Сорокина М.М., Петрушин П.В., Макухин Р.А.

О τ-замкнутых n-кратно ω-центральных и n-кратно Ω-композиционных формациях конечных групп

Сорокина Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент
Петрушин Павел Викторович, студент магистратуры по направлению «Математика»
Макухин Руслан Александрович, студент магистратуры по направлению «Математика»
Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского, г. Брянск, Россия

Аннотация. Рассматриваются формации конечных групп, т.е. классы конечных групп, замкнутые относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Пусть τ – подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если со всякой своей группой G формация $\mathfrak{F}$ содержит и все ее τ-подгруппы. В статье получено описание строения критических τ-замкнутых n-кратно ω-центральных и n-кратно Ω-композиционных формаций конечных групп.

Ключевые слова: *конечная группа, формация групп, подгрупповой функтор, τ-замкнутая формация, ω-центральная формация, Ω-композиционная формация*

В теории классов конечных групп центральное место занимают формации групп, введенные в рассмотрение В. Гашюцем в 1963 году [1]. Основные результаты о формациях конечных групп представлены в монографиях Л.А. Шеметкова [2], А.Н. Скибы [3]. При исследовании формаций важную роль играют функциональные методы. Так, например, в основе определения локальной формации, введенной в рассмотрение В. Гашюцем, лежит понятие экрана – отображения множества всех простых чисел во множество всех формаций групп, с помощью которого строится локальная формация. В дальнейшем такие функции стали называть спутниками формаций. В 1974 году Л.А. Шеметковым были введены в рассмотрение композиционные формации [4], спутниками которых являются отображения множества всех простых групп во множество всех формаций групп. В дальнейшем стали изучаться частично локальные (ω-локальные) и частично композиционные (Ω-композиционные) формации (см., например, [5-6]). В 1999 году В.А. Ведерниковым был предложен новый функциональный подход к изучению формаций, основанный на использовании для формаций новой функции – направления. В.А. Ведерниковым были введены в рассмотрение ω-веерные и Ω-расслоенные формации [7-8]. При этом ω-локальная формация представила собой один из видов ω-веерной формации, а Ω-композиционная формация – один из видов Ω-рас-слоенной формации. Еще одним важным видом ω-веерных формаций являются изучаемые в настоящей работе ω-центральные формации, направление которых коллинеарно направлению Ω-композиционной формации.

Теория подгрупповых функторов как самостоятельное направление в рамках теории групп берет свое начало в работах Р. Бэра [9] и Б.И. Плоткина [10]. Однако особенно интенсивно данная теория стала развиваться в последние годы в связи с обнаружением тесной связи между подгрупповыми функторами и классами групп. Так, например, А.Н. Скибой в монографии [3] метод подгрупповых функторов применен к изучению свойств локальных формаций, замкнутых относительно систем подгрупп, выделяемых подгрупповыми функторами. В [11] С.Ф. Каморниковым и М.В. Селькиным представлена классификация подгрупповых функторов и разработаны связи подгрупповых функторов с различными классами групп. В частности, интерес в данном направлении представляют τ-замкнутые классы групп. Пусть τ – подгрупповой функтор. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если со всякой своей группой G класс $\mathfrak{F}$ содержит и все τ-подгруппы группы G. Настоящая статья посвящена изучению критических τ-замкнутых n-кратно ω-центральных и критических τ-замкнутых n-кратно Ω-композиционных формаций конечных групп.

Рассматриваются только конечные группы. Основные определения и обозначения можно найти в [7−8, 11−13]. Приведем лишь некоторые из них. Пусть τ – отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп. Говорят, что τ – подгрупповой функтор, если $\tau(G)^{\varphi}=\tau(G^{\varphi})$ для любого изоморфизма φ каждой группы G. Подгрупповой функтор τ называется регулярным, если выполняются следующие два условия:

1) из того, что N – нормальная подгруппа группы G и $M\in\tau(G)$, следует $MN/N\in\tau(G/N)$;
2) из $M/N\in\tau(G/N)$ следует $M\in\tau(G)$ (см., например, [11]).

Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если из $G\in\mathfrak{F}$ всегда следует, что $\tau(G)\subseteq\mathfrak{F}$ [11].

1. Критические τ-замкнутые n-кратно ω-центральные формации конечных групп

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\emptyset\neq\omega\subseteq\mathbb{P}$, $\mathfrak{G}_{\omega}$ – класс всех ω-групп, то есть таких групп G, что $\pi(G)\subseteq\omega$, где $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G; $O_{\omega}(G)$ – $\mathfrak{G}_{\omega}$-радикал группы G; $\mathfrak{G}_{q'}$ – класс всех q'-групп; $\mathfrak{S}_{cp}$ – класс всех групп, у которых каждый главный p-фактор централен; $f:\omega\cup\{\omega'\}\to\{\textit{формации групп}\}$ и $\delta:\mathbb{P}\to\{\textit{непустые формации Фиттинга}\}$ – соответственно ωF-функция и $\mathbb{P}FR$-функция. Формация $\omega F(f,\delta)$ =(G: $G/O_{\omega}(G)\in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)}\in f(p)$ для всех $p\in\omega\cap\pi(G)$) называется ω-веерной формацией с ω-спутником f и направлением δ [8]. Направление δ ω-веерной формации называется bp-направлением, если оно является b-направлением, т.е. $\delta(q)\mathfrak{N}_q=\delta(q)$ для любого $q\in\mathbb{P}$; и является p-направлением, т.е. $G_{q'}\delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$. Через δ_3 обозначается направление ω-центральной формации, то есть $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для всех $p \in \mathbb{P}$ [8].

Пусть δ – некоторая $\mathbb{P}FR$-функция. Подгрупповой функтор τ называется δ-радикальным, если для всякой группы G и для всякой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $G_{\delta(p)} \cap N = N_{\delta(p)}$, для всех $p \in \mathbb{P}$. Пусть τ – подгрупповой функтор. ω-спутник f ω-веерной формации называется τ-замкнутым, если для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ формация $f(p)$ является τ-замкнутой.

Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Всякую формацию считают 0-кратно ω-веерной с направлением δ. При $n \neq 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-веерной с направлением δ, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один $\omega_{(n-1)}$-спутник, то есть такой ω-спутник, все значения которого являются (n-1)-кратно ω-веерными формациями с направлением δ. Отметим, что впервые данная концепция для формаций была предложена А.Н. Скибой, а именно, в 1987 году А.Н. Скиба ввел в рассмотрение понятие n-кратно локальной формации [14].

Через $\tau\omega F_n(\mathfrak{X},\delta)$ обозначается τ-замкнутая n-кратно ω-веерная формация с направлением δ, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$, $\omega F_n^{\tau}(\mathfrak{X},\delta)$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ, обладающая хотя бы одним τ-замкнутым ω-спутником, по-рожденная множеством групп $\mathfrak{X}$. Формацию $\tau\omega F_n(\mathfrak{X},\delta_3)$ обозначают через $\tau\omega Z_n(\mathfrak{X})$.

Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \le \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{X}$ – совокупность групп. Тогда, ввиду леммы 1 [15], справедливо равенство $\tau\omega F_n(\mathfrak{X},\delta) = \omega F_n^{\tau}(\mathfrak{X},\delta)$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, $n \in \mathbb{N}$. τ-замкнутая n-кратно ω-веерная формация $\mathfrak{F}$ с направлением δ называется $\mathfrak{H}_{\tau\omega_n\delta}$-критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные τ-замкнутые n-кратно ω-веерные подформации с направлением δ из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся. Общая проблема изучения $\mathfrak{H}_{\theta}$-критических формаций впервые была поставлена Л.А. Шеметковым в 1980 году [16]. Исследованием критических локальных, ω-локальных, n-кратно ω-локальных формаций занимались А.Н. Скиба и его ученики (см., например, [17]). Отметим, что в работе [15] содержатся результаты о критических τ-замкнутых ω-веерных формациях, а в работе [18] – результаты о критических τ-замкнутых Ω-расслоенных формациях. В следующей теореме изучается строение критических τ-замкнутых n-кратно ω-центральных формаций конечных групп.

<u>Теорема 1.</u> *Пусть $n \in \mathbb{N}$, τ – регулярный δ_3-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – непустая τ-замкнутая ω-центральная формация с максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая n-кратно ω-центральная формация с минимальным τ-замкнутым $\omega_{(n-1)}$-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega_n\delta_3}$-критической, то $\mathfrak{F} = \tau\omega Z_n(G)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $\pi(P) \subseteq \omega$, то формация $f(p)$ является $h(p)_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_3}$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_3}$-критической формацией.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\tau\omega_n\delta_3}$-критическая формация и G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G является монолитической группой с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{F} = \tau\omega Z_n(G)$. По лемме 2 [19] $f(\omega') = \tau\omega Z_{(n-1)}(G / O_{\omega}(G))$, $f(p) = \tau\omega Z_{(n-1)}(G / G_{\mathfrak{S}_{cp}})$, для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Согласно теореме 6 [13] $h(\omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $p \in \omega$ справедливо $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p h_1(p)$, где h_1 – произвольный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{H}$. Ввиду доказательства леммы 1 [15], h является τ-замкнутым ω-спутником формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\pi(P) \subseteq \omega$. Если $f(q) \subseteq h(q)$ для любого $q \in \pi(P)$, то $G / G_{\mathfrak{S}_{cq}} \in f(q) \subseteq h(q)$ для всех $q \in \pi(P)$. Поскольку $G / P \in \mathfrak{H}$ и $P \subseteq O_{\omega}(G)$, то $G / O_{\omega}(G) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$ и, согласно лемме 2 [13] $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $f(p) \not\subseteq h(p)$ для некоторого $p \in \pi(P)$.

Пусть $h(p) = \emptyset$. Тогда $p \notin \pi(\mathfrak{H})$ и $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Так как $p \in \omega \cap \pi(G)$, то $f(p) \neq \emptyset$ и по лемме 7 [13] $Z_p \in \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $Z_p \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, и поэтому $G = Z_p$. Кроме того, $Z_p = (Z_p)_{\mathfrak{S}_{cp}}$ и, значит, $f(p) = (1)$ – $h(p)_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_3}$-критическая формация.

Пусть $h(p) \neq \emptyset$ и $\mathfrak{M}$ – собственная τ-замкнутая (n-1)-кратно ω-центральная подформация из $f(p)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq h(p)$ и M – группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus h(p)$. Тогда M – монолитическая группа с монолитом $R = M^{h(p)}$. Если $R \subseteq O_p(M)$, то $M \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$, что невозможно. Поэтому $O_p(M) = 1$ и по лемме 18.8 [20] существует точный неприводимый $F_p[M]$-модуль K. Пусть T=[K]M. Тогда группа T монолитична с монолитом $K = C_T(K) = T_{\mathfrak{S}_{cp}}$. Ввиду леммы 7 [13], $T \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$, и значит, $\tau\omega Z_n(T) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\tau\omega Z_n(T) = \mathfrak{F}$, то $f(p) = \tau\omega Z_{(n-1)}(T / T_{\mathfrak{S}_{cp}}) = \tau\omega Z_{(n-1)}(M) \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Поэтому $\tau\omega Z_n(T) \subset \mathfrak{F}$, и значит, $\tau\omega Z_n(T) \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $T / T_{\mathfrak{S}_{cp}} \in h(p)$ и $M \in h(p)$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq h(p)$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_3}$-критической.

Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Тогда $P \not\subseteq O_\omega(G)$ и $f(\omega') = \tau\omega Z_{(n-1)}(G) \not\subseteq \mathrm{H} = h(\omega')$. Пусть M – собственная τ-замкнутая (n-1)-кратно ω-центральная под-формация из $f(\omega')$ и $\mathrm{M}_1 = \tau\omega Z_n(\mathrm{M})$. Тогда $\mathrm{M}_1 \subseteq \mathrm{F}$. Если $\mathrm{M}_1 = \mathrm{F}$, то $f(\omega') = \tau\omega Z_{(n-1)}(M/O_\omega(M) : M \in \mathrm{M}) \subseteq \mathrm{M} \subset f(\omega')$. Противоречие. Следовательно, $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{F}$, и значит, $\mathrm{M}_1 \subseteq \mathrm{H}$. Поэтому $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{H} = h(\omega')$ и формация $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_3}$-критической. Теорема доказана.

2. Критические τ-замкнутые n-кратно Ω-композиционные формации конечных групп

Пусть I – класс всех простых групп, Ω – непустой подкласс класса I, G_Ω – класс всех Ω-групп, то есть таких групп G, что $K(G) \subseteq \Omega$, где $K(G)$ – класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G; $\mathrm{G}_{A'}$ – класс всех A'-групп; S_{Zp} – класс всех групп, у которых каждый главный Z_p-фактор централен; $O_\Omega(G)$ – G_Ω-радикал группы G; $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{\textit{формации групп}\}$ и $\varphi : \mathrm{I} \to$ {*непустые формации Фиттинга*} –соответственно ΩF-функция и FR-функция. Формация $\Omega F(f, \varphi)$ =(G: $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$) называется Ω-расслоенной формацией с Ω-спутником f и направлением φ [7]. Направление φ Ω-расслоенной формации называется *br*-направлением, если оно является *b*-направлением, т.е. $\varphi(A)\mathrm{G}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathrm{I}$; и является *r*-направлением, т.е. $\mathrm{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для любого $A \in \mathrm{I}$. Через φ_3 обозначается направление Ω-композиционной формации, то есть $\varphi_3(A) = \mathrm{S}_{cA}$ для всех $A \in \mathrm{I}$ [7].

Определение φ-радикального подгруппового функтора, τ-замкнутого Ω-спутника Ω-расслоенной формации, *n*-кратно Ω-расслоенной формации, $\mathrm{H}_{\tau\Omega_n\varphi}$-критической формации формулируются аналогично соответствующим определениям из пункта 1. Отметим лишь, что τ-замкнутая *n*-кратно Ω-композиционная формация с направлением φ, порожденная множеством групп X, обозначается через $\tau\Omega C_n(\mathrm{X})$.

В следующей теореме описывается строение критических τ-замкнутых *n*-кратно Ω-композиционных формаций конечных групп.

<u>Теорема 2.</u> *Пусть $n \in \mathrm{N}$, τ – регулярный φ_3-радикальный подгрупповой функтор, H – непустая τ-замкнутая Ω-композиционная формация с максимальным внутренним Ω-спутником h, F – τ-замкнутая n-кратно Ω-композиционная формация с минимальным τ-замкнутым $\Omega_{(n-1)}$-спутником f. Если формация F является $\mathrm{H}_{\tau\Omega_n\varphi_3}$-критической, то $\mathrm{F} = \tau\Omega C_n(G)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathrm{H}}$, причем если $K(P) \subseteq \Omega$, то формация $f(A)$ является $h(A)_{\tau\Omega_{(n-1)}\varphi_3}$-критической для некоторого $A \in K(P)$, а если $K(P) \not\subseteq \Omega$, то $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_{\tau\Omega_{(n-1)}\varphi_3}$-критической формацией.*

<u>Доказательство.</u> Пусть F – $\mathrm{H}_{\tau\Omega_n\varphi_3}$-критическая формация и G – группа наименьшего порядка из $\mathrm{F} \setminus \mathrm{H}$. Тогда G является монолитической группой с монолитом $P = G^{\mathrm{H}}$ и $\mathrm{F} = \tau\Omega C_n(G)$. Тогда $f(\Omega') = \tau\Omega C_{(n-1)}(G/O_\Omega(G))$, $f(A) = \tau\Omega C_{(n-1)}(G/G_{\mathrm{S}_{cA}})$, для всех $A \in \Omega \cap K(G)$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. Согласно теореме 1 [12] $h(A) = \mathrm{H}$ для любого $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathrm{A})$ и для всех $A \in \Omega \cap \mathrm{A}$ справедливо $h(A) = \mathrm{G}_A h(A) = \mathrm{G}_A h'(A)$, где h' – произвольный внутренний Ω-спутник формации H.

Пусть $K(P) \not\subseteq \Omega$. Тогда:

$$O_\Omega(G) = 1 \text{ и } f(\Omega') = \tau\Omega C_{(n-1)}(G) \not\subseteq \mathrm{H} = h(\Omega').$$

Пусть M – собственная τ-замкнутая (n-1)-кратно Ω-расслоенная подформация из $f(\Omega')$ и $\mathrm{M}_1 = \tau\Omega C_n(\mathrm{M})$. Тогда $\mathrm{M}_1 \subseteq \mathrm{F}$. Если $\mathrm{M}_1 = \mathrm{F}$, то

$$f(\Omega') = \tau\Omega Z_{(n-1)}(M/O_\Omega(M) : M \in \mathrm{M}) \subseteq \mathrm{M} \subset f(\Omega').$$

Противоречие. Следовательно, $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{F}$, и значит, $\mathrm{M}_1 \subseteq \mathrm{H}$. Поэтому $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{H} = h(\Omega')$ и формация $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_{\tau\Omega_{(n-1)}\varphi_3}$-критической.

Пусть $K(P) \subseteq \Omega$ и $A \in K(P)$. Если $A \notin \mathrm{A}$, то $f(A) = \tau\Omega C_{(n-1)}(G)$, $h(A) = \mathrm{H}$ и поэтому $f(A) \not\subseteq h(A)$.

Как и выше, нетрудно проверить, что всякая собственная τ-замкнутая (n-1)-кратно Ω-расслоенная подформация из $f(A)$ содержится в $h(A)$. Следовательно, в этом случае $f(A)$ – $h(A)_{\tau\Omega_{(n-1)}\varphi_3}$-критическая формация.

Пусть группа A изоморфна Z_p. Тогда $\Omega \cap \mathrm{A} \neq \emptyset$. Пусть $\omega = \{q \in \mathbf{P} \mid Z_q \in \Omega\}$. Используя следствие 4.2 [13], получаем, что F – $\mathrm{H}_{\tau\omega_n\delta_3}$-критическая формация и по теореме 1 формация $f_1(p)$ является $h_1(p)_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_3}$-критической, где f_1– минимальный τ-замкнутый $\omega_{(n-1)}$-спутник формации F, h_1– максимальный внутренний $\omega_{(n-1)}$-спутник формации H. Отметим, что, согласно лемме 1 [15], $f_1(p) = \tau\omega Z_{(n-1)}(G/G_{\mathrm{S}_{cp}})$ и по теореме 1 [12] $h_1(p) = \mathrm{N}_p h_1(p) = \mathrm{N}_p h_1'(p)$, где h_1' – произвольный внутренний ω-спутник формации H. Ввиду следствия 4.2 [13], $f_1(p) = f(Z_p)$ и $h_1(p) = h(Z_p)$.

Отсюда, снова используя следствие 4.2 [13], получаем, что формация $f(Z_p)$ является $h(Z_p)_{\tau\Omega_{(n-1)}\varphi_3}$-критической. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. – Math. Z., 1963. Vol. 80, № 4. - S. 300-305.
2. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. - 272 с.
Shemetkov L.A. Formatsii konechnykh grupp [Formations of finite groups]. – M.: Nauka, 1978. - 272s.
3. Скиба А.Н. Алгебра формаций. - Минск: Беларуская навука, 1997. - 240 с.
Skiba A.N. Algebra formatsiy [Algebra of formations]. - Minsk: Belaruskaya navuka, 1997. - 240 s.
4. Шеметков Л.А. Ступенчатые формации групп // Матем. сб., 1974. Т. 94, № 4. – С. 628-648.
Shemetkov L.A. Stupenchatyye formatsii grupp [Graduated formations of groups] // Matem. sb., 1974. T. 94, № 4. – S. 628-648.
5. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды, 1999. Т. 2, № 1. – С. 1-34.
Skiba A.N., Shemetkov L.A. Kratno ω-lokal'nyye formatsii i klassy Fittinga konechnykh grupp [Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups] // Matem. trudy, 1999. T. 2, № 1. – S. 1-34.
6. Ведерников В.А., Коптюх Д.Г. Частично композиционные формации групп // Препринт № 2. Брянск: БГПУ, 1999. – 28 с.
Vedernikov V.A., Koptyukh D.G. Chastichno kompozitsionnyye formatsii grupp [Partially composite formations of groups] // Preprint № 2. Bryansk: BGPU, 1999. – 28 s.
7. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика, 2001. Т. 13. Вып. 3. – С. 125-144.
Vedernikov V.A., Sorokina M.M. Ω-rassloyennyye formatsii i klassy Fittinga konechnykh grupp [Ω-foliated formations and Fitting classes of finite groups] // Diskretnaya matematika, 2001. T. 13. Vyp. 3. – S. 125-144.
8. Ведерников В.А., Сорокина М.М. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки, 2002. Т. 71. Вып. 1. - С. 43-60.
Vedernikov V.A., Sorokina M.M. ω-veyernyye formatsii i klassy Fittinga konechnykh grupp [ω-fibered formations and Fitting classes of finite groups] // Matematicheskiye zametki, 2002. T. 71. Vyp. 1. - S. 43-60
9. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Collog. Math., 1957. Vol. 1. - P. 115-187.
10. Плоткин Б.И. Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы // Избранные вопросы алгебры и логики: Сборник, посв. памяти А.И. Мальцева. - Новосибирск: Наука, 1973. -С. 205-244.
Plotkin B.I. Radikaly v gruppakh, operatsii na klassakh grupp i radikal'nyye klassy [Radicals in groups, operations on classes of groups and radical classes] // Izbrannyye voprosy algebry i logiki: Sbornik, posv. pamyati A.I. Mal'tseva. - Novosibirsk: Nauka, 1973. - S. 205-244.
11. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. - Минск: Беларуская навука, 2003. - 254 с.
Kamornikov S.F., Sel'kin M.V. Podgruppovyye funktory i klassy konechnykh grupp [Subgroup functor and classes of finite groups]. - Minsk: Belaruskaya navuka, 2003. - 254 s.
12. Vedernikov V.A. Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes // Proc. Steklov Inst. Math. , 2001. № 2. – P. 217-233.
13. Ведерников В.А. О новых типах ω-веерных формаций конечных групп // Укр. матем. конгресс. Алг. і теор. чисел. Праці, Киев, 2002. - С. 36-45.
Vedernikov V.A. O novykh tipakh ω-veyernykh formatsiy konechnykh grupp [On new types of ω-fibered formations of finite groups] // Ukr. matem. kongress. Alg. i teor. chisel. Pratsi, Kiyev, 2002. - S. 36-45.
14. Скиба А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры, Минск, 1987. Вып. 3. – С. 21-31.
Skiba A.N. Kharakterizatsiya konechnykh razreshimykh grupp zadannoy nil'potentnoy dliny [Characterization of finite soluble groups given nilpotent length] // Voprosy algebry, Minsk, 1987. Vyp. 3. – S. 21-31.
15. Корпачева М.А., Сорокина М.М. Критические ω-веерные τ-замкнутые формации конечных групп // Дискретная математика, 2011. Т. 23. Вып. 1. – С. 94-101.
Korpacheva M.A., Sorokina M.M. Kriticheskiye ω-veyernyye τ-zamknutyye formatsii konechnykh grupp [Critical ω-fibered τ-closed formations of finite groups] // Diskretnaya matematika, 2011. T. 23. Vyp. 1. – S. 94-101.
16. Шеметков Л.А. Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюз. Симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 37-50.
Shemetkov L.A. Ekrany stupenchatykh formatsiy [Screens of step formations] // Tr. VI Vsesoyuz. Simpoziuma po teorii grupp. – Kiyev: Naukova dumka, 1980. – S. 37-50.
17. Селькин В.М., Скиба А.Н. О $\mathfrak{H}_{\Theta\omega}$-критических формациях // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1999. Вып. 14. – С. 127-131.
Sel'kin V.M., Skiba A.N. O $\mathfrak{H}_{\Theta\omega}$-kriticheskikh formatsiyakh [About $\mathfrak{H}_{\Theta\omega}$-critical formations] // Voprosy algebry. – Gomel': Izd-vo Gomel'skogo un-ta, 1999. Vyp. 14. – S. 127-131.
18. Сорокина М.М., Корпачева М.А. Критические Ω-расслоенные τ-замкнутые формации конечных групп // Вестник БГУ, Брянск, 2012. № 4 (2). – С. 75-79.
Sorokina M.M., Korpacheva M.A. Kriticheskiye Ω-rassloyennyye τ-zamknutyye formatsii konechnykh grupp [Critical Ω-foliated τ-closed formations of finite groups] // Vestnik BGU, Bryansk, 2012. № 4 (2). – S. 75-79.
19. Сорокина М.М. Критические τ-замкнутые n-кратно ω-специальные формации конечных групп // Международный периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science», 2013. Vol. 8 – С. 71-75.
Sorokina M.M. Kriticheskiye t-zamknutyye n-kratno ω-spetsial'nyye formatsii konechnykh grupp [Critical τ-closed n-multiply ω-specific formations of finite groups] // Mezhdunarodnyy periodicheskiy nauchnyy zhurnal «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science», 2013. Vol. 8 – S. 71-75.
20. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. - М.: Наука, 1978. - 256 с.
Shemetkov L.A., Skiba A.N. Formatsii algebraicheskikh system [Formations of algebraic systems]. - M.: Nauka, 1978. - 256 s.

Sorokina M.M., Petrushin P.V., Makukhin R.A. On τ-closed n-multiply ω-central and n-multiply Ω-compositional formations of finite groups

Abstract. We consider the formations of finite groups, i.e. classes of finite groups closed under homomorphic images and subdirect products. Let τ - subgroup functor. A formation $\mathfrak{F}$ is called τ-closed if the formation $\mathfrak{F}$ with each of its group includes all of its τ-subgroups. In this paper a description of the structure of the critical τ-closed n-multiply ω-central and n-multiply Ω-compositional formations of finite groups.

Keywords: *a finite group, a formation of groups, subgroup functor, a τ-closed formation, a ω-central formation, a Ω-compositional formation*