають бути як метою, так і засобом навчання.

Однією з найоригінальніших за стилем математичної діяльності галузей сучасних математичних досліджень є теорія некоректних задач, адже більшість практичних проблем вимагають прийняття рішень в умовах невизначеності, перевизначеності, або суперечностей в системі даних. Саме по відношенню до подібних задач і виникає необхідність у варіативному пошуку розв'язання.

Короткий огляд публікацій з теми. Зміст поняття "задача" в психолого-дидактичній літературі розкрито Г.О. Баллом, Дж. Брунером, П.Я. Гальперінім, В.В. Давидовим, З. Дьенешем, Ю.М. Колягінім, Г.С. Костюком, В.І. Крупічем, В.А. Крутецьким, Ю.Н. Кулюткінім, І.Я. Лернером, Н.А. Побірченко, Д. Пойа, Я.О. Пономарьовим, Л. М. Фрідманом та ін.

Особливу увагу розв'язуванню задач як засобу формування системи математичних понять приділяли в своїх працях О.М. Астряб, Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, М.І. Бурда, М.А. Данилов, А.М. Колмогоров, Л.М. Лоповок, А.І. Маркушевич, О.І. Матяш, О.І. Скафа, З.І. Слєпкань, А.А. Столяр, Н.А. Тарасенкова, І.Ф. Тесленко, С.І. Шварцбург, В.О. Швець та ін.

Розв'язування задач як засіб розвитку мислення учнів досліджувалось в дисертаційних роботах К.О. Гараєвої, С.В. Музиченко, І.Н. Семенової, С. О. Скворцової, О.С. Чашечникової та ін.

Вагомих результатів у створенні теорії некоректних задач досягли Ж. Адамар, А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьєв, В.К. Іванов, Т.А. Безусова, Н.Н. Яремко та ін.

Мета статті – розкрити зміст ключових понять з теорії некоректних задач та обґрунтувати місце і роль некоректних задач у процесі навчання учнів математики.

Виклад основного матеріалу. Термін "задача" використовується в житті і науці дуже широко і має багато різних значень. Тому дотепер не існує загальноприйнятого означення поняття "задача".

У психології поняття задачі характеризує спрямованість і мету діяльності людини, досягнення результату якої здійснюється певними засобами. У філософії задачу розглядають як системний об'єкт, основною характеристикою якого є цілісність.

Математики визначають задачу через її структурні елементи (В.М. Бродіс, Я. Вішін, І. Ганчев, А. Ньюелл, В.В. Реп'єв, А.А. Столяр, Л.М. Фрідман). Білоруський

радянський педагог-методист А.А. Столяр під задачею (у широкому значенні) розуміє вимогу відшукування області істинності. Російський вчений у галузі педагогічної та математичної психології Л.М. Фрідман виділяє структурні елементи задачі: умову і вимогу, числові дані і шукане [9, с. 21-22]. Аналогічну точку зору на поняття задачі висловлено болгарським математиком-методистом І. Ганчевим, який ввів поняття "область розв'язування задачі", "система розв'язків задачі" [4, с. 41-42].

На думку американського вченого Ф. Вольфа, якщо "термін "задача" розуміти досить широко, (зокрема включити в число завдань і будь-яку обчислювальну вправу, і будь-яку теорему, яку треба довести, якщо вважати завданням встановлення тих чи інших ознак досліджуваного математичного поняття і відбір серед них тих, які характеризують це поняття і т. д.), то стане зрозумілим вислів "...заняття математикою полягає у розв'язуванні задач..." [4, с. 35-36].

В українській методиці навчання математики задача (за Г.П. Бевзом) розглядається як будь-яка вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити щонебудь, що стосується просторових форм чи кількісних відношень, або запитання, рівносильне такій вимозі.

Розв'язати задачу – означає виконати те, що вимагається в задачі. В українській мові (на відміну від російської та деяких інших мов) існує істотна відмінність між поняттями "розв'язок", "розв'язання", "розв'язування". Розв'язок – це кінцевий результат процесу розв'язування, відповідь або частина відповіді. (Але "розв'язок" не можна ототожнювати з "відповіддю". Ми записуємо одну відповідь, хоча задача має кілька розв'язків. Відповідь дають і тоді, коли задача не має розв'язків). Розв'язання – це логічна конструкція, сукупність усіх міркувань, що приводять до потрібного висновку. Розв'язування – процес міркувань, який може бути усним і письмовим, самостійним і колективним тощо [2, с. 57].

Існують різноманітні класифікації задач: за їх призначенням – тренувальні і розвивальні, за наявністю алгоритму розв'язування – стандартні і нестандартні, за характером вимог – задачі на обчислення (поділяються на текстові і приклади), на побудову, на доведення і на дослідження.

Радянський психолог В.А. Крутецький за характером умови наводить таку класифікацію задач:

1. Задачі з несформованою умовою. В умові задачі є всі дані, але запитання лише мається на увазі.

2. Задачі з надмірною умовою. В умові задано зайві дані, непотрібні для розв'язування, які "приховують" необхідні для виконання завдання дані.

3. Задачі з неповною умовою. В умові таких задач відсутні деякі дані, необхідні для розв'язування задачі, а отже дати конкретну відповідь на запитання задання не завжди можливо.

4. Задачі з суперечливою умовою – містять в умові суперечність між даними. [5, с. 124-150]

Схожу класифікацію наводить американський педагог Д. Пойа, однак він не розглядає задачі з несформованою умовою. У своїх рекомендаціях "Як розв'язувати задачу" вчений першими пунктами поставив запитання: Чи можливо задовольнити умову? Чи достатня умова для визначення невідомого? Або недостатня? Або надмірна? Або суперечлива? [7, с. 202-204]

Український методист Г.П. Бевз задачі на обчислення і побудову залежно від кількості розв'язків поділяє на визначені і невизначені. Задачі, які мають тільки один розв'язок, він називає визначеними. Якщо ж задача має два або більше розв'язків – невизначеними.

Крім визначених і невизначених, учений за характером умови також розглядає задачі із зайвими даними, задачі з суперечливими даними (іноді їх називають перевизначеними), задачі з додатковими обмеженнями, задачі з послабленими вимогами [2, с. 54-57]. Існує й інша точка зору. З.І. Слєпкань [8, с. 95] невизначеними вважає тільки ті задачі, які мають безліч розв'язків, а задачі, які мають скінчену множину розв'язків називає визначеними.

Часто учні, студенти і вчителі математики вживають терміни "правильна задача", "неправильна задача". Глушення цих термінів знаходимо в працях Л.М. Фрідмана. На його думку, правильна задача має одночасно задовольняти таким вимогам [9, с. 33-34]:

1. Усі вказані в задачі елементи предметної області (об'єкти) мають існувати.

Задача "Змішали 10 л. 60%-ної соляної кислоти з 4 л. 95%-ної кислоти. Якої міцності утвориться суміш?" є неправильною, бо з хімії відомо, що міцність соляної кислоти не може бути вищою 42%.

2. Усі вказані в задачі відношення мають бути дійсно визначені для тих елементів предметної області, для яких ці відношення задані в умовах задачі.

3. Область визначення кожної із заданих в задачі змінних має бути непорожньою.

4. Усі твердження, задані в умові задачі, мають бути істинними.

5. Всі висловлення, встановлення істинності яких складає вимогу задачі, повинні міститися у вигляді відповідних висловлювальних форм в умові задачі.

Наведемо приклад задачі [3, с. 31], яка порушує цю вимогу: "Стоїть триповерховий будинок, а в цьому будинку на кожному поверсі вісім вікон. На даху два дахові віконця і два комини. На кожному поверсі живе по двоє квартирантів. А тепер, панове, скажіть мені, в якому році померла бабуня двірника?" (Я. Гашек. "Пригоди бравого вояка Швейка")

В цілому, погоджуючись з міркуваннями Л.М. Фрідмана, зазначимо, що третя вимога звужує множину правильних задач, бо за нею всі задачі, в яких область допустимих значень кожної із заданих змінних є порожньою – неправильні.

Д. Пойа зауважує: "Правильно поставлена задача має містити всі необхідні дані, жодне з яких не повинно бути зайвим; її умова повинна бути достат-

ньою, не містити суперечливих і надлишкових даних". З цієї точки зору "правильно поставлену задачу" можна розглядати як "коректну задачу".

На нашу думку, в процесі аналізу і розв'язування задач більш доцільно використовувати терміни "коректна (коректно поставлена) задача", "некоректна (некоректно поставлена) задача".

Поняття коректності задачі, яке відносилось лише до крайових задач математичної фізики, вперше ввів Ж. Адамар у 1923 році. Він вважав, що коректність постановки задачі забезпечується виконанням двох умов: існуванням розв'язку і його єдиністю [10]. Вперше означення поняття "некоректно поставлена задача" з'явилося у 1943 році в роботах російського радянського математика А.М. Тихонова. В подальшому зв'язок понять коректної і некоректної задачі був уточнений. Нині до некоректно поставлених задач відносять і задачі з нестійким розв'язком.

"Практично всі математичні задачі полягають у тому, що за вихідними даними (u) шукається розв'язок (z). При цьому вважається, що u і z пов'язані залежністю $z=R(u)$. Задача називається коректною або коректно поставленою, якщо виконуються умови:

1. Задача має розв'язок при будь-яких допустимих вихідних значеннях змінної (u) (існування розв'язку).

2. Кожним вихідним даним (u) відповідає тільки один розв'язок (z) (єдиність розв'язку).

3. Розв'язок стійкий.

Задача називається некоректною або некоректно поставленою, якщо не виконується хоча б одна з цих умов" [1].

Зміст першої вимоги полягає в тому, що серед вихідних даних не повинно бути суперечливих, тобто таких, які б виключали можливість розв'язування задачі.

Друга вимога означає, що вихідних даних достатньо для однозначного розв'язання задачі. Вимога однозначності розв'язку задачі виключає існування надлишкових даних, зокрема й несуперечливих.

Третя вимога полягає в наступному. Якщо u_1 і u_2 – два різних набори вихідних даних, міра відхилення яких один від одного достатньо мала, то міра відхилення розв'язків z_1 і z_2 менша будь-якої наперед заданої точності. При порушенні третьої вимоги як зазвичай малі зміни вихідних даних можуть викликати великі відхилення у розв'язку.

Відповідно до даного означення, некоректними задачами можна вважати ті, які не мають розв'язку, або мають більше одного розв'язку (невизначені задачі) або процедура знаходження розв'язку нестійка. Дослідження задачі на коректність за Адамаром-Тихоновим передбачає проведення глибокого аналізу всіх складових компонентів задачі.

Розкриття змісту поняття "коректна задача" в теорії некоректних задач і в методиці навчання учнів математики мають певні відмінності, оскільки в шкільному курсі математики рівень строгості означень окремих понять з точки зору вищої математики дещо нижчий. Наприклад, означення паралельних прямих в 7 класі шкільного курсу геометрії подається таким чином: дві прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються. Строго і повне означення паралельних прямих з'являється лише в 10 класі, коли вводиться неозначуване поняття площини.

Деякі науковці-методисти розрізняють терміни "коректна задача" і "коректно поставлена задача". Задача вважається коректною, якщо вона має розв'язки (один або кілька), а задача поставлена коректно, якщо не містить суперечностей. Відповідно, некоректна задача – це задача, яка містить протиріччя, або має недостачу даних. При цьому коректність постановки задачі означає її однозначну (скінченнозначну) розв'язність або повноту і несуперечливість умов [10].

Існує також погляд на коректність задачі в шкільному курсі математики з точки зору однозначної визначеності множини розв'язків задачі. В цьому сенсі, якщо множина розв'язків порожня, то задача розв'язків немає, але вона коректна, оскільки розв'язок існує і множина розв'язків однозначно визначена. Задачу, яка має більше одного розв'язку також можна вважати коректною, бо множина її розв'язків визначена однозначно. При такому підході до некоректних можна віднести задачі з неформульованою вимогою або невизначеними компонентами задачі. За класифікацією Ю.М. Колягіна це задачі типу (XYZT) з невідомими чотирма компонентами [4, с. 59-64]. В цьому контексті задачі за класифікацією В.А. Крутецького (з неформованою, неповною, надмірною, суперечливою умовою), можна віднести до некоректних задач. Близько по змісту до коректності задач є розгляд Г. П. Бевзом, М. П. Буловацьким, Д. Пойа задач з неповними, суперечливими і надлишковими даними.

Щоб уникнути в подальшому розбіжностей, прийmemo означення коректних і некоректних задач за Адамаром-Тихоновим за основне з деякими зауваженнями.

1. Коректність задачі поняття відносне, пов'язане з усіма компонентами задачі. Тому першу умову коректності задачі в шкільному курсі математики (існування її розв'язку) будемо розуміти так: якщо множина розв'язків порожня – задача розв'язків немає, але вона коректна, оскільки розв'язок існує і визначений однозначно. Так, задачу "Розв'язати рівняння $x^2 + 3x + 9 = 0$ " будемо вважати коректною. (Дискримінант рівняння від'ємний, то на множині дійсних чисел це квадратне рівняння немає коренів, але розв'язок існує і визначений однозначно). В нашому розумінні, розв'язок задачі не існує, якщо суперечність закладена в самій умові або умова невизначена, недостатня, або в задачі описується ситуація, що не відповідає дійсності (Г. П. Бевз називає їх нереальними). Такою, наприклад, є задача [3, с. 44] з новели українського письменника Степана Васильченка "Мужицька арифметика" (1911): "Селянин мав перевезти із міста в село 50 ламп з тією умовою, що за кожну привезену лампу йому заплатять по 5 коп., а за кожну розбиту з нього вирахують 1 крб. 20 коп. При перевезенні три лампи розбились. Скільки заробив селянин за перевезення ламп?"

Розв'язавши задачу, бачимо, що селянин не заробив, а втратив би 1 крб. 10 к.

2. Визнання задачі некоректною не означає неможливість її розв'язання в подальшому. Некоректна задача часто дає поштовх до розвитку мислення, приводить до певних відкриттів.

В шкільних підручниках і посібниках некоректні задачі зустрічаються рідко. Проведений нами аналіз дію-

чих підручників з алгебри 7-9 класів показав, що частка таких задач у загальній масі задачного матеріалу не перевищує 5-6%, а з геометрії цей показник – 7-8%.

На основі аналізу навчально-методичної літератури нами виокремлено основні типи некоректних задач (за кількістю можливих розв'язків, повнотою даних та їх сумісністю).

Задачі, які мають більше одного розв'язку (багатотваріантні). З вершини ромба проведені дві висоти, відстань між основами яких вдвоє менше діагоналі ромба. Знайти величини кутів ромба.

В умові задачі не вказано, з вершини якого кута (тупого чи гострого) проведено висоти, з якою діагоналлю ромба (більшою чи меншою) порівнюється відстань між основами висот.

Розв'язування таких задач вимагає від учня розгляду кількох різних випадків (за А.М. Тихоновим – перехід до повної системи коректних задач). Насправді, мова йде не про недолік задачі, а про включення в розв'язування елементів дослідження, що сприяє розвитку гнучкості мислення. До таких задач можна віднести й геометричні задачі на побудову.

Задачі з недостачею даних. В трикутнику довжина однієї сторони дорівнює 10 см, а другій 8 см. Знайти довжину третьої сторони.

На перший погляд може здатись, що задача розв'язку немає, бо в умові відсутні необхідні дані. Однак її розв'язання потребує більш глибокого аналізу даних, а також пошукової активності учнів. Познавши невідому третю сторону a , використаємо нерівність трикутника. Матимемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 10 + 8 > a; \\ a + 10 > 8; \\ a + 8 > 10. \end{cases} \text{ Отже, } 2 < a < 18.$$

Задачі із зайвими даними. Під "зайвими даними" будемо розуміти дані в задачі, які впливають з інших, наявних в умові.

В прямокутному трикутнику катети дорівнюють 9 см і 40 см, а гіпотенуза дорівнює 41 см. Знайти його площу.

За формулою площі прямокутного трикутника маємо: $S = \frac{9 \cdot 40}{2} = 180 \text{ см}^2$. Отже, гіпотенуза зайва. Однак, без з'ясування питання: "Чи буде в прямокутному трикутнику з катетами 9 см і 40 см гіпотенуза дорівнювати 41 см?" розв'язання задачі не можна вважати повним.

Задачі, які містять протиріччя (суперечливі). Бічна поверхня трикутної піраміди дорівнює S , а кожне з бічних ребер дорівнює l . Знайти плоскі кути при вершині, знаючи, що вони утворюють арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

Задача некоректна, оскільки така піраміда не існує. Дійсно, нехай плоскі кути при вершині піраміди

$$\alpha, \alpha + \frac{\pi}{3}, \alpha + \frac{2\pi}{3}.$$

Оскільки кожний плоский кут тригранного кута менший решти суми плоских кутів, то, $\alpha < \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$, тобто $\alpha > \frac{\pi}{3}$.

Отже, сума плоских кутів при вершині піраміди більша за 2π , що неможливо [6, с. 6].

Метою розв'язування таких задач є доведення відсутності їх розв'язку. Застосування подібних задач сприяє розвитку критичності мислення.

Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами.

Дослідіть з допомогою графіка залежність кількості коренів рівняння $x^2 - x + a = 0$ від a , де a – дане число.

Розв'язування задачі вимагає дослідницької діяльності, встановлення характеру залежності результатів від значень параметрів.

Висновки. Вчителі, в переважній більшості, намагаються уникати використання некоректних задач на

уроках математики, не дивлячись на те, що розв'язування деяких з них могло б сприяти розвитку критичного мислення, формуванню готовності до дослідницької діяльності, розвитку творчих здібностей, пізнавальної активності, формуванню готовності до практичного використання математики в житті. Включення некоректних задач у зміст уроку суттєво змінює методику роботи з коректними задачами, оскільки вимагає доповнення структурного аналізу її умови й критичним аналізом: на повноту використання усіх даних в ході розв'язування задачі, перевірку отриманого результату на відповідність вихідним даним, тощо.

ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Арсенин В.Я., Тихонов А.Н. Некорректные задачи / Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – Т.3. – С. 930-935.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посіб. – 3-тє вид., перероб. і допов. / Г.П. Бевз. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
3. Воевода А.Л. Математика та література: матеріали до інтегрованих уроків і заходів / А.Л. Воевода. – К.: Редакції газет природничо-математичного циклу, 2013. – 100, [1] с.
4. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математики. Ч. 1 / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1977. – 111 с.
5. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.
6. Лоповок Л.М. Факультативные задания по геометрии для 7-11 классов: пособие для учителя / Л.М. Лоповок. – Киев: Рад. шк., 1990. – 128 с.
7. Пойа Д. Как решать задачу. Пос. для учителей/ Д. Пойа. – М.: Учпедгиз МП РСФСР, 1961. – 210 с.
8. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник / З.І. Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.
9. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач / Л.М. Фридман. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с.
10. Яремко Н.Н. Некорректные задачи при обучении математики в школе и вузе // Известия РГПУ им. А.Н. Герцена. Общественные и гуманитарные науки. – № 11 (62). – СПб, 2008. – С. 335-346.

Voievoda A.L. Place and role of incorrect problems in the process of mathematics teaching

Abstract. In this article it is given the contents of main concepts the theory of incorrect problems and it is substantiated role incorrect problems in the process of mathematics teaching . It is examined of examples and expediency of application of incorrect problems at mathematics lessons.

Keywords: *problem, correct problem, incorrect problem, the uncertainty of the data ,the contradictory conditions*

Воевода А.Л. Место и роль некорректных задач в школьном курсе математики

Аннотация. В статье рассмотрено содержание ключевых понятий теории некорректных задач и обосновано роль некорректных задач в процессе обучения учащихся математике. Рассмотрены примеры и целесообразность применения отдельных некорректных задач на уроках математики.

Ключевые слова: *задача, корректная задача, некорректная задача, неопределенность данных, противоречивость условий*