Сорокина М.М. [1]

Критические τ-замкнутые n-кратно ω-специальные формации конечных групп

[1] *Сорокина Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент,*
Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского,
г. Брянск, Россия

Аннотация: Рассматриваются формации конечных групп, т.е. классы конечных групп, замкнутые относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс конечных групп, θ – совокупность формаций конечных групп, $\mathfrak{F}\in\theta$. Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_\theta$-критической, если $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{H}$, но всякая собственная θ-подформация из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержится. Общая проблема изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций впервые была поставлена Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1980 году. Настоящая статья посвящена изучению $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций в случае, когда θ – совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-специальных формаций конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация групп, $\mathfrak{H}_\theta$-критическая формация, ω-веерная формация, подгрупповой функтор.

Теория классов конечных групп представляет собой один из интенсивно развивающихся разделов современной алгебры. Центральное место в данной теории занимают формации – классы групп, замкнутые относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Фундаментальные результаты о формациях групп представлены в монографиях Л.А. Шеметкова [11] и А.Н. Скибы [7].

При исследовании формаций конечных групп на протяжении последних десятилетий большое внимание уделялось изучению локальных формаций, введенных в рассмотрение В. Гашюцем в 1963 году [15]. В основе понятия локальной формации лежит функциональный подход. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, f – отображение множества $\mathbb{P}$ во множество всех формаций конечных групп. Тогда $\mathfrak{F}=(G\colon\ G/F_p(G)\in f(p)$, для всех $p\in\pi(G))$ – локальная формация со спутником f, где $F_p(G)$ – $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$-радикал группы G. Естественным обобщением понятия локальности формации явилось понятие частичной локальности (ω-локальности), введенное Л.А. Шеметковым в 1984 году [14]. В 1987 году А.Н. Скиба ввел в рассмотрение понятие n-кратно локальной формации [8]. Принципиально новый функциональный подход к изучению формаций был предложен В.А. Ведерниковым в 1999 году [1]. Данный подход базируется на понятии направления формации и позволяет построить бесконечное множество новых типов так называемых ω-веерных формаций [2]. При этом ω-локальные формации представляют один из видов ω-веерных формаций с фиксированным направлением. Важным видом ω-веерных формаций являются ω-специальные формации, изучению которых посвящена настоящая работа.

В 1980 году Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп была поставлена общая проблема изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций [13]. Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, θ – совокупность формаций, $\mathfrak{F} \in \theta$. Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_\theta$-критической, если $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{H}$, но всякая собственная θ-подформация из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержится. В серии работ (см., например, [9]) А.Н. Скиба получил описание $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций в случае, когда θ – совокупность всех локальных формаций конечных групп, а $\mathfrak{H}$ – локальная формация классического типа. Исследованием критических n-кратно ω-локальных формаций занимались А.Н. Скиба и его ученики (см., например, [5, 6]). В работе [10] изучены критические n-кратно ω-веерные формации.

Исследования в теории классов конечных групп выявили тесную взаимосвязь между подгрупповыми функторами и классами групп [3]. Пусть τ – подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если со всякой своей группой G формация $\mathfrak{F}$ содержит и все ее τ-подгруппы. В монографии [7] представлены результаты о критических τ-замкнутых локальных формациях. В работе [4] получено описание критических τ-замкнутых ω-веерных формаций. Настоящая статья посвящена изучению критических τ-замкнутых n-кратно ω-специальных формаций конечных групп.

Рассматриваются только конечные группы. Основные определения и обозначения можно найти в [2, 3, 7]. Приведем лишь некоторые из них. Запись $G=[A]B$ означает, что группа G есть полупрямое произведение своих подгрупп A и B, где A – нормальная подгруппа группы G. Монолитической группой называется группа, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу (монолит). Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, $\mathfrak{G}_\omega$ – класс всех ω-групп, то есть таких групп G, что $\pi(G)\subseteq\omega$, где $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G; $\mathfrak{G}_{q'}$ – класс всех q'-групп; $\mathfrak{S}_{cp}$ – класс всех групп, у которых каждый главный p-фактор централен. Через $\mathfrak{G}_{Zp'}$ обозначает-ся класс всех $Z_{p'}$-групп, то есть таких групп G, что $K(G)\cap(Z_p)=\varnothing$, где $K(G)$ – класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G, (Z_p) – класс групп, порожденный простой p-группой Z_p.

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ – классы групп. Тогда $\mathfrak{HF}$ = (G : G имеет нормальную подгруппу $N\in\mathfrak{H}$ с $G/N\in\mathfrak{F}$). Через $G_\mathfrak{F}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы G, где $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга; $O_\omega(G)$ – $\mathfrak{G}_\omega$-радикал группы G.

Функции $f:\omega\cup\{\omega'\}\rightarrow\{\textit{формации групп}\}$ и $\delta:\mathbb{P}\rightarrow\{\textit{непустые формации Фиттинга}\}$ называются соответственно ωF-функцией и $\mathbb{P}FR$-функцией. Формация $\omega F(f,\delta)$=(G: $G/O_\omega(G)\in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)}\in f(p)$ для всех $p\in\omega\cap\pi(G)$) называется ω-веерной формацией с ω-спутником f и направлением [2]. Направление δ ω-веерной формации называется bp-направлением, если оно является b-направлением, т.е. $\delta(q)\mathfrak{N}_q=\delta(q)$ для любого $q\in\mathbb{P}$; и является p-направлением, т.е. $\mathfrak{G}_{q'}\delta(q)=\delta(q)$ для любого $q\in\mathbb{P}$. Через δ_0 обозначается направление ω-полной формации, то есть $\delta_0(p)=\mathfrak{G}_{p'}$ для всех $p\in\mathbb{P}$; δ_1 – направление ω-локальной формации, то есть $\delta_1(p)=\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p\in\mathbb{P}$; δ_2 – направление ω-специальной формации, то есть $\delta_2(p)=\mathfrak{G}_{Zp'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p\in\mathbb{P}$; δ_3 – направление ω-центральной формации, то есть $\delta_3(p)=\mathfrak{S}_{cp}$ для всех $p\in\mathbb{P}$ [2]. Пусть ψ_1 и ψ_2 – произвольные ωF-функции ($\mathbb{P}FR$-функции). Говорят, что $\psi_1\le\psi_2$, если $\psi_1(p)\subseteq\psi_2(p)$ для всех $p\in\omega\cup\{\omega'\}$ (для всех $p\in\mathbb{P}$) [1].

Пусть τ – отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп. Говорят, что τ – подгрупповой функтор, если $\tau(G)^\varphi=\tau(G^\varphi)$ для любого изоморфизма φ каждой группы G.

Подгрупповой функтор τ называется регулярным, если выполняются следующие два условия:

1) из того, что N – нормальная подгруппа группы G и $M \in \tau(G)$, следует $MN/N \in \tau(G/N)$;

2) из $M/N \in \tau(G/N)$ следует $M \in \tau(G)$ (см., например, [3]).

Пусть δ – некоторая $\mathrm{P}FR$-функция. Подгрупповой функтор τ называется δ-радикальным, если для всякой группы G и для всякой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $G_{\delta(p)} \cap N = N_{\delta(p)}$, для всех $p \in \mathrm{P}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ [7]. ω-спутник f ω-веерной формации называется τ-замкнутым, если для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ формация $f(p)$ является τ-замкнутой. Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между τ-замкнутостью ω-веерной формации и τ-замкнутостью ее ω-спутника.

Лемма 1 [4]. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с bp-направлением δ, $\delta \le \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним τ-замкнутым ω-спутником.

Пусть δ – произвольная $\mathrm{P}FR$-функция, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Всякую формацию считают 0-кратно ω-веерной с направлением δ. При $n \neq 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-веерной с направлением δ, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один $\omega_{(n-1)}$-спутник, то есть такой ω-спутник, все значения которого являются (n-1)-кратно ω-веерными формациями с направлением δ.

Через $\tau\omega F_n(\mathfrak{X}, \delta)$ обозначается τ-замкнутая n-кратно ω-веерная формация с направлением δ, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$, $\omega F_n^{\tau}(\mathfrak{X}, \delta)$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ, обладающая хотя бы одним τ-замкнутым ω-спутником, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$. Формацию $\tau\omega F_n(\mathfrak{X}, \delta_2)$ обозначают через $\tau\omega S_n(\mathfrak{X})$.

Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \le \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{X}$ – совокупность групп. Тогда, ввиду леммы 1, справедливо равенство $\tau\omega F_n(\mathfrak{X}, \delta) = \omega F_n^{\tau}(\mathfrak{X}, \delta)$.

Доказательство следующей леммы проводится аналогично доказательству теоремы 5 [1].

Лемма 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, τ – регулярный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F} = \omega F_n^{\tau}(\mathfrak{X}, \delta)$, где $\delta_0 \le \delta$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным τ замкнутым $\omega_{(n-1)}$-спутником f таким, что

$$f(\omega') = \tau\omega F_{(n-1)}((G/O_{\omega}(G) : G \in \mathfrak{X}), \delta),$$

$$f(p) = \tau\omega F_{(n-1)}((G/G_{\delta(p)} : G \in \mathfrak{X}), \delta),$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$,

$$f(p) = \varnothing \text{, \textit{если} } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X}).$$

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, $n \in \mathbb{N}$. τ-замкнутая n-кратно ω-веерная формация $\mathfrak{F}$ с направлением δ называется $\mathfrak{H}_{\tau\omega_n\delta}$-критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subset \mathfrak{H}$, но все собственные τ-замкнутые n-кратно ω-веерные подформации с направлением δ из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся. В следующей теореме изучается строение критических τ-замкнутых n-кратно ω-специальных формаций конечных групп.

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, τ – регулярный δ_2-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – непустая τ-замкнутая ω-специальная формация с максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая n-кратно ω-специальная формация с минимальным $\omega_{(n-1)}$-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega_n\delta_2}$-критической, то $\mathfrak{F} = \tau\omega S_n(G)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $\pi(P) \subseteq \omega$, то формация $f(p)$ является $h(p)_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_2}$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subset \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_2}$-критической формацией.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\tau\omega_n\delta_2}$-критическая формация и G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G является монолитической группой с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{F} = \tau\omega S_n(G)$. По лемме 1 $f(\omega') = \tau\omega S_{(n-1)}(G/O_{\omega}(G))$, $f(p) = \tau\omega S_{(n-1)}(G/G_{\mathfrak{G}_{Zp'}\mathfrak{N}_p})$, для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Согласно теореме 6 [2] $h(\omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $p \in \omega$ справедливо $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p h_1(p)$, где h_1 – произвольный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\pi(P)\subseteq\omega$. Предположим, что $f(q)\subseteq h(q)$ для любого $q\in\pi(P)$. Тогда из $G\in\mathfrak{F}$ следует $G/G_{\mathfrak{G}_{Zq'}\mathfrak{N}_q}\in f(q)\subseteq h(q)$ для всех $q\in\pi(P)$. Кроме того, $G/P\in\mathfrak{H}$ и, ввиду $P\subseteq O_\omega(G)$, имеем $G/O_\omega(G)\in\mathfrak{H}=h(\omega')$. Согласно лемме 2 [2] $G\in\mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому существует такое $p\in\pi(P)$, что $f(p)\not\subseteq h(p)$. Покажем, что формация $f(p)$ является $h(p)_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_2}$-критической.

Рассмотрим случай, когда $h(p)=\varnothing$. Пусть h_2 – минимальный τ-замкнутый ω-спутник формации $\mathfrak{H}$. Допустим, что $p\in\pi(\mathfrak{H})$. Тогда по лемме 2 $h_2(p)\neq\varnothing$ и поэтому $h(p)=\mathfrak{N}_p h_2(p)\neq\varnothing$. Противоречие. Следовательно, $p\notin\pi(\mathfrak{H})$ и $Z_p\notin\mathfrak{H}$. Так как $p\in\omega\cap\pi(G)$, то $f(p)\neq\varnothing$. Ввиду леммы 7 [2], $Z_p\in\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{N}_p f(p)\subseteq\mathfrak{F}$. Таким образом, $Z_p\in\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}$, и значит, $G=Z_p$. Кроме того, $Z_p=(Z_p)_{\mathfrak{G}_{Zp'}\mathfrak{N}_p}$ и $f(p)=(1)$. Тем самым установлено, что формация $f(p)$ является $h(p)_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_2}$-критической.

Пусть теперь $h(p)\neq\varnothing$ и $\mathfrak{M}$ – собственная τ-замкнутая (n-1)-кратно ω-специальная подформация из $f(p)$. Предположим, что $\mathfrak{M}\not\subseteq h(p)$ и M – группа минимального порядка из $\mathfrak{M}\setminus h(p)$. Тогда M является монолитической группой с монолитом $R=M^{h(p)}$. Допустим, что $R\subseteq O_p(M)$. Тогда $M\in\mathfrak{N}_p h(p)=h(p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(M)=1$ и по лемме 18.8 [12] существует точный неприводимый $F_p[M]$-модуль K. Пусть $T=[K]M$. Тогда группа T монолитична с монолитом $K=C_T(K)$. Это означает, что $K=T_{\mathfrak{G}_{Zp'}\mathfrak{N}_p}$. Поэтому, ввиду леммы 7 [2], $T\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}_p f(p)\subseteq\mathfrak{F}$, и значит, $\tau\omega S_n(T)\subseteq\mathfrak{F}$. Если $\tau\omega S_n(T)=\mathfrak{F}$, то $f(p)=\tau\omega S_{(n-1)}(T/T_{\mathfrak{G}_{Zp'}\mathfrak{N}_p})=\tau\omega S_{(n-1)}(M)\subseteq\mathfrak{M}$, что невозможно. Поэтому $\tau\omega S_n(T)\subset\mathfrak{F}$, и значит, $\tau\omega S_n(T)\subseteq\mathfrak{H}$. Тогда $M\cong T/T_{\mathfrak{G}_{Zp'}\mathfrak{N}_p}\in h(p)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}\subseteq h(p)$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_2}$-критической.

Пусть $\pi(P)\not\subseteq\omega$. Покажем, что в этом случае $f(\omega')$ – $h(\omega')_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_2}$-критическая формация.

Так как $P\not\subseteq O_\omega(G)$, то $f(\omega')=\tau\omega S_{(n-1)}(G)\not\subseteq\mathfrak{H}=h(\omega')$. Пусть $\mathfrak{M}$ – собственная τ-замкнутая (n-1)-кратно ω-специальная подформация из $f(\omega')$ и $\mathfrak{M}_1=\tau\omega S_n(\mathfrak{M})$. Из $\mathfrak{M}\subset f(\omega')\subseteq\mathfrak{F}$ получаем $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{F}$, то $f(\omega')=\tau\omega S_{(n-1)}(M/O_\omega(M):M\in\mathfrak{M})\subseteq\mathfrak{M}\subset f(\omega')$ Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{F}$, и значит, $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}=h(\omega')$ и формация $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\tau\omega_{(n-1)}\delta_2}$-критической. Теорема доказана.

Литература

1. Ведерников В.А., Сорокина М.М. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп. Препринт. – Брянск: БГПУ. – 1999. – N 6. – С. 1-22.
2. Ведерников В.А. О новых типах ω-веерных формаций конечных групп // Укр. матем. конгресс. Алг. і теор. чисел. Праці. – Киев. – 2002. – С. 36-45.
3. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Минск: Беларуская навука. – 2003. – 254 с.
4. Корпачева М.А., Сорокина М.М. Критические ω-веерные τ-замкнутые формации конечных групп // Дискретная математика. – 2011. – Т. 23. – Вып. 1.– С. 94-101.
5. Сафонова И.Н. О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – N 2. – С. 23-27.
6. Селькин В.М., Скиба А.Н. О $\mathfrak{H}_{\Theta\omega}$-критических формациях // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та. – 1999. – Вып. 14. – С. 127-131.
7. Скиба А.Н. Алгебра формаций. – Минск: Беларуская навука. – 1997. – 240 с.
8. Скиба А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. – Минск. – 1987. – Вып. 3. – С. 21-31.
9. Скиба А.Н. О критических формациях // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: ИМ АН Украины. – 1993. – С. 250-268.

10. Сорокина М.М., Корпачева М.А. Критические n-кратно ω-веерные формации конечных групп // Вестник БГУ. – Брянск. – 2010. – С. 47-52.
11. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука. – 1978. – 272 с.
12. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. – М.: Наука. – 1989. – 256 с.
13. Шеметков Л.А. Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюз. Симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка. – 1980. – С. 37-50.
14. Шеметков Л.А. О произведении формаций // Доклады АН БССР. – 1984. – Т. 28. – N 2. – С. 101-103.
15. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. – 1963. – T. 80. – N 4. – P. 300-305.

Sorokina M.M.

Critical τ-closed n-multiply ω-special formations of finite groups

Abstract: Theory of classes of finite groups is one of the rapidly developing sections of the modern algebra. Formations hold the central place in this theory, i.e. classes of groups closed under homomorphic images and subdirect products. Fundamental results of formations of finite groups are set out in the book «Formations of Finite Groups» of L.A. Shemetkov and in the book «The algebra of formations» of A.N. Skiba. In the study of formations of finite groups over the past decades much attention was paid to the local formations introduced in consideration by W. Gaschutz in 1963. The notion of local formation is a functional approach. Let $\mathbb{P}$ be the set of all prime numbers, f – a mapping of the set $\mathbb{P}$ into the set of all formations of finite groups. Then $\mathfrak{F}$ =(G : $G/F_p(G) \in f(p)$, for all $p \in \pi(G)$) is the local formation with the satellite f, where $F_p(G)$ is $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$-radical of *G*. Natural generalization of the concept of locality of the formation was partial locality (ω-locality), introduced by L.A. Shemetkov in 1984. In 1987 A.N. Skiba introduced the concept of a multiple-local formation. A principally new functional approach to the study of formations was proposed by V.A. Vedernikov in 1999. This approach is based on the notion of the direction of formation and allows us to construct an infinite set of new types of so-called ω-fibered formations. At the same time, local formations are one of the types of ω-fibered formations with a fixed direction. An important type of ω-fibered formations are ω-special formations, which is devoted to the study in this paper. In 1980 L.A. Shemetkov at the VI All-Union Symposium on Group Theory posed the general problem of studying the $\mathfrak{H}_\theta$-critical formations. Let $\mathfrak{H}$ be a class of groups, θ – a set of formations, $\mathfrak{F} \in \theta$. Formation $\mathfrak{F}$ is called the $\mathfrak{H}_\theta$-critical, if $\mathfrak{F}$ not contained in $\mathfrak{H}$, but every proper θ-subformation of $\mathfrak{F}$ contains in $\mathfrak{H}$. In a series of papers A.N. Skiba obtained a description of the $\mathfrak{H}_\theta$-critical formations in the case θ – a set of all local formations, and $\mathfrak{H}$ – local formation of the classical type. Study of critical n-multiple ω-local formations were engaged A.N. Skiba and his followers. Sorokina M.M. and Korpachova M.A. studied critical n-multiple ω-fibered formations. Researches in the theory of classes of finite groups shown a strong relationship between the subgroup functors and classes of groups. Let τ be a subgroup functor. The formation $\mathfrak{F}$ is called τ-closed if formation $\mathfrak{F}$ with every its group G contains all τ-subgroups of G. In the book «The algebra of formations» of A.N. Skiba presented the results on the critical τ-closed local formations. This article is devoted to the study of critical τ-closed n-multiple ω-special formations of finite groups.

Key words: finite group, class of groups, formation of groups, $\mathfrak{H}_\theta$-critical formation, ω-fibered formation, subgroup functor.