PEDAGOGY

Тарасенкова Н.А.[1]

Особенности кодирования геометрических понятий

[1] *Тарасенкова Нина Анатольевна, доктор педагогических наук, профессор, Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого, г. Черкассы, Украина*

Аннотация: Статья посвящена проблеме обеспечения понимания и правильного усвоения геометрических понятий учащимися. На примере понятия равнобедренного треугольника раскрываются сложности мыслительной деятельности школьников в процессе усвоения данного понятия. Характеризуются различия словесного, словесно-графического и содержательно-графического кодов геометрического понятия. Обосновывается вывод о том, что в процессе обучения геометрии на всех его этапах объективно необходимо использовать именно содержательно-графические интерпретации геометрических понятий и что только в таком случае может быть достигнута одна из конечных целей процесса формирования каждого понятия – создание свернутой структуры этого знания. В состав свернутой структуры понятия, например, равнобедренного треугольника, входят такие компоненты: а) *оболочка структуры* – термин «равнобедренный треугольник» вместе с кодовой содержательно-графической интерпретацией понятия (ее представляет изображение равнобедренного треугольника с горизонтальным основанием и вершиной, расположенной в верхней полуплоскости относительно прямой, содержащей основание, равные стороны треугольника символически обозначены равным количеством черточек); б) *ядро структуры* – смысл рисунка, в котором сконцентрированы, во-первых, отражение существенных свойств понятия равнобедренного треугольника, заключенных в его определении, а во-вторых, факт изображения одного из представителей множества равнобедренных треугольников в одном из возможных расположений в пространстве; в) *оператор структуры* – взаимно однозначное соответствие между рисунком и его смыслом. Сопоставление мыслительных актов в процессе применения геометрического понятия с помощью свернутых структур (кодов), характерных учителю, и развернутых структур, характерных учащимся на начальном этапе изучения геометрических понятий, приводят к необходимости разработки специальной методики формирования понятий у школьников. В такой методике должны всесторонне учитываться семиотические особенности любых объектов усвоения, в том числе и геометрических понятий. Не менее важно, чтобы учитель знал специфику такой разновидности знаково-символической деятельности, как кодирование-декодирование, умел правильно ее выполнять, а также умел формировать у школьников соответствующие знания и умения. Обучение кодированию понятия на содержательно-графическом уровне (а не только на терминологическом и словесно-графическом уровне, как это принято) необходимо рассматривать как отдельную методическую задачу.

Ключевые слова: геометрия, усвоение понятий, знаково-символические средства, кодирование, понимание, геометрические умения

Постановка проблемы. Геометрические понятия представляют собой особую разновидность учебной информации, которую приходится обрабатывать учащимся. Вообще, усвоение школьниками понятий и их правильное применение в дальнейшем прямо зависит от того, насколько дидактически грамотно учитель вводил понятие и организовывал его отработку. А для этого учителю необходимо знать особенности геометрических понятий и в содержательном, и в семиотическом плане. Не менее важно, чтобы учитель знал специфику такой разновидности знаково-символической деятельности, как кодирование-декодирование, умел правильно ее выполнять, причем осознанно, а также умел формировать соответствующие знания и умения у учащихся.

Анализ последних исследований и публикаций. Семиотика как наука об особенностях материализации абстрактного содержания с помощью знаков и символов развивается вот уже более века (М.М. Бахтин, Ф.Де Соссюр, Э. Кассирер, А.Ф. Лосев, Ю.М. Лотман, Ч.У. Моррис, Ч.С. Пирс и др.). Семиозис как процесс порождения знаков и символов (создания своеобразной виртуальной реальности со своим сводом правил и условностей) был и остается в поле зрения психологов и психолингвистов (Л.С. Выготский, М.В. Гамезо, И.А. Зимняя, Г. Клаус, Г.С. Костюк, В.В. Налимов, А.М. Пятигорский, Д.Б. Эльконин и др.). Связь семиозиса с процессом усвоения знаний, его влияние на результативность обучения привлекает внимание ученых разных научных направлений. Так, психологами установлено, что семиотические отличия знаков и символов не имеют существенного значения в обучении и их следует рассматривать как некую общность – знаково-символические средства овеществления содержания (Н.Г. Салмина). В дидактике и част-ных методиках изучаются вопросы использова-ния знаково-символических средств в обучении разным предметам (А.А. Веряев, В.М. Кларин, А.С. Лобанов и др.). В частности, наши теоре-тические наработки [6; 7] находят свое воплощение в школьных учебниках

[1–5; 8]. Вместе с тем, расширение границ межотраслевого научного анализа и синтеза не может не вскрывать новых аспектов исследуемой проблемы.

Цель статьи – раскрыть особенности кодирования геометрических понятий в контексте их усвоения учащимися.

Изложение основного материала. Вообще, под понятием понимают форму мышления о совокупности существенных и несущественных свойств объекта. Процесс выделения существенных свойств и их отделения от несущественных свойств называют определением понятия, а точнее, деятельностью по определению понятия. Результаты такой деятельности, как правило, выражают некоторой словесной конструкцией, называемой определением понятия, или дефиницией. Каждому понятию присваивают собственный термин – словесное обозначение понятия, его *словесный код*. Например, понятие геометрической фигуры, состоящей из всех точек плоскости, равноудаленных от некоторой фиксированной точки, кодируется термином «окружность», а понятие треугольника с двумя равными сторонами – термином «равнобедренный треугольник».

Но геометрические понятия имеют отличительную особенность в том, что вместе со словесным кодом их нередко обозначают и графически – с помощью геометрического рисунка. При этом графическая интерпретация вместе с термином образуют новый, *словесно-графический код* геометрического понятия. Такой код, в общем случае, является более емким по содержанию и более пластичным по сравнению с терминологическим кодом понятия.

Кодирование смысла в какой бы то ни было форме – хитроумнейшее изобретение нашего мыслительного аппарата, стремящегося к максимальной экономии собственных ресурсов. В свернутом, «закодированном» виде информацию проще хранить, ее легче отыскивать в памяти, чтобы затем развернуть и использовать. Ситуация очень напоминает библиотеку с ее библиографическим отделом. У пользователей персональных компьютеров наверняка возникнет аналогия со способами хранения информации в ПК.

Однако, в отличие от самых современных компьютеров, наше мышление более совершенно – в ряде ситуаций оно может обойтись оперированием только кодами и не разворачивать в сознании всю информацию о существенных свойствах понятий.

Например, при изучении темы «Свойства и признак равнобедренного треугольника» [1] в качестве задачи-теоремы должно быть доказано свойство углов равностороннего треугольника. Для учителя математики каждое понятие школьного курса геометрии давным-давно уже стало свернутой структурой. Поэтому, его размышления в ходе решения данной задачи будут предельно лаконичными: равносторонний треугольник – дважды равнобедренный. Причины и следствия такого факта для учителя очевидны и, без сомнения, разворачивать их, а также выстраивать полную цепочку дедуктивных рассуждений, приводящих к ним, учитель станет только под давлением обстоятельств – необходимости объяснения учащимся, необходимости письменного изложения и т.п.

Для учащихся, которых специально не обучали процедурам кодирования-декодирования информации, в момент изучения этой темы ни понятие «равнобедренный треугольник», ни понятие «равносторонний треугольник» еще не стали кодовыми структурами. Такие структуры при обычном обучении, возможно, и сформируются у школьников, но значительно позже. Поэтому, при решении данной задачи вместе с каждым термином в оперативную память учащихся будут загружаться в развернутом виде и те свойства, которые отражены в определениях этих понятий.

Осознание того, что в определениях равностороннего и равнобедренного треугольников речь идет о некотором количестве равных сторон, повлечет за собой мысль о сравнении этих количеств. Вслед за этим появится вывод о том, что всякий равносторонний треугольник является равнобедренным.

Следующий мыслительный акт потребует от школьников очень сложной умственной работы, поскольку связан с выводом о том, что равносторонний треугольник – это трижды равнобедренный треугольник. На пути к такому выводу перед учащимися неизбежно возникнет ряд преград. Одна из них связана с бытовыми стереотипами мышления, согласно которым, если нечто обладает каким-то свойством, то обсуждение кратности такого свойства чаще всего либо бессмысленно, либо излишне. Поэтому, мысль о том, что в равностороннем треугольнике можно выделить не один равнобедренный треугольник вряд ли самостоятельно созреет у семиклассников. В данной задаче изображение равностороннего треугольника и представления учеников о равнобедренном треугольнике в какой-то мере уменьшат названную выше преграду, но вместе с тем возникнет следующая преграда.

Новая преграда коренится в таком распространенном явлении, как терминологическая зависимость восприятия и представлений учащихся. Такая зависимость, как правило, возникает при генерализации несущественных свойств понятий. Ее зачастую и провоцируют, и подкрепляют естественная «схема мира» человека, а также ряд бытовых терминологических ассоциаций. В нашем примере преградой выступает терминологическая зависимость представлений семиклассников о равнобедренном треугольнике. Согласно естественной «схеме мира», бедра или бока предметов, как правило, являются вертикально ориентированными, равные бедра интуитивно ассоциируются с симметрией относительно некоторой оси, которая чаще всего вертикальна или незначительно отклонена от вертикали. Поэтому, равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона расположена горизонтально, учениками, как правило, опознается с большим трудом.

В этом проявляется недостаточно развитое пространственное мышление учащихся и несформированность у них визуально-оперативного опыта. Как известно, такой опыт не может возникнуть у школьников моментально, а решать задачи с использованием понятий, находящихся в стадии формирования, всё же необходимо. В подобных ситуациях часто оказываются действенными бинарные термины.

Каждый бинарный термин образуют две составляющих – кодовый термин геометрического понятия и бытовые термины, в которых закреплены естественные представления школьников о расположении предметов в пространстве. В рассматриваемой задаче таким ключом к пониманию и опознанию может послужить бинарный термин «равнобедренный треугольник, лежащий на боковой стороне».

Однако, на пути к выводу о том, что равносторонний треугольник является дважды равнобедренным, у школьников неизбежно возникнет еще одна преграда, связанная с инерционностью мышления. Ее провоцируют естественные ассоциации – если равнобедренный треугольник может лежать на одном боку, то он может лежать и на другом боку. Следовательно, после проведенных разъяснений ученики в равностороннем треугольнике обязательно опознают три равнобедренных. Именно поэтому вначале говорилось о том, что факт «равносторонний треугольник является трижды равнобедренным» учащиеся установят раньше, чем у них возникнет мысль об избыточности этих данных для решения задачи.

Неверной была бы мысль о том, что в свернутых размышлениях учителя названные преграды не могут возникнуть вообще. Их появление вероятно в ходе мыслительной деятельности любого человека – и знатока геометрии, и неофита, поскольку такие преграды коренятся в первичном по отношению к геометрическим знаниям опыте повседневной жизни и, возможно, усугубляются в ходе предшествующего обучения. Однако, у учителя оба понятия – и равностороннего, и равнобедренного треугольников, уже сформированы. Поэтому, в процессе решения задачи учитель осуществляет отсроченное воспроизведение их содержания. Но при таком воспроизведении, по данным психологии, смысловые связи знаний актуализируются значительно быстрее, чем внешние, ассоциативные связи. Это нередко влечет за собой подавление ассоциативных связей смысловыми. Поэтому, если преграды, рассмотренные выше, и появляются в размышлениях учителя, то преодолеваются им легко и быстро, зачастую, не осознаваемо.

У семиклассников в момент решения задачи об углах равностороннего треугольника оба понятия – и равностороннего, и равнобедренного треугольников, находятся лишь в стадии формирования. Поэтому, в процессе непосредственного воспроизведения содержания этих понятий в ходе решения задачи ученики не могут в полной мере использовать смысловые связи – они, скорее всего, еще не образовались и, тем более, не устоялись. Пытаясь восстановить в памяти необходимую информацию, учащиеся неизбежно будут искать опору во внешних, ассоциативных связях, которые использовались в процессе введения понятия или дополнительно устанавливались в ходе решения задачи. При традиционном обучении внешние связи чаще всего оказываются случайными, хаотичными, однообразными, а смысловые связи далеко не всегда структурируются и предлагаются учащимся в качестве отдельного объекта изучения. В результате, знания школьников не приобретают действенных качеств, оставаясь формальными.

По нашим данным, ситуация значительно улучшается, если у школьников специально формировали особый код геометрического понятия. Таким кодом, как было показано выше, не может быть только термин, соответствующий данному понятию. Графическая интерпретация понятия также не сможет в полной мере выполнять функции такого кода. Действительно, «голый» рисунок далеко не всегда содержит достаточное количество информации для однозначной идентификации геометрического понятия. Особыми в этом смысле являются метрические понятия, например, такие, как равнобедренный треугольник. Без метрической информации, занесенной на рисунок с помощью специальных обозначений (черточек, дужек и т.п.), не так уж легко выявить и вообще невозможно утверждать, что данный треугольник является равнобедренным, тем более в тех случаях, когда он расположен «нестандартно».

Следовательно, в процессе обучения геометрии на всех его этапах объективно необходимо использовать именно содержательно-графические интерпретации геометрических понятий. По нашему мнению, только в таком случае может быть достигнута одна из конечных целей процесса формирования каждого понятия – создание свернутой структуры этого знания.

В состав свернутой структуры понятия, например, равнобедренного треугольника, входят такие компоненты: а) *оболочка структуры* – термин «равнобедренный треугольник» вместе с кодовой содержательно-графической интерпретацией понятия (ее представляет изображение равнобедренного треугольника с горизонтальным основанием и вершиной, расположенной в верхней полуплоскости относительно прямой, содержащей основание, равные стороны треугольника символически обозначены равным количеством черточек); б) *ядро структуры* – смысл рисунка, в котором сконцентрированы, во-первых, отражение существенных свойств понятия равнобедренного треугольника, заключенных в его определении, а во-вторых, факт изображения одного из представителей множества равнобедренных треугольников в одном из возможных расположений в пространстве; в) *оператор структуры* – взаимно однозначное соответствие между рисунком и его смыслом.

Названная структура сможет выполнять функции отдельной единицы информации, образуя *содержательно-графический код* понятия равнобедренного треугольника, только тогда, когда каждая ее составляющая сформирована у школьников, а установление взаимно однозначного соответствия между рисунком и его смыслом отработано до автоматизма.

Таким образом, обучение кодированию понятия на содержательно-графическом уровне (а не только на терминологическом и словесно-графическом уровне, как это принято) необходимо рассматривать как отдельную методическую задачу процесса формирования геометрического понятия. Отправной точкой в поиске адекватного методического решения этой задачи должен быть анализ эталона искомого продукта обучения, определение путей и средств, необходимых для создания продукта обучения заданного качества, а также выявление объективных и субъективных трудностей, которые могут возникнуть на пути к его созданию.

С позиций разрабатываемого нами подхода [6], признаками сформированного понятия необходимо считать умения: 1) вербально кодировать (декодировать) понятие, т. е. правильно соотносить понятие и его словесный код (термин); 2) визуально кодировать (декодировать) понятие, т. е. правильно выполнять его содержательно-графическую интерпретацию, а также опознавать понятие по его содержательно-графическому коду в разных ситуациях; 3) перекодировать словесный код понятия (термин) в его содержательно-графический код (изображение) и наоборот; 4) разворачивать и словесный, и содержательно-графический код понятия в правильное определение, а также сравнивать различные определения одного и того же понятия; 5) подводить заданные объекты под понятие, приводить собственные примеры, иллюстрирующие понятие, конструировать контрпримеры; 6) выводить следствия из принадлежности объекта данному понятию – называть все свойства понятия и присваивать такие же свойства объекту, принадлежащему понятию; 7) включать понятие в родовидовые связи с другими понятиями.

Выводы. Методическое решение любой задачи обучения должно осуществляться с учетом семиотических особенностей объектов усвоения, закономерностей процесса учения и в рамках отдельного дидактического цикла. Это касается и задачи формирования понятия, и задачи формирования содержательно-графического кода понятия. При этом возникают следующие вопросы. Каким содержанием необходимо наполнить звенья дидактического цикла формирования понятия и звенья дидактического цикла формирования содержательно-графического кода понятия? Могут ли две названные задачи обучения решаться взаимосвязано или они должны решаться абсолютно самостоятельно? Как организовать реализацию двух дидактических циклов в одном и в другом случае? Разрешение этих проблем является важным и для методической науки, и для практики обучения математике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурда М. І. Геометрія : [підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : ВД "Освіта", 2011. – 208 с.

Burda M. I. Geometriya : [pidrych. dlya 7 kl. zagalnoosvit. navch. zakladiv] / M. I. Burda, N. A. Tarasenkova. – K. : VD "Osvita", 2011. – 208 s.

2. Бурда М. І. Геометрія : [підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : ВД "Освіта", 2011. – 240 с.

Burda M. I. Geometriya : [pidrych. dlya 8 kl. zagalnoosvit. navch. zakladiv] / M. I. Burda, N. A. Tarasenkova. – K. : VD "Osvita", 2011. – 240 s.

3. Бурда М. І. Геометрія : [підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : ВД "Освіта", 2011. – 240 с.
Burda M. I. Geometriya : [pidrych. dlya 9 kl. zagalnoosvit. navch. zakladiv] / M. I. Burda, N. A. Tarasenkova. – K. : VD "Osvita", 2011. – 240 s.
4. Бурда М. І. Геометрія : [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів; академічний рівень] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : ВД "Освіта", 2011. – 176 с.
Burda M. I. Geometriya : [pidrych. dlya 10 kl. zagalnoosvit. navch. zakladiv; akademichny riven] / M. I. Burda, N. A. Tarasenkova. – K. : VD "Osvita", 2011. – 176 s.
5. Бурда М. І. Геометрія: [підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів; академічний та профільний рівні] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. – К. : Зодіак-ЕКО, 2011. – 352 с.
Burda M. I. Geometriya : [pidrych. dlya 11 kl. zagalnoosvit. navch. zakladiv; akademichny ta profilny riven] / Burda M., Tarasenkova N., Bogatyreva I., Kolomiets O., Serdyuk Z. – K. : VD "Osvita", 2011. – 352 s.
6. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики : [монографія] / Н. А. Тарасенкова. – Черкаси : "Відлуння-Плюс", 2002. – 400 с.
Tarasenkova N. A. Vykoristannya znakovo-symvolichnyx zasobiv y navchanni matematiki : [monografiya] / N. A. Tarasenkova. – Cherkassy : "Vidlynnya-Plyus", 2002. – 400 s.
7. Тарасенкова Н. А. Концептуальні засади розробки підручників з математики для 5–6 класів / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк // Science and education a new dimension. – Vol. 2 (Marhc, 2013). – Budapest, 2013. – P. 34-38.
Tarasenkova N. A. Conceptual principles of development of textbooks on mathematics for 5 – 6 classes / Tarasenkova N., Bogatyreva I., Bochko O., Kolomiets O., Serdyuk Z. // Science and education a new dimension. – Vol. 2 (Marhc, 2013). – Budapest, 2013. – P. 34-38.
8. Тарасенкова Н. А. Математика : [підруч. для 5 кл. загальноосв. навч. закл.] / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. – К. : ВД "Освіта", 2013. – 352 с.
Tarasenkova N. A. Matematika: [pidrych. dlya 5 kl. zagalnoosvit. navch. zakladiv] / Tarasenkova N., Bogatyreva I., Bochko O., Kolomiets O., Serdyuk Z. – K. : VD "Osvita", 2013. – 352 s.

Tarasenkova N.

Peculiarities of encoding geometrical concepts

Abstract: The article focuses on the problem of securing understanding and proper assimilation of geometrical concepts by the students. With an example of the concept of an isosceles triangle the complexity of students' mental activity in the process of assimilation of the concept is revealed. The features of verbal, verbal and graphic, and content and graphic codes of geometrical concepts are characterized. The conclusion is made that it's of importance to use the content-graphic interpretation of geometrical concepts in the process of teaching geometry at all stages, and that only in this case one of the ultimate goals of the formation of each concept, namely – creating the folded structure of this knowledge, can be achieved. The contents of the folded structure of the concept, take an isosceles triangle as an example, include the following components: a) *shell structures* – the term "an isosceles triangle" together with the code content-graphic interpretation of the concept (it is an image of an isosceles triangle with a horizontal base and a vertex located in the upper half-plane relative to the line containing the base of the triangle, equal sides are symbolically marked by an equal number of lines), b) *the core of the structure* – the meaning of the figure in which, firstly, the reflection of the essential properties of the concept of an isosceles triangle is concentrated and this is enclosed in its definition, and secondly, the very image of one representative of the multitude of isosceles triangles in one of the possible locations in space, and c) *the structure operator* – a one-to-one correspondence between the image and its meaning. A comparison of cognitive acts in the process of applying geometrical concepts with folded structures (codes) which are characteristic for the teacher, and extended structures which are typical of the students at the initial stage of learning geometrical concepts, results in the necessity of developing a special method of concept formation in the students. This method comprehensively considers all semiotic peculiarities of any learning objects, including geometrical concepts. The teacher should master encoding and decoding as the type of signs and symbolic activity, correctly implement it, and be able to generate the appropriate knowledge and skills in students. Teaching how to encode the concept on the content and graphic level (and not just on the terminological and verbal-graphic level, as is common) should be considered as a separate methodological problem.

Keywords: geometry, concept acquisition, signs and symbolic means, encoding, understanding, Geometry skills