Сушко О.С.

Методика формування вмінь розв'язувати професійно орієнтовані та прикладні задачі з фінансової математики

Сушко Олександра Сергіївна, викладач
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, м. Київ, Україна

Анотація. Запропоновано класифікацію прикладних професійно орієнтованих задач з курсу фінансової математики для студентів напряму підготовки «Математика (додаткові спеціальності: економіка, інформатика)» педагогічних університетів, сформульовано методичні рекомендації щодо їх розв'язання.
Ключові слова: *фінансова математика, методика навчання, прикладні задачі, професійно орієнтовані задачі*

У психолого-педагогічній літературі немає єдиного трактування поняття «задача». З точки зору дидактики та методики навчання математики задачу тлумачать як ситуацію зовнішньої діяльності, що запропонована окремо від суб'єкта діяльності [7]. Традиційно під задачею розуміють будь-яку вимогу обчислити, перетворити, дослідити, побудувати або довести щонебудь. У психології задача розглядається як мета, задана в певних умовах, що являє собою особливу характеристику діяльності суб'єкта. Задача виступає як суб'єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, в якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта [7].

Як відомо, задачі, як процес здійснення розумової діяльності, виконують чотири основні функції: навчальну, розвивальну, виховну і контрольну.

На сьогодні дуже добре розвинена концепція розвивального навчання, тому розвивальній функції, на відміну від інших, виділяють особливе місце. У своїй роботі Д. Пойя [6] стверджує, що задачі мають не тільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, а й формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до явищ, що вивчаються.

На нашу думку, цьому сприятиме використання у навчальній практиці професійно орієнтованих та прикладних задач.

У педагогічній та дидактичній літературі поняттю прикладної задачі дають наступні тлумачення:

• задача, що потребує перекладу з природної мови на математичну;

• задача, яка близька за формулюванням і методами розв'язування до задач, що виникають на практиці [1];

• сюжетна задача, сформульована у вигляді задачі-проблеми [3].

Професійно орієнтовану задачу розглядають, як таку, що максимально наближена до майбутньої професійної діяльності.

На нашу думку, професійно орієнтовані та прикладні задачі утворюють «множини з непорожнім перерізом», які не є підмножинами одна одної.

Прикладна професійно орієнтована задача повинна задовольняти ряд вимог:

1) вимога задачі формулюється так, як вона зазвичай формулюється у житті;

2) розв'язок задачі має практичну значущість;

3) дані та шукані величини задачі мають бути реальними, взятими з життя [2].

Використання прикладних задач, на думку Новицької Л.І., сприятиме подоланню існуючих суперечностей між навчальною та професійною діяльністю, а саме:

а) між абстрактним предметом навчальної діяльності та реальним предметом майбутньої професійної діяльності, де завуальовані знання породжують неможливість застосування їх на практиці;

б) між системним застосуванням знань в регуляції професійної діяльності і розподіленістю їх засвоєння за різними навчальними дисциплінами, тобто відсутня інтеграція знань;

в) між безініціативною позицією студента і активною позицією фахівця у професійній діяльності, якому необхідно аналізувати ситуацію, ставити задачу, розв'язувати її, доводити істинність [5].

В статті пропонується класифікація прикладних професійно орієнтованих задач курсу фінансової математики для студентів напряму підготовки «Математика (додаткові спеціальності: економіка, інформатика)» педагогічних університетів та формулюються методичні рекомендації щодо їх розв'язання.

Якщо говорити при задачі, що розглядаються у фінансовій математиці, то вони мають такі особливості:
– переважна більшість задач є прикладними;
– всі задачі з фінансової математики можна розглядати як професійно орієнтовані для студентів спеціальності «Математика (додаткові спеціальності: економіка, інформатика)».

Залежно від того, яку вимогу поставлено в задачі, розглядають різні види математичних задач. Зважаючи на те, що майже всі розглянуті задачі вимагають від студентів визначити, обчислити, провести аналіз, дослідити, то в рамках обраного курсу ми розглядаємо лише задачі на обчислення та дослідження і в окремих випадках задачі на доведення.

Розглянемо приклад задачі на обчислення (умова взята зі збірника задач [4]).

Задача 1. Інвестор має вибрати перед першою виплатою один з двох вкладень коштів:
– платити по 100 грн. на початку кожного року, зробивши всього 10 виплат, і отримати через 10 років суму в 1700 грн.;
– платити по 100 грн. на початку кожного року, зробивши всього 15 виплат, і отримати через 15 років суму в 3200 грн.

1. Обчисліть річну відсоткову ставку для кожного варіанту.

2. Припустимо, що інвестор вибрав перший варіант. Отримавши через 10 років належну йому суму, він відразу вносить її на 5 років на депозит з фіксованою річною відсотковою ставкою. Крім того, на початку кожного з цих 5 років він вносить на рахунок по

100 грн. з тією самою відсотковою ставкою. Якою має бути відсоткова ставка, щоб наприкінці 15-го року інвестор мав на рахунку 3200 грн?

Розв'язання. 1. Рівняння вартостей для першого варіанту на кінець 10-го року

$$1700 = 100\left[(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{10}\right] = \\ = 100(1+i)\left[(1+i)^{10}-1\right]/i \ .$$

У правій частині зростаюча функція від i. Для того, щоб знайти з рівняння шукане значення i, потрібно скористатися методами послідовного наближення.

Зауважимо, що на практиці найчастіше користуються такими методами наближеного обчислення рівнянь, як: метод половинного поділу; метод хорд; метод дотичних (Ньютона) (оскільки фінансові обчислення оперують великою кількістю даних і часто застосовують програмні засоби, як Excel, то застосування цього методу стає нераціональним).

З того. що $i \in [0;1]$, розіб'ємо його на 40 рівних частин. Як видно з рисунку (рис. 1) $i \in [0{,}075;0{,}1]$.

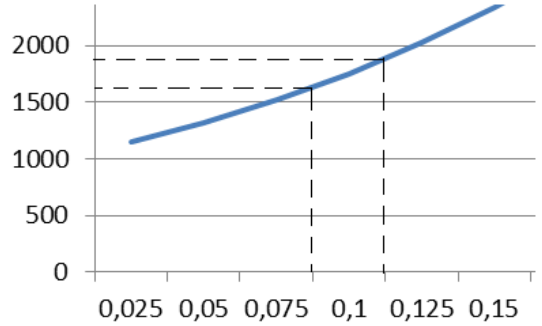

Рис. 1.

Для визначення i скористаємось методом половинного поділу, для цього скористаємось наступною формулою: $i_c = \dfrac{i_k - i_{k-1}}{2}$, де k – номер частини розбиття відрізка.

Обчислимо

$$i_c = \frac{0{,}075+0{,}1}{2} = 0{,}0875 \Rightarrow f(i_c) = 1632{,}64615 .$$

Далі розглядатимемо відрізок $i \in [0{,}0875;0{,}1]$ і ділитимемо його знову навпіл та обчислюватимемо $f(i)$. Таку кількість кроків можна продовжувати до нескінченності, тому важливо на самому початку вказувати розмір похибки, яка б задовольняла отриманий результат.

Нехай $i_k - i_{k-1} < \varepsilon = 0{,}00001$. Відмітимо, що на 14 кроці наближень при $i = 0{,}094603$ отримаємо $f(i) = 1700{,}002$ грн.

Зауваження. У фінансовій математиці ми маємо справу з грошовим еквівалентом, тому для нас важливі лише два десяткові знаки після коми.

Рівняння вартостей для другого варіанту на кінець 15-го року

$$3200 = 100\left[(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{15}\right] = \\ = 100(1+i)\left[(1+i)^{15}-1\right]/i \ .$$

Хотілося б знайти наближене значення i методом хорд, використавши формулу:

$$i_c = i_{k-1} - \frac{(i_k - i_{k-1})\, f(i_{k-1})}{f(i_k) - f(i_{k-1})},$$

де k – номер обраної частини розбиття відрізка, та зважаючи на те, що наша функція на проміжку $i \in [0;1]$ не перетинає з віссь i, методом половинного поділу отримаємо значення $i = 0{,}09$.

2. Рівняння вартостей грошових потоків на кінець 15-го року

$$3200 = 1700(1+i)^5 + 100\left[(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^5\right] = \\ = 1700(1+i)^5 + 100(1+i)\frac{(1+i)^5-1}{i} \ .$$

Методом половинного поділу його наближене значення i =0,085.

При розв'язанні задач з фінансової математики, як правило, необхідно виконати ряд вимог:
– здійснити аналіз умови задачі,
– побудувати та дослідити математичну модель, що в свою чергу передбачає виконання аналізу, обчислення та дослідження,
– інтерпретувати результати.

Розглянемо приклад задачі, в якій треба і проаналізувати, і обчислити, і дослідити.

Задача 2. На ринку цінних паперів діють такі ціни на безкупонні облігації, що погашаються за номіналом: на однорічні – 97 (у.г.о.), на дворічні – 93 (у.г.о.), на трирічні – 88 (у.г.о.), на чотирирічні – 83 (у.г.о.).

1) Припускаючи, що арбітраж відсутній, обчислити: а) y_t, $t = 1,2,3,4$, де y_t – t-річна спотова відсоткова ставка; б) норму прибутку чотирирічної облігації, що погашається за номіналом і за якою виплачується 4% купони із заборгованістю.

2) Поясніть чому чотирирічна спотова ставка більша, ніж норма прибутку облігації з пункту 1б), що погашається за номіналом і має 4%-ий купон, який виплачується із заборгованістю.

3) Використовуючи теорію «переваги ліквідності», дослідіть поведінку кривої доходу, визначеної спотовими відсотковими ставками, обчисленими в пункті 1а), якщо майбутні короткострокові відсоткові ставки очікуються сталими.

Розв'язання. 1. За відсутності арбітражу: а) з умов задачі одержимо систему рівнянь $97 = 100/(1+y_1)$, $93 = 100/(1+y_2)^2$, $88 = 100/(1+y_3)^3$, $83 = 100/(1+y_4)^4$ Звідси $y_1 = 3{,}0928\%$, $y_2 = 3{,}6952\%$, $y_3 = 4{,}3532\%$, $y_4 = 4{,}7684\%$.

б) Нехай i – норма прибутку чотирирічної облігації, що погашається за номіналом, з 4%-ми купонами, які виплачуються із заборгованістю.

Тоді $$4\left[\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\frac{1}{(1+i)^4}\right]+\frac{100}{(1+i)^4} = \\ = 4\left[\frac{1}{(1+y_1)}+\frac{1}{(1+y_2)^2}+\frac{1}{(1+y_3)^3}+\frac{1}{(1+y_4)^4}\right]+\frac{100}{(1+y_4)^4} .$$

Використавши рівняння з пункту 1а), дістанемо

$$4\left[\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\frac{1}{(1+i)^4}\right]+\frac{100}{(1+i)^4} = \\ = 4(0{,}97+0{,}93+0{,}88+0{,}83)+83 \ .$$

Звідси $i = 4{,}717\%$.

2. Облігацію, за якою сплачується купон, можна уявляти як складену з чотирьох облігацій з нульовим купоном, що погашаються в моменти часу 1, 2, 3, 4. Ті облігації, що погашаються раніше, мають норму прибутку меншу за чотирирічну спотову ставку, а норма прибутку облігації з купоном є опуклою комбінацією чотирьох спотових ставок.

3. Згідно з теорією «переваги ліквідності», короткострокові облігації мають забезпечувати меншу норму прибутку, ніж довгострокові, тому що інвестори цінують ліквідність і нижчий капітальний ризик. Тому крива доходу є зростаючою при сталих очікуваних короткострокових ставках так само, як крива доходу в пункті 1.

У процесі вивчення фінансового ринку, крім фінансових розрахунків, розглядаються і суто теоретичні математичні факти, які вимагають доведення.

Задача 3 [8]. Підприємець має повернути позику у вигляді грошового потоку з виплатами x_1, x_2, …, x_n у моменти t_1, t_2, …, t_n відповідно. Він пропонує виплатити всю суму $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ у момент

$$t^* = \frac{x_1 t_1 + x_2 t_2 + \ldots + x_n t_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}.$$

Банк, що надавав позику, пропонує повернути її сплатою суми $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ у момент часу T, що для даного значення інтенсивності банківського відсотка δ визначається рівністю

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)e^{-\delta T} = x_1 e^{-\delta t_1} + x_2 e^{-\delta t_2} + \ldots + x_n e^{-\delta t_n}.$$

Довести, що $t^* > T$.

Розв'язання. Спочатку припустимо, що числа x_1, x_2, …, x_n – цілі. Використовуючи нерівність Коші, одержимо

$$e^{-\delta T} = \frac{x_1 e^{-\delta t_1} + x_2 e^{-\delta t_2} + \ldots + x_n e^{-\delta t_n}}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} >$$
$$(e^{-x_1 \delta t_1} \cdot e^{-x_2 \delta t_2} \cdot \ldots \cdot e^{-x_n \delta t_n})^{1/(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)} = e^{-\delta t^*}.$$

Якщо числа x_1, x_2, …, x_n – раціональні, то задача зведеться до розв'язання розглянутого випадку шляхом введення досить дрібної грошової одиниці. Якщо x_1, x_2, …, x_n не всі раціональні, потрібно використати раціональні наближення та граничний перехід.

Фінансова математика, як синтетична і прикладна наука, для розв'язання і дослідження ряду важливих фінансово-економічних задач користується методами різних галузей математики, узагальнюючи їх або конкретизуючи (розглядаючи частинні випадки), а також синтезуючи нові методи на основі раніше відомих.

Для успішного засвоєння дисципліни «Фінансова математика» мають бути встановлені безпосередні міжпредметні зв'язки з такими навчальними дисциплінами: «Економічна теорія», «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія», «Математичний аналіз», «Математичне програмування», «Методи обчислень» та «Теорія ймовірностей і математична статистика», вивчення яких реалізуватиме прикладну та професійну спрямованість навчання. У зв'язку з цим, задачі фінансової та актуарної математики можна класифікувати і за методами їх розв'язування. Таку класифікацію нами подано у вигляді наступної схеми (рис. 2).

Рис. 2. Класифікація математичних методів, що використовуються при розв'язанні задач з фінансової математики

Проілюструємо розроблену нами класифікацію прикладами задач, які доцільно використовувати у процесі навчання фінансової математики.

Задача 4 (МА, методи диференціального числення). Капітал в 1 млрд. грн. може бути розміщений у банку під 50% річних або інвестований у виробництво, причому ефективність вкладення очікується в розмірі 100%, а витрати задаються квадратичною залежністю. Прибуток оподатковується в p%. При яких значеннях p вкладення у виробництво є більш ефективним, ніж чисте розміщення капіталу у банку?

Розв'язання. Нехай x (млрд. грн.) інвестується у виробництво, а $1 - x$ - розміщується під відсотки. Тоді розміщений капітал через рік стане рівним $(1-x)(1+\frac{50}{100}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$, а капітал, вкладений у виробництво, визначимо за формулою $x(1+\frac{100}{100}) = 2x$.

Витрати складуть ax^2, оскільки за умовою вони задаються квадратичною залежністю, тобто прибуток від вкладення у виробництво $c = 2x - ax^2$. Податки складуть $(2x - ax^2)\frac{p}{100}$, тобто чистий прибуток виявиться рівним $(1 - \frac{p}{100})(2x - ax^2)$.

Загальна сума через рік складе:

$$S(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + (1 - \frac{p}{100})(2x - ax^2) = \\ = \frac{3}{2} + \left[2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right]x - a\left(1 - \frac{p}{100}\right)x^2.$$

Треба знайти максимальне значення цієї функції на відрізку [0;1]. Маємо

$S'(x) = 2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} - 2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)x$; $S'(x) = 0$ при

$$x_0 = \frac{2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}}{2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)};\ S''(x) = -2a\left(1 - \frac{p}{100}\right) < 0,$$

тобто x_0 – точка максимуму. Щоб $x_0 \in [0;1]$, необхідно виконати умову $0 < -2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} < 1$, або $p < 25$.

Таким чином, якщо $p > 25$, то вигідніше нічого не вкладати у виробництво і розмістити весь капітал у банку. Якщо $p < 25$, то можна показати, що при

$$x = x_0 \quad S(x_0) = \frac{3}{2} + \frac{\left[2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right]^2}{4a\left(1 - \frac{p}{100}\right)} > \frac{3}{2} = S(0),$$ тобто

вкладення у виробництво вигідніше, ніж чисте розміщення під відсотки.

Задача 5 (МА, методи інтегрального числення). Визначити дисконтований прибуток за три роки при відсотковій ставці 8%, якщо початкові (базові) капіталовкладення склали 10 млрд. грн. і передбачається щорічне збільшення капіталовкладень на 1 млрд грн.

Розв'язання. Очевидно, що капіталовкладення задаються функцією $f(x) = 10 + 1 \cdot x = 10 + x$. Тоді дисконтована сума капіталовкладень складе

$$D = \int_0^3 (10 + x)e^{-0,08x}dx = \begin{vmatrix} u = 10 + x; du = dx \\ dv = e^{-0,08x}dx; v = -\frac{1}{0,08}e^{-0,08x} \end{vmatrix} =$$

$$= (10 + x)\frac{1}{-0,08}e^{-0,08x}\Big|_0^3 + \frac{1}{0,08}\int_0^3 e^{-0,08x}dx =$$

$$= -\frac{1}{0,08}(13e^{-0,24} - 10) - \frac{1}{0,08^2}e^{-0,08x}\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{0,08}(13e^{-0,24} - 10) - \frac{1}{0,08^2}(e^{-0,24} - 1) \approx 30,5\text{млрд.грн}.$$

Це означає, що через три роки буде отримана однакова нарощена сума як за умови щорічних капіталовкладень у розмірах від 10 до 13 млрд.грн., так і за умови, що одночасні початкові вкладення складали 30,5 млрд.грн. (при одній і тій же відсотковій ставці та неперервному нарахуванні відсотків).

Задача 6 (ДР). Нехай $y(t)$ – кількість продукції, що випускається галуззю за час *t*; *p* – ціна продукції. Сума інвестицій (коштів, направлених на розширення виробництва) $I(t)$ пропорційна прибутку $p \cdot y(t)$ з коефіцієнтом пропорційності m (m=$const, 0 < m < 1$). Зростання швидкості випуску продукції пропорційне збільшенню інвестицій з коефіцієнтом пропорційності k. Вимагається знайти кількість продукції, що випускається галуззю за час t, якщо в початковий момент часу $t = t_0$, $y = y_0$.

Розв'язання. У відповідності до умови,

$I(t) = m \cdot p \cdot y(t)$, $y'(t) = k \cdot I(t)$, $y'(t) = k \cdot m \cdot p \cdot y(t)$.

Позначимо $z = k \cdot m \cdot p$. Тоді рівняння набуде вигляду $y'(t) = zy(t)$.

Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dt} = zy,\ \frac{dy}{y} = zdt,\ \ln|y| = zt + \ln|C|,\ y = Ce^{zt}.$$

Врахуємо, що $y\big|_{t=t_0} = y_0$, тоді $y_0 = Ce^{zt_0}$, $C = y_0e^{-zt_0}$.

Звідси $y = y_0e^{z(t-t_0)}$.

Задача 7 (ТЙМС, ймовірнісні методи) [8]. Щороку страхова компанія підписує ряд договорів страхування домогосподарств, для кожного з яких премія становить $80. Сумарні річні позови від кожного поліса мають розподіл Пуассона з параметром 0,4 та індивідуальними позовами з параметрами α і λ.

Накладні витрати на оброблянням позову є випадкові величини, рівномірно розподілені між $50 та $$b$, ($b$>50), і не залежать від величини цього позову. Випадкова величина S відображає сумарні позови й витрати від усього портфелю протягом року. Вважають, що S має близький до нормального розподіл.

а) нехай $\alpha = 1, \lambda = 0,01, b = 100$. Доведіть, що компанія повинна продавати за рік не менше 884 полісів, щоб досягти принаймні 99% упевненості в тому, що надходження премій перевищить видатки на покриття позовів і накладні витрати.

б) припустимо тепер, що значення α, λ та b достовірно невідомі, але можуть знаходитися у таких межах: $0,95 \le \alpha \le 1,05$; $0,009 \le \lambda \le 0,011$; $90 \le b \le 110$.

Вибравши найгірші можливі для компанії значення α, λ, b, визначте кількість полісів, які має продати компанія, щоб на 99% бути впевненою у тому, що надходження премій перевищуватиме видатки на покриття позовів і накладні витрати на їх обробляння.

Розв'язання. Нехай X_i – це величина i-го позову, а Y_i – величина відповідних накладних витрат. Позначимо через N загальну кількість позовів за портфелем, а через n – кількість полісів у портфелі.

Оскільки N є сумою пуассонівських незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р. в.в), то N має розподіл Пуассона з параметром $0,4n$, а S можна зобразити, як $S=\sum_{i=1}^{N}(X_i+Y_i)$, де $\{X_i+Y_i\}_{i\geq 1}$ є послідовністю н.о.р. в.в., незалежних від N. Звідси випливає, що S має складний розподіл Пуассона, у якому $Z_i=X_i+Y_i$ відображає величину i-го індивідуального позову (i-го доданка).

Тоді $MS=0{,}4nM(X_i+Y_i)$,

$DS=0{,}4nM(X_i+Y_i)^2=0{,}4n(MX_i^2+2MX_iY_i+MY_i^2)$.

Обчислимо моменти X_i, Y_i у термінах α, λ та b:

$$MX_i=\frac{\alpha}{\lambda};\ MX_i^2=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2};\ MY_i=\frac{50+b}{2};$$

$$MY_i^2=\frac{b^2+50b+2500}{3}.$$

а) За умовою $\alpha=1, \lambda=0{,}01, b=100$, тоді матимемо

$$MS=70n \text{ та } DS=(127{,}8)^2n.$$

S, в свою чергу, наближено має нормальний розподіл із середнім $70n$ та стандартним відхиленням $127{,}8\sqrt{n}$. Надходження премій склало $80n$, і нам потрібно знайти найменше значення n, яке задовольнить нерівність $P(S<80n)\geq 0{,}99$. Стандартизуємо в.в. S, тоді

$$P\left(\frac{S-70n}{127{,}8\sqrt{n}}<\frac{80n-70n}{127{,}8\sqrt{n}}\right)\geq 0{,}99.$$

99%-ий квантиль стандартного нормального розподілу дорівнює 2,326, отже, отримана нерівність перетвориться на таку: $\frac{80n-70n}{127{,}8\sqrt{n}}\geq 2{,}326$, звідки маємо $n\geq 883{,}7$ або $n\geq 884$, якщо розглядати найближче ціле число.

б) Найгіршою можливою комбінацією значень α, λ та b для страхової компанії є комбінація, яка дає найбільші можливі значення для MS і DS. Для того, щоб пересвідчитися у цьому, позначимо через μ та σ математичне сподівання та стандартне відхилення сумарних позовів та витрат на їх оброблляння для індивідуального полісу. Параметри μ і σ будуть функціями від α, λ, b, причому $MS=n\mu$ та $DS=n\sigma^2$. Аналогічно попередньому випадку отримуємо для n: $\frac{(80-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\geq 2{,}326$, звідки маємо, що $n\geq\left(\frac{2{,}326\sigma}{80-\mu}\right)^2$.

Отже, найбільше значення n відповідає найбільшим значенням μ і σ (за умови, що найбільше значення μ є меншим за 80). Зауважимо, що $\mu=0{,}4M(X_i+Y_i)$, $\sigma^2=0{,}4M(X_i+Y_i)^2$. З цих формул для моментів X_i+Y_i випливає, що μ і σ є максимальними, коли α і b набувають найбільших, а λ найменшого значень, тобто $\alpha=1{,}05$; $b=110$; $\lambda=0{,}009$. Така комбінація дає $\mu=78{,}67$ та $\sigma=144{,}14$. Отже, n має бути принаймні 64 для того, щоб страхова компанія на 99% була впевнена, що надходження премії перевищить величину видатків на покриття позовів і відповідні накладні витрати.

Задача 8 (МП). Фірма має можливість інвестувати щорічно до 10 млн. грн. В якості можливих об’єктів вкладення розглядаються чотири проекти, задані наступними грошовими потоками, млн. грн.

Номер проекту	Рік		
	0-й	1-й	2-й
1	-10	+30	+5
2	-5	+5	+20
3	-5	+5	+ 15
4	0	-40	+60

Дані проекти піддаються поділу, тобто можна реалізовувати не тільки повністю кожен із аналізуючих проектів, але і будь-яку його частину; при цьому до розгляду береться відповідна частка інвестицій і грошових надходжень. Необхідно скласти портфель проектів з максимальним значенням показника чистого приведеного доходу, якщо ставка дисконтування – 10%.

Зауваження. Задача вимагає від студентів спеціальності «Математика (додаткові спеціальності: економіка і інформатика») теоретичних знань з курсу економічної теорії та розуміння суті поняття «чистого приведеного доходу».

Розв’язання. Побудуємо математичну модель задачі.

Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 частки реалізації цих проектів, які необхідно визначити. Зважаючи на адитивність показника NPV чистий приведений дохід портфеля, що складається з x_1, x_2, x_3, x_4 частин кожного проекту, становить величину

$$z=\sum_{k=1}^{4}x_k NPV_k \text{ (цільова функція).}$$

Оскільки, нас цікавить максимальне значення показника чистого приведеного доходу, то будемо шукати найбільше значення цільової функції.

Застосовуючи Excel, знайдемо для кожного проекту чисельне значення показника NPV.

Проект	1	2	3	4
NPV	21,40	16,07	11,94	13,22

Підставивши ці дані в формулу z і запишемо критерій оптимізації формованого портфеля проектів: $z=21{,}4x_1+16{,}07x_2+11{,}94x_3+13{,}22x_4\to\max$.

Перейдемо до обмежень, які накладаються на вибір невідомих x_i. За умовою, початкові вкладення обмежені 10 млн грн. Тому $10x_1+5x_2+5x_3\leq 10$.

На початку 2-го року бюджет капітальних вкладень може бути збільшений за рахунок надходжень по реалізованим проектам. З урахуванням цього прийдемо до наступного нерівності: $40x_4\leq 10+30x_1+5x_2+5x_3$.

Частки впроваджуваних проектів не можуть бути від’ємними, отже, x_1, x_2, x_3, $x_4\geq 0$.

Відмітимо, що побудована модель являє собою задачу лінійного програмування, яку студенти вміють розв'язувати, оскільки раніше вивчали «Математичне програмування», для отримання результату можуть використати програмний засіб Excel, з використанням якого для розв'язання подібних задач, познайомилися в курсах «Математичне програмування» та «Методи обчислень».

За результатами підрахунку отримаємо наступний оптимальний план інвестицій. Спочатку всі 10 млн грн. повинні бути інвестовані в другий проект ($x_2^{опт} = 2$), а по закінченні 1-го року слід приступити до реалізації «половинного» четвертого проекту ($x_4^{опт} = 5$), перший і третій проекти в портфель не включаються ($x_1^{опт} = 0$; $x_3^{опт} = 0$). При такому плані інвестицій величина чистого приведеного доходу досягає найбільшого значення $NPV_{\max} = 38{,}75$ млн. грн..

Задача 9 (МА+ТЙМС, методи регресійного аналізу). Визначити страховий тариф на 2015 рік за даними страхової статистики, наведеними в наступній таблиці.

Таблиця 1. Дані страхової статистики

№ п/п	Рік	Загальна страхова сума S (тис.грн.)	Загальне страхове відшкодування Sb (тис.грн.)
1	2010	20000	400
2	2011	28000	700
3	2012	25000	800
4	2013	30000	900
5	2014	35000	1400

Для розрахунку скористатися методикою прогнозування рівня збитковості страхової суми.

Розв'язання. Розраховуючи за допомогою формули $Y_i = \dfrac{Sb_i}{S_i}$ річні збитки $Y_i (i = 1, 2,..5)$ страхових сум, заповнимо таблицю 2.

Таблиця 2. Дані про рівень збитковості по рокам

i	1	2	3	4	5
Збитковість Y_i страхових сум	0,020	0,025	0,032	0,030	0,040

Побудуємо рівняння простої лінійної регресії (лінійний тренд) у вигляді: $Y_i^* = a_0 + a_1 \cdot i$.

Для визначення коефіцієнтів a_0, a_1 скористаємось методом найменших квадратів. З цією метою запишемо наступну залежність:

$$D(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{5} (Y_i - a_0 - a_i \cdot i)^2 ,$$

мінімальне значення якої будемо шукати.

Значення a_0, a_1 , що забезпечують мінімум функції $D(a_0, a_1)$, задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial a_0} = -2\sum\limits_{i=1}^{5}(Y_i - a_0 - a_i \cdot i), \\ \dfrac{\partial D}{\partial a_1} = -2\sum\limits_{i=1}^{5}(Y_i - a_0 - a_i \cdot i)i = 0, \end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел: $\begin{cases} a_0 = 0{,}0159, \\ a_1 = 0{,}0045. \end{cases}$

Підставивши отримані числа в рівняння регресії, отримаємо такий лінійний тренд: Y_i^*=0,0159+0,0045·i.

Підставимо тепер значення $i = 6$ і отримаємо прогноз збитків на 2015 рік: $Y_i^* = 0{,}0429$.

Для обчислення основної частини $T_O = \dfrac{Sb}{S} \cdot 100$ нетто-ставки T_H , отримане значення потрібно *помножити на* 100 грн.: $T_O = 0{,}0429 \cdot 100 = 4{,}29$ (грн.).

Знайдемо тепер ризикову надбавку T_P . Для початку обчислимо середнє квадратичне відхилення значень збитковості за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - Y_i^*)^2} = \sqrt{\frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - Y_i^*)^2} = \\ = \sqrt{\frac{0{,}0000247}{4}} = 0{,}0025 .$$

Для розрахунку ризикової надбавки T_P використаємо наступну формулу $T_P = \beta(\gamma, n) \cdot \sigma$, де $\beta(\gamma, n)$ – коефіцієнт, величина якого залежить від заданого рівня надійності γ і числа *n* розглянутих років. Значення коефіцієнта $\beta(\gamma, n)$ табличне і для γ=0,9 становить $\beta(\gamma, n) = 1{,}984$.

Отримаємо $T_P = \beta(\gamma, n) \cdot \sigma = 1{,}984 \cdot 0{,}0025 = 0{,}005$ і, як результат, $T_H = T_O + T_P = 4{,}29 + 0{,}005 = 4{,}295$.

Якщо частка навантаження в тарифній ставці T_Δ складає 30%, то тарифна ставка розраховується за формулою:

$$T_\Delta = \frac{T_H}{100 - 30} \cdot 100 = \frac{4{,}295}{70} \cdot 100 = 6{,}14 \text{ (грн.)}.$$

Задача 10 (МП, динамічні методи). Фірма планує нарощування виробничих потужностей на трьох підприємствах, для чого виділяються кошти обсягом 18 млн. гривень. Для кожного підприємства розроблено інвестиційні проекти, які містять обсяги загальних витрат (інвестицій) та прибутків, що пов'язані з реалізацією кожного проекту.

Розв'яжіть задачу, якщо заданий обсяг інвестицій становитиме 20 млн. грн., а перший інвестиційний проект (ситуація, коли певному підприємству не виділяються кошти) є недопустимим.

Інвестиційний проект	Підприємство 1		Підприємство 2		Підприємство 3	
	інвестиції, млн. грн.	прибуток, млн. грн.	інвестиції, млн. грн.	прибуток, млн. грн.	інвестиції, млн. грн.	прибуток, млн. грн.
1	0	0	0	0	0	0
2	2	6	6	12	7	9
3	4	8	7	14	8	10
4	5	11	9	18	10	14

Розв'язання такої задачі не викличе у студентів особливих проблем, оскільки вона базується на використані методів динамічної оптимізації, а це їм знайоме з курсу «Математичного програмування».

У процесі розв'язання задач з фінансової математики ми рекомендуємо студентам користуватися такими методичними рекомендаціями:

1. Перш ніж приступати до розв'язання задачі треба з'ясувати відповідний теоретичний матеріал, пригадати при необхідності деякі залежності.
2. Приступаючи до побудови математичної моделі, необхідно з'ясувати її економічний зміст і постановку вимоги.
3. За побудованою моделлю визначитися з методом її розв'язання.
4. Одержавши розв'язання задачі в загальному вигляді, проаналізувати та переконатися в тому, що він задовольняє початкові умови задачі.
5. При розрахунках користуватися методами наближених обчислень.
6. Отримавши числових результат, оцінити його правдоподібність (так, отримавши значення кореляції більше 1, можна говорити про допущену помилку в обчисленнях).
7. Оскільки процеси, які розглядаються у задачах завжди носять реальний зміст, то важливо при формулюванні відповіді інтерпретувати її у той процес, в якому досліджуване явище спостерігалось.

ЛІТЕРАТУРА

1. Возняк Г. Взаємозвязок теорії з практикою в процесі вивчення математики. / Г. Возняк, М. Маланюк. – К.: Рад. шк., 1989. – 215 с.
2. Волосюк О. В., Онопченко С. В. Педагогічні аспекти прикладної спрямованості шкільного курсу математики // Вісник ЛНУ імені Тараса Шевченка. – 2010. – № 17 (204). – С. 36-40.
3. Гете И.В. Избранное [в 2-х ч.]. – Ч.2. – М.: Просвещение, 1985. – 328 с.
4. Збірник задач з фінансової математики / [О.Д. Борисенко, Ю.С. Мішура, В. М. Радченко та ін.]. – К. : Техніка, 2007. – 256 с.
5. Новицька Л.І. Формування вмінь розв'язувати прикладні задачі в процесі вивчення математики студентами аграрних університетів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 / Л.І. Новицька. – К., 2008. – 18 с.
6. Пойя Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970.
7. Слєпкань З.І. Методика навчання математики [Текст] : підручник для студ. мат. спец. вищих навч. закл. / Слєпкань З.І. – К. : Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
8. Ямненко Р.Є. Статистичні методи теорії ризику. URL: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/lecture.pdf

REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED

1. Wozniak G. The relationship between theory and practice in the study of mathematics. / G. Wozniak, M. Malanyuk. – K.: Rad. shkola, 1989. – 215 p.
2. Volosyuk O.V., Onopchenko S.V. Pedagogical aspects of applied mathematics school course orientation // Journal of LNU. – 2010. – № 17 (204). – S.36-40.
3. Goethe I.V. Favorites [in 2 parts.]. – Part 2. – M.: Education, 1985. – 328 p.
4. Problems in Financial Mathematics / [O.D. Borisenko, S. Tinsel, V. Radchenko et al.]. – K: Engineering, 2007. – 256 p.
5. Novitska L.I. Formation of skills to solve applied problems in the study of mathematics students of agricultural universities: Abst. dis. cand. ped. sc. specials. 13.00.02 / L.I. Novitskaya. – K., 2008. – 18p.
6. Poiya D. Mathematical discovery. – M .: Nauka, 1970.
7. Slyepkan' Z.I. Methods of teaching mathematics [Text]: a textbook for students. Math. spec. Higher institution. / Z.I. Slyepkan – K: Zodiac ECO, 2000. – 512 p.
8. Yamnenko R.E. Statistical methods for risk theory. URL: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/lecture.pdf

Sushko O.S. Methodics of forming abilities deal professionally oriented and applied tasks in financial mathematics

Abstract. The classification applied professionally oriented tasks of financial mathematics course for students of specialty «Mathematics (additional specialties: economics, informatics)" Pedagogical Universities, formulated guidelines for their solution.

***Keywords**: financial mathematics, teaching methodics, applications, professionally oriented tasks*

Сушко А.С. Методика формирования умений решать профессионально ориентированные и прикладные задачи финансовой математики

Аннотация. Предложена классификация прикладных профессионально ориентированных задач курса финансовой математики для студентов направления подготовки «Математика (дополнительные специальности: экономика, информатика)» педагогических университетов, сформулированы методические рекомендации по их решению.

***Ключевые слова**: финансовая математика, методика обучения, прикладные задачи, профессионально ориентированные задачи*