Стеблянко П.О., Кравчук Т.В.

Побудова базисного тривимірного сплайна для розв'язування задач математичного моделювання

Кравчук Тетяна Володимирівна, аспірант
Стеблянко Павло Олексійович, професор, доктор фізико-математичних наук
кафедра математики та методики навчання математики
Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, м. Черкаси, Україна

Анотація. Сплайни на сьогоднішній день досить добре зарекомендували себе при інтерполяції та розв'язках різноманітних задач математичного моделювання. Дана робота також присвячена проблемі побудови одного із видів сплайн-функцій, а саме побудові тривимірного базисного сплайну. Тут запропонований загальний вид тривимірного сплайна у вигляді добутку трьох поліномів третього порядку. Суть роботи полягає у тому, щоб знайти дванадцяти невідомих коефіцієнтів даного сплайна. Зазначимо, що областю проектування тривимырного базисного сплайну є куб, який розпадається на вісім рівнозначних кубиків, які в свою чергу діляться ще на вісім рівних попарно еквівалентних частин. При застосуванні всіх умов, включаючи значення похідних в вершинах куба отримано систему з десяти рівнянь, розв'язавши яку знаходимо коефіцієнти тривимірного сплайна, але залежні від кількох параметрів, які в результаті підстановки в загальне рівняння скорочуються і отримується формула загального виду тривимірного кубічного базисного сплайну. Також в даній роботі розглянуто ще три окремі випадки, а саме випадок коли вільний член одного із множників тривимірного сплайну дорівнює нулю, випадок, коли два вільні члени дорівнюють нулю, і коли всі три вільні коефіцієнти дорівнюють нулю. До кожного із чотирьох випадків подано приклад побудови певної поверхні за допомогою утвореного базисного сплайна, і як виявилося, кожен окремий випадок представляє побудову частини сплайну в різнотипних кубиках області його проектування.

***Ключові слова.** Сплайн-інтерполяція, тривимірний базисний сплайн, багатовимірні сплайн-функції.*

Вступ. Сплайн-інтерполяція, як одним із методів наближення, широко застосовується для розв'язування задач математичного моделювання. І тому останнім часом дослідження різних способів сплайн-апроксимації є досить актуальним.

Методи сплайн-функцій вже досить добре зарекомендували себе, як один із методів апроксимації при розв'язуванні різних задач математичного моделювання Цим і зумовлено їх використання в машинній графіці, моделюванні, проектуванні і т.д. В сучасних умовах дизайнерська та інженерна діяльність тісно пов'язана з використанням електронно-обчислювальної техніки. Перед конструкторами, дизайнерами, інженерами завжди постає необхідність мати системи для точного моделювання, візуалізації та аналізу моделей. І чим ефективніші ці моделі, тим краще. Для цього і виникає необхідність побудови багатовимірних сплайн-функцій, що допоможе спростити процес моделювання, забезпечуючи при цьому високу точність.

Огляд публікацій по темі. Протягом останніх років дослідженнями сплайнів та розв'язанням різноманітних задач з допомогою сплайн-функцій займалося багато, як зарубіжних, так і українських вчених. Зокрема, в публікації [5] запропоновано новий підхід до розв'язування задачі для циліндричної оболонки обертання зі змінною жорсткістю, в [4] запропоновано новий варіант методу розв'язку нестаціонарних двовимірних задач термоупругопластичності з допомогою сплайн-функцій, в [3] представлено побудову та дослідження просторових кубічних сплайнів, та їх практичне застосуванням в задачах механіки та математичної фізики, а також в [6] запропоновано побудову двовимірного базисного сплайну. Приставка О.П. в [2] дослідив двовимірні поліноміальні сплайни на основі В-сплайнів п'ятого порядку, а також запропонував спосіб відтворення поверхонь та гіперповерхонь заснований на використанні В-сплайнів. Зеленський А.С. описав методику автоматизованого оконтурення рудних тіл з використанням В-сплайнів [1].

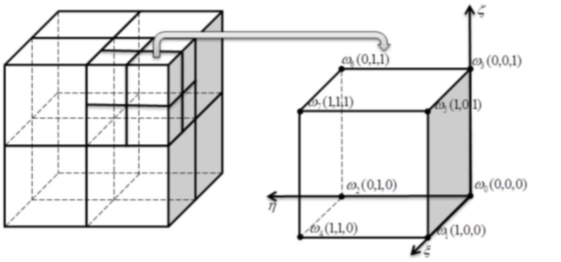
Метою даної роботи є представлення побудови тривимірного базисного сплайну, утвореного як добуток трьох поліномів третього порядку.

Постановка задачі. Для представлення тривимірного базисного сплайну скористаємося наступною формулою:

$$S=\left(a_3\xi^3+a_2\xi^2+a_1\xi+a_0\right)\left(b_3\eta^3+b_2\eta^2+b_1\eta+b_0\right)\left(c_3\zeta^3+c_2\zeta^2+c_1\zeta+c_0\right) \quad (1)$$

Щоб досягти поставленої мети необхідно знайти коефіцієнти $a_i, b_j, c_k \quad (i,j,k=0,1,2,3)$.

На малюнку 1 зображено куб в якому необхідно побудувати базисний тривимірний сплайн (1).



Малюнок 1.

Результати роботи. Знайдемо перші похідні по всіх змінних сплайна (1) і, підставляючи координати точок $\omega_i (i=0,1,2,\ldots 7)$ (мал.1) в (1) та знайдені похідні, утворимо систему з 32-х рівнянь, із якої потрібно виразити невідомі коефіцієнти $a_i, b_j, c_k \quad (i,j,k=0,1,2,3)$ через наперед задані значення точок на даній поверхні (мал. 1). Для цього із даної системи вибираються десять рівнянь, кожне з яких не може бути виражене через інше рівняння з цієї системи. В результаті проведених розрахунків, при $\omega_0 \neq 0$ отримаємо:

$a_1=\omega_{0\xi}\cdot\frac{a_0}{\omega_0}$; $\quad a_2=\left(3\omega_1-3\omega_0-2\omega_{0\xi}-\omega_{1\xi}\right)\frac{a_0}{\omega_0}$;

$a_3=\left(-2\omega_1+2\omega_0+\omega_{0\xi}+\omega_{1\xi}\right)\frac{a_0}{\omega_0}$;

$b_1=\omega_{0\eta}\cdot\frac{b_0}{\omega_0}$; $\quad b_2=\left(3\omega_2-3\omega_0-2\omega_{0\eta}-\omega_{2\eta}\right)\frac{b_0}{\omega_0}$;

$b_3=\left(-2\omega_2+2\omega_0+\omega_{0\eta}+\omega_{2\eta}\right)\frac{b_0}{\omega_0}$; (2)

$c_1=\omega_{0\zeta}\cdot\frac{c_0}{\omega_0}$; $\quad c_2=\left(3\omega_3-3\omega_0-2\omega_{0\zeta}-\omega_{3\zeta}\right)\frac{c_0}{\omega_0}$;

$c_3=\left(-2\omega_3+2\omega_0+\omega_{0\zeta}+\omega_{3\zeta}\right)\frac{c_0}{\omega_0}$;

Введемо позначення:

$A_1=\omega_{0\xi}$; $B_1=\omega_{0\eta}$; $C_1=\omega_{0\zeta}$; $A_2=\left(3\omega_1-3\omega_0-2\omega_{0\xi}-\omega_{1\xi}\right)$;

$B_2=\left(3\omega_2-3\omega_0-2\omega_{0\eta}-\omega_{2\eta}\right)$; $\quad C_2=\left(3\omega_3-3\omega_0-2\omega_{0\zeta}-\omega_{3\zeta}\right)$;

$A_3=\left(-2\omega_1+2\omega_0+\omega_{0\xi}+\omega_{1\xi}\right)$; $\quad B_3=\left(-2\omega_2+2\omega_0+\omega_{0\eta}+\omega_{2\eta}\right)$;

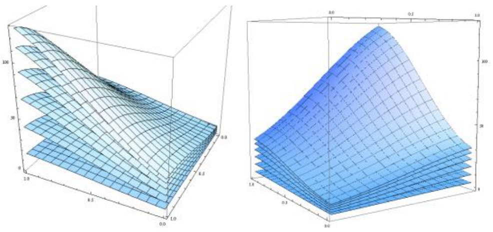
$C_3=\left(-2\omega_3+2\omega_0+\omega_{0\zeta}+\omega_{3\zeta}\right)$. (3)

Підставимо вирази знайдених коефіцієнтів (2) в (1), використавши позначення (3). В результаті маємо загальний вигляд базисного тривимірного сплайна (4), утвореного як добуток трьох поліномів третього порядку в кубі $[0;1]\times[0;1]\times[0;1]$ (мал. 1).

$$S=\left(A_3\xi^3+A_2\xi^2+A_1\xi+\omega_0\right)\left(B_3\eta^3+B_2\eta^2+B_1\eta+\omega_0\right)\left(C_3\zeta^3+C_2\zeta^2+C_1\zeta+\omega_0\right)\frac{1}{\omega_0^2}$$

, при $\omega_0\neq0$. (4)

Для того щоб побудувати графік поверхні за допомогою отриманого сплайна (4) зафіксуємо змінну ζ, і побудуємо поверхні при при зміні ζ від 0 до 1 (мал. 2).



Малюнок 2

Необхідно зазначити, що сплайн (4) доцільно використовувати лише при $\omega_0\neq0$, в протилежному випадку необхідно вибрати інші десять рівнянь із початкової системи, оскільки деякі з рівнянь початкової системи вироджуються, вигляд утвореного базисного сплайна (4) зміниться. Розглянемо всі можливі випадки, при яких $\omega_0=0$:

1. $a_0=0, b_0\neq0, c_0\neq0$

Розв'язуючи утворену систему за параметри візьмемо b_0, c_0. І ввівши позначення отримаємо:

$A_1^1=\omega_{0\xi}$; $B_1^1=\omega_{1\eta}$; $C_1^1=\omega_{1\zeta}$; $A_2^1=\left(3\omega_1-2\omega_{0\xi}-\omega_{1\xi}\right)$;

$B_2^1=\left(3\omega_4-3\omega_1-2\omega_{1\eta}-\omega_{4\eta}\right)$; $\quad C_2^1=\left(3\omega_5-3\omega_1-2\omega_{1\zeta}-\omega_{5\zeta}\right)$;

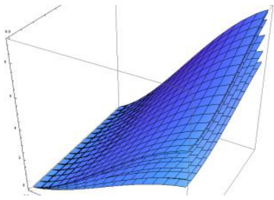
$A_3^1=\left(-2\omega_1+\omega_{0\xi}+\omega_{1\xi}\right)$; $\quad B_3^1=\left(-2\omega_4+2\omega_1+\omega_{1\eta}+\omega_{4\eta}\right)$;

$C_3^1=\left(-2\omega_5+2\omega_1+\omega_{1\zeta}+\omega_{5\zeta}\right)$. (5)

Підставимо (9) в (1), використавши позначення (10). В результаті маємо:

$$S=\left(A_3^1\xi^3+A_2^1\xi^2+A_1^1\xi\right)\left(B_3^1\eta^3+B_2^1\eta^2+B_1^1\eta+\omega_1\right)\left(C_3^1\zeta^3+C_2^1\zeta^2+C_1^1\zeta+\omega_1\right)\frac{1}{\omega_1^2},$$

при $\omega_1\neq0$. (6)



Малюнок 3

На малюнку 3 зображено приклад побудови поверхні за допомогою отриманого в даному випадку тривимірного кубічного базисного сплайну (6), при при зміні ζ від 0 до 1.

2. $a_0=0, b_0=0, c_0\neq0$

Введемо позначення:

$A_1^2=\omega_{2\xi}$; $B_1^2=\omega_{1\eta}$; $C_1^2=\omega_{4\zeta}$; $A_2^2=\left(3\omega_4-2\omega_{2\xi}-\omega_{4\xi}\right)$;

$B_2^2=\left(3\omega_4-2\omega_{1\eta}-\omega_{4\eta}\right)$; $C_2^2=\left(3\omega_7-3\omega_4-2\omega_{4\zeta}-\omega_{7\zeta}\right)$;

$A_3^2=\left(-2\omega_4+\omega_{2\xi}+\omega_{4\xi}\right)$; $\quad B_3^2=\left(-2\omega_4+\omega_{1\eta}+\omega_{4\eta}\right)$;

$C_3^2=\left(-2\omega_7+2\omega_4+\omega_{4\zeta}+\omega_{7\zeta}\right)$ (7)

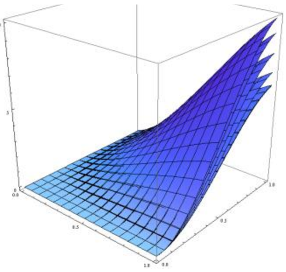
і отримаємо:

$$S=\left(A_3^2\xi^3+A_2^2\xi^2+A_1^2\xi\right)\left(B_3^2\eta^3+B_2^2\eta^2+B_1^2\eta\right)\left(C_3^2\zeta^3+C_2^2\zeta^2+C_1^2\zeta+\omega_4\right)\frac{1}{\omega_4^2}$$

, при $\omega_4\neq0$. (8)

Даний випадок можливий, коли $(a_3+a_2+a_1)\neq0$ і $(b_3+b_2+b_1)\neq0$.

На малюнку 4 зображено приклад побудови поверхні за допомогою отриманого в даному випадку тривимірного кубічного базисного сплайну (8), при зміні ζ від 0 до 1.



Малюнок 4

3. $a_0=0, b_0=0, c_0=0$

В цьому випадку маємо

$$S=\left(A_3^3\xi^3+A_2^3\xi^2+A_1^3\xi\right)\left(B_3^3\eta^3+B_2^3\eta^2+B_1^3\eta\right)\left(C_3^3\zeta^3+C_2^3\zeta^2+C_1^3\zeta\right)\frac{1}{\omega_7^2}$$

, при $\omega_7\neq0$ (9)

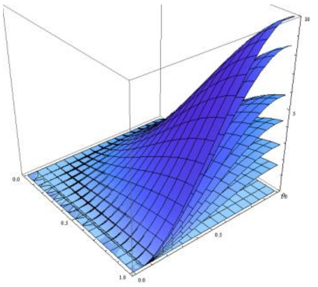
де $A_1^3=\omega_{6\xi}$; $B_1^3=\omega_{5\eta}$; $C_1^3=\omega_{4\zeta}$; $A_2^3=\left(3\omega_7-2\omega_{6\xi}-\omega_{7\xi}\right)$;

$B_2^3=\left(3\omega_7-2\omega_{5\eta}-\omega_{7\eta}\right)$; $C_2^3=\left(3\omega_7-2\omega_{4\zeta}-\omega_{7\zeta}\right)$;

$A_3^3=\left(-2\omega_7+\omega_{6\xi}+\omega_{7\xi}\right)$; $\quad B_3^3=\left(-2\omega_7+\omega_{5\eta}+\omega_{7\eta}\right)$;

$C_3^3=\left(-2\omega_7+\omega_{4\zeta}+\omega_{7\zeta}\right)$. (10)

Наведемо приклад побудованої поверхні за допомогою сплайну (9) у третьому випадку (мал. 5) при зміні ζ від 0 до 1.



Малюнок 5

Зауважимо, що даний випадок можливий, коли $(a_3+a_2+a_1)\neq 0$ і $(b_3+b_2+b_1)\neq 0$, і $(c_3+c_2+c_1)\neq 0$, якщо ж $a_0=0, b_0=0, c_0=0$ і $(a_3+a_2+a_1)=0$, або $(b_3+b_2+b_1)=0$, або $(c_3+c_2+c_1)=0$, розв'язання початкової системи рівнянь неможливе.

Обговорення результатів. Представлений вище тривимірний базисний сплайн можна застосувати при розв'язуванні інтерполяційних задач та задач математичного моделювання, оскільки, як свідчать дослідження, ві дає точність $o(h^4)$, де h – величина кроку розбиття інтерполяційноїсітки. До кожного розглянутого випадку додаються приклади побудови поверхні за допомогою відповідного тривимірного сплайна. При чому, як можна побачити з наведених прикладів, в кожному випадку отримується частина базисного сплайну розміщена в одному з чотирьох різнотипних кубиків, поданого куба на малюнку 1. Необхідно зазначити, що побудова здійснювалась з розрахунку на те, що одна зі змінних є константою, але такою, що належить проміжку [0;1], і, якщо її надавати різних значень від 0 до 1, то будуть отримуватись еквівалентні поверхні, але "видовжені" або "стиснуті", це можна спостерігати на малюнках 2-5, де ζ набуває кількох різних значень, а саме $\{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$.

Оскільки побудований сплайн є залежним від трьох змінних то, щоб отримати повний графік даної сплайнової поверхні, його побудову слід здійснювати в чотирьохвимірному просторі, зважаючи на це на малюнках 2-5 подано зображення поверхні сплайну в різних просторових перетинах.

Висновки. Отже було побудовано тривимірний базисний сплайн як добуток трьох поліномів третього порядку, а також розглянуть випадки побудови сплайну в залежності від наявності вільного коефіцієнта в кожному із многочленів і, до кожного випадку подано приклади побудови поверхні сплайну, при зафіксованій одній із змінних, тобто дано різні зображення поверхні сплайну в різних просторових перетинах.

Даний базисний сплайн можна застосовувати при розв'язуванні інтерполяційних задач та задач математичного моделювання, при дослідженні різноманітних поверхонь та для прогнозування їх форми. При чому побудований базисний сплайн не є громіздким, займаючи небагато машинного часу під час обрахунків, і його використання дає точність $o(h^4)$, що є важливим при розв'язуванні різноманітних задач інтерполяції та задач математичного моделювання.

ЛІТЕРАТУРА (REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Зеленский А.С., Пуханов С.С. Оконтуривание рудных тел с использованием В-сплайнов./ А.С.Зеленский, С.С.Пуханов, Т.А.Подойницына//Вісник КТУ, вип.27. К. – 2011. – с. 3-5.

Zelenskiy A., Puhanov S. [Delineation of ore bodies using B-splines.] / A.Zelensky, S.Puhanov, T.Podoynitsyna / / News KTU, E.27. K. - 2011. - P. 3-5.

2. Приставка П.О. Дослідження двовимірного сплайна на основі В-сплайнів п'ятого порядку / П.О. Приставка, О.Г. Чолишкіна // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: зб. наук. праць. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2008. – Т. 12. – С. 14-27.

Prystavka P. [The study of two-dimensional spline-based B-spline of fifth order] / P. Prystavka, O.Cholyshkina / / Actual problems of automation and information technology: Coll. Science. works. - D.: Type of Dniepropetrovsk. Univ. - 2008. - T. 12. - p. 14-27.

3. Стеблянко П.А. Применение двухмерного кубического сплайна для описания геометрических объектов// Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.– Випуск 3 (44).– Дніпропетровськ, 2006.– С. 07-111.

Steblyanko P. [The use of two-dimensional cubic spline to describe geometric objects] / Sistemni tehnologiї. Regional Interuniversity collection of scientific papers. – I. 3 (44).Dnepropetrovsk, 2006. – P. 07-111.

4. Стеблянко П.О. Аналіз обчислювальної ефективності наближених методів при дослідженні нестаціонарного напружено-деформованого стану тіл з використанням двовимірних сплайнів / Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла: Збірник наукових праць ДНУ.- Дніпропетровськ,– 2005.– Вип.7– 73-87с.

Steblyanko P. [Analysis of the computational efficiency of approximate methods for the study of unsteady mode of deformation bodies using bivariate splines] / Methods applied problems of mechanics of deformable solids: Proceedings of DNU. - Dnepropetrovsk – 2005. – I.7-73-87p.

5. Стеблянко П.О. Застосування двовимірного напруженого сплайну в задачах механіки / П.О. Стеблянко. Системні технології. Регіональній міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 5(46). Дніпропетровськ,– 2006.–17-26с.

Steblyanko P. [The use of two-dimensional spline hard problems in mechanics]/ P. Steblianko. System technologies. Regional Interuniversity collection of scientific papers. – I. 5 (46). Dnepropetrovsk – 2006.–17-26c.

6. Стеблянко П.О., Кравчук Т.В. Побудова та аналіз стикування поверхонь, побудованих за допомогою двовимірних сплайн-функцій/ П.О. Стеблянко, Т.В. Кравчук//Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету: (технічні науки): тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки» / Дніпродзержинськ ДДТУ. – 2013. – В. 2(22). – с.75-82.

Steblyanko P., Kravchuk T. [Construction and analysis of docking surfaces constructed using two-dimensional spline functions] / P. Steblianko, T. Kravchuk / / Proceedings of Dneprodzerzhinsk State Technical University (Engineering Sciences): Theme Issue 'Mathematical Problems of Engineering Mechanics "/ Dneprodzerjinsk DSTU. - 2013. - Issue 2 (22). - P.75-82.

Steblyanko P., Kravchuk T.

The construction of three-dimensional spline basis for solving problems of mathematical modeling

Abstract. Currently splines to date have proven themselves good enough for interpolating and solutions to various problems of mathematical modeling. This work also deals with the problem of constructing a type of spline functions, namely the construction of a three-dimensional spline basis. It provides a perspective view of a three-dimensional spline as the product of three third-order polynomials. The essence of the work is to find the unknown coefficients of the spline. The area of designing three-dimensional spline basis is a cube that splits into eight equivalent blocks, which in turn are divided into eight equal more pairs of equivalent parts. In the application of all conditions, including the values of the derivatives at the vertices of a cube, a system of ten equations, solving which we find the coefficients of three-dimensional spline, but depending on several parameters, which are a result of substitution in the general equation of the contract and obtain a formula of general form of three-dimensional cubic spline basis. Also in this paper we consider three separate cases, namely the case where the constant term of one of the factors in the three-dimensional spline is equal to zero, a case where two free members are zero, and when all three independent coefficients equal to zero. For each of the four cases is an example of building a specific surface formed by the base spline, and as it turned out, each individual case is the construction of the spline in different cubes of its design.

Keyword:. *Spline interpolation, three-dimensional spline basis, multi-dimensional spline functions.*

Стеблянко П.А., Кравчук Т.В.

Построение базисного трехмерного сплайна для решения задач математического моделирования

Аннотация. Сплайны на сегодняшний день достаточно хорошо зарекомендовали себя при интерполяции и решениях различных задач математического моделирования. Данная работа также посвящена проблеме построения одного из видов сплайн-функций, а именно построении трехмерного базисного сплайна. Здесь предложен общий вид трехмерного сплайна в виде произведения трех полиномов третьего порядка. Суть работы заключается в том, чтобы найти неизвестные коэффициенты данного сплайна. Отметим, что областью проектирования трехмерного базисного сплайна является куб, который распадается на восемь равнозначных кубиков, которые в свою очередь делятся еще на восемь равных попарно эквивалентных частей. При применении всех условий, включая значения производных в вершинах куба получена система из десяти уравнений, решив которую находим коэффициенты трехмерного сплайна, но зависящие от нескольких параметров, которые в результате подстановки в общее уравнение сокращаются и получается формула общего вида трехмерного кубического базисного сплайна. Также в данной работе рассмотрены еще три отдельные случаи, а именно случай, когда свободный член одного из множителей трехмерного сплайна равный нулю, случай, когда два свободных члены равны нулю, и когда все три свободные коэффициенты равны нулю. К каждому из четырех случаев приведен пример построения определенной поверхности при помощи образованного базисного сплайна, и как оказалось, каждый отдельный случай представляет построение части сплайна в различных кубиках области его проектирования.

Ключевые слова: *Сплайн-интерполяция, трехмерный базисный сплайн, многомерные сплайн-функции.*