Швець В.О., Снігур Т.О.

Поняття просторового геометричного тіла в шкільному курсі стереометрії

Швець Василь Олександрович, кандидат педагогічних наук, професор, завідувач кафедри
Снігур Тетяна Олександрівна, аспірант
кафедра математики і теорії та методики навчання математики
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, м. Київ, Україна

Анотація. У статті розглянуто один із підходів до трактування поняття «просторове геометричне тіло»; сформульовано критерій просторового геометричного тіла та алгоритм дослідження геометричної фігури.

Ключові слова. *Геометрична фігура, просторове геометричне тіло, поверхня тіла; окіл точки, класифікація точок простору; відкрита і замкнена фігури; область, замкнена область*

Вступ. Геометрія навчає учнів правильному сприйманню навколишнього світу. У порівнянні з планіметрією стереометрія має для цього більше можливостей. Йдеться про розвиток логічного мислення, формування просторових уявлень, формування навичок застосування геометрії до розв'язання практичних завдань.

Відповідно до Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти в шкільному курсі стереометрії виокремлено дві основні змістові лінії: 1) геометричні фігури та їх властивості; 2) геометричні величини, їх вимірювання та обчислення [1]. Основними об'єктами вивченням в просторі є точка, пряма, площина, двогранний кут, призма, циліндр, конус, піраміда, многогранник, куля, сфера тощо.

У 11 класі під час вивчення теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» учні знайомляться з поняттям «об'єм тіла» та основними властивостями об'ємів [2]. Зокрема, уточнюється, що така властивість геометричних фігур, як об'єм, притаманна не всім фігурам, а лише просторовим геометричним тілам. Хоча в підручниках з геометрії поняття просторового геометричного тіла чітко не розкривається. Замість означення цього поняття в шкільному курсі математики найчастіше наводяться різні пояснення описового характеру. Наприклад, в дворівневому підручнику з геометрії для 10 класу, автор Нелін Є.П., говориться: «Деякі фігури в просторі ще називають тілами. Наочно геометричне тіло можна уявити собі як частину простору, що займає фізичне тіло, обмежене деякою поверхнею» [3].

Спроби дати означення поняття просторового геометричного тіла можна знайти в підручниках з геометрії:

1) для 11 класу, автори Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г., Владіміров В.М.: «Обмежена просторова область разом з усіма її граничними точками називається геометричним тілом; множина всіх її граничних точок – поверхнею цього геометричного тіла» [4];

2) для 9-10 класів, автори Александров О.Д., Вернер А.Л., Рижик В.І.: «Тілом називається фігура в просторі. яка має дві властивості: 1) вона має внутрішні точки, і будь-які дві з них можна з'єднати ламаною (або відрізком), який повністю належить фігурі, тобто складається із внутрішніх точок; 2) фігура містить свою межу, і її межа співпадає з межею її внутрішності. Межа тіла називається його поверхнею» [5];

3) для 10-11 класів, автор Атанасян Л.С. та ін.: «Геометричним тілом (або просто тілом) називають обмежену зв'язну фігуру в просторі, яка містить всі свої граничні точки, причому в околі будь-якої граничної точки знаходяться внутрішні точки фігури» [6].

У даній статті ми пропонуємо визначення поняття просторового геометричного тіла, яке можна, на наш погляд, включити в шкільний курс стереометрії середньої школи на поглибленому рівні вивчення даного предмета.

Для цього задіяно такі необхідні математичні поняття, як: площина, простір; геометрична фігура; сфера, куля та окіл точки; відрізок; ламана; обмежена фігура; внутрішня точка і внутрішність; межова точка і межа геометричної фігури.

Поняття геометричної фігури, сфери, кулі та околу точки. У геометрії під геометричною фігурою, або просторовою фігурою, або просто фігурою, розуміють будь-яку множину (сукупність) Ф точок простору. Найпростішою геометричною фігурою є точка. З точок складаються всі інші геометричні фігури, наприклад, відрізок, пряма, площина, призма, циліндр тощо.

Зі шкільного курсу планіметрії учням відомо, що відстань між двома точками прямої чи площини – це довжина відрізка, який сполучає ці точки.

Якщо точки простору позначати великими латинськими літерами *A*, *B*, *C*, …, а відстань між двома даними точками *A* і *B* цього простору позначати $|AB|$, то відрізком *AB* можна назвати множину всіх точок *X* даного простору, для яких $|AX|+|XB|=|AB|$.

До найважливіших фігур простору, зокрема, належать: 1) сфера; 2) куля; 3) відкрита куля з центром у даній точці *O* і заданим радіусом $r > 0$. Так називають множини точок простору, для кожної з яких відстань від точки *O* відповідно: 1) дорівнює *r*; 2) не перевищує *r*; 3) є меншою за *r*.

При цьому можна позначати:

– *S(O; r)* – сфера з центром у точці *O* і радіусом *r*;

– *K(O; r)* – куля з центром у точці *O* і радіусом *r*, яку також називають замкненою кулею;

– *U(O; r)* – відкрита куля з центром у точці *O* і радіусом *r*, яку також називають *околом* (або *r* – околом) точки О (рис. 1).

На рисунку 2 зображено фігуру Ф, яка складається з усіх точок кулі $К(O;r)$, крім точки D, яка є точкою дотику кулі і площини π, всіх точок площини π (крім точки D) та точки C, яка не належить ні кулі $К(O;r)$, ні площині π.

Просторову фігуру Ф називають *обмеженою*, якщо вона є частиною деякої кулі.

Приклади:

1. Фігури, подані на рисунках 1, є обмеженими.
2. Фігура Ф (рис. 2) – не є обмеженою.

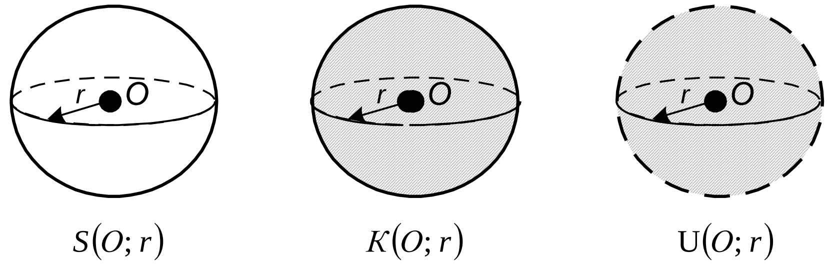

Рис. 1. Обмежені фігури

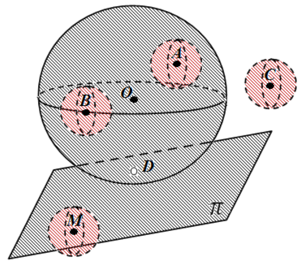

Рис. 2. Необмежена фігура

Класифікація точок простору стосовно даної фігури. Нехай задано простір і деяку фігуру Ф в ньому. Тоді довільну фіксовану точку простору називають:

1) *внутрішньою точкою фігури Ф, коли існує окіл цієї точки, усі точки якого належать фігурі Ф;*
2) *зовнішньою точкою фігури Ф, коли існує окіл цієї точки, у якому немає жодної точки фігури Ф;*
3) *межовою точкою фігури Ф, коли будь-який окіл цієї точки містить у собі як точки фігури Ф, так і точки, що не належать фігурі Ф;*
4) *граничною точкою фігури Ф, коли будь-який окіл цієї точки містить у собі безліч точок фігури Ф;*
5) *ізольованою точкою фігури Ф, коли існує окіл цієї точки, у якому лише ця точка належить фігурі Ф.*

Приклади: Якщо Ф – фігура, що зображена на рис. 2, то:

1) кожна точка відкритої кулі $U(O, r)$ і ніяка інша є внутрішньою точкою фігури Ф;
2) кожна точка, що не належить ні кулі $K(O, r)$, ні площині π та відмінна від точки C, є зовнішньою точкою фігури Ф;
3) кожна точка, що належить сфері S(O; r) або площині π, а також точка C є межовою точкою фігури Ф;
4) кожна точка, що належить до кулі K(O; r) або до площини π, зокрема і точка D, є граничною точкою фігури Ф;
5) єдиною ізольованою точкою фігури Ф є точка C.

З наведених вище означень слідує, що:

1) внутрішня точка та ізольована точка фігури Ф завжди належать цій фігурі;
2) зовнішня точка фігури Ф не належить їй;
3) межова точка та гранична точка фігури Ф можуть належати, а можуть і не належати фігурі Ф.

Легко переконатися, що для довільної точки простору і для заданої в ньому фігури Ф можливий один і лише один з трьох випадків:

1) ця точка є внутрішньою точкою фігури Ф;
2) ця точка є зовнішньою точкою фігури Ф;
3) ця точка є межовою точкою фігури Ф.

Окрім цього для точки, яка не є зовнішньою стосовно даної фігури Ф, можливий один і лише один з двох випадків:

4) дана точка є граничною точкою фігури Ф;
5) дана точка є ізольованою точкою фігури Ф.

Стосовно довільної точки даної фігури Ф можливий один і лише один з двох випадків:

6) дана точка є внутрішньою точкою фігури Ф;
7) дана точка є межовою точкою фігури Ф.

Множину G(Ф) усіх внутрішніх точок фігури Ф називають *внутрішністю* фігури Ф, а множину S(Ф) усіх межових точок фігури Ф називають межею фігури Ф.

Об'єднання фігури Ф з її межею називають *замиканням* даної фігури і позначають $\overline{\Phi}$.

Приклади:

1. Якщо $\Phi = K(O; r)$ або $\Phi = U(O; r)$, то внутрішність кожної з цих фігур $G(\Phi) = U(O; r)$, межа $S(\Phi) = S(O; r)$, а замикання кожної з цих фігур $\overline{\Phi} = K(O; r)$.
2. Якщо $\Phi = S(O; r)$, то $S(\Phi) = \Phi = \overline{\Phi}$, а $G(\Phi) = \varnothing$.

Відкриті і замкнені фігури, області і замкнені області. Стосовно межі S(Ф) даної фігури Ф можливий один і лише один з трьох випадків:

1) $S(\Phi) \subset \Phi$, тобто кожна точка межі S(Ф) є також точкою фігури Ф і тоді фігуру Ф називають *замкненою*;
2) $S(\Phi) \cap \Phi = \varnothing$, тобто кожна точка межі S(Ф) не є точкою фігури Ф, і тоді фігуру Ф називають *відкритою*;
3) $S(\Phi) \cap \Phi \neq \varnothing$ і $S(\Phi) \not\subset \Phi$, тобто деякі точки межі S(Ф) є точками фігури Ф, а деякі ні, і тоді фігура Ф не є замкненою, а також не є відкритою.

Приклади:

1. Замкненими фігурами є: кожен простір та порожня фігура; кожна фігура, яка складається з скінченної множини точок; об'єднання скінченної кількості замкнених фігур, зокрема об'єднання скінченної кількості прямих або площин; кожна куля і сфера та кожен многогранник; замикання кожної фігури.
2. Відкритими фігурами є: кожен простір і порожня фігура; відкрита куля; об'єднання скінченної та зчисленної кількості відкритих фігур (зокрема відкритих куль); внутрішність будь-якої фігури, зокрема внутрішність будь-якого многогранника.
3. Ані замкненими, ані відкритими фігурами є: звичайна куля, з якої вилучено одну межову точку; звичайна відкрита куля, до якої долучено одну межову точку; многогранник, з якого вилучено одну вершину; сукупність точок координатного простору з раціональними координатами.

Відкриту фігуру Ф називають *областю*, коли будь-які дві точки цієї фігури можна сполучити ламаною, що цілком міститься у цій фігурі. При цьому, відкриту фігуру Ф називають також *лінійно зв'язною.*

Приклади:

1. Будь-яка відкрита куля є областю, а об'єднання двох відкритих куль без спільних точок є відкритою фігурою, проте не є областю, оскільки не є лінійно зв'язною.
2. Внутрішність будь-якого многогранника є областю.
3. Куля не є областю, оскільки не є відкритою фігурою.

Просторове геометричне тіло та його поверхня. Геометричну фігуру Ф простору називають *просторовим геометричним тілом*, якщо вона є замиканням деякої області G, тобто $\Phi = \overline{G} = G \cup S(G)$. При цьому обов'язково внутрішність Ф співпадає з G, межа S(Ф) = S(G) і цю межу називають *поверхнею тіла* Ф.

Приклади: 1. Куля є тілом, а сфера та відкрита куля не є тілом. 2. Кожен многогранник є тілом, а об'єднання двох многогранників може бути тілом, а може і не бути.

Геометричні тіла можуть бути *обмеженими* і *необмеженими*. Прикладами обмежених геометричних тіл у тривимірному просторі є призма, піраміда, куля, конус, циліндр тощо (рис. 3), а необмеженими – тілесний багатогранний кут, півпростір, частина простору, обмежена двогранним кутом (включаючи цей кут) тощо (рис. 4).

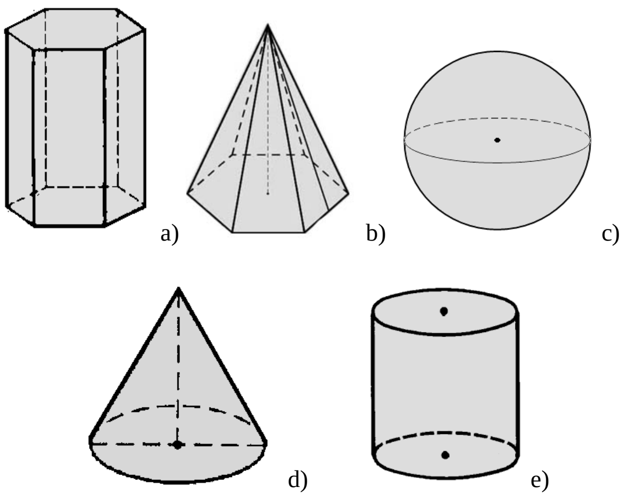

Рис. 3. Обмежені тривимірні геометричні тіла

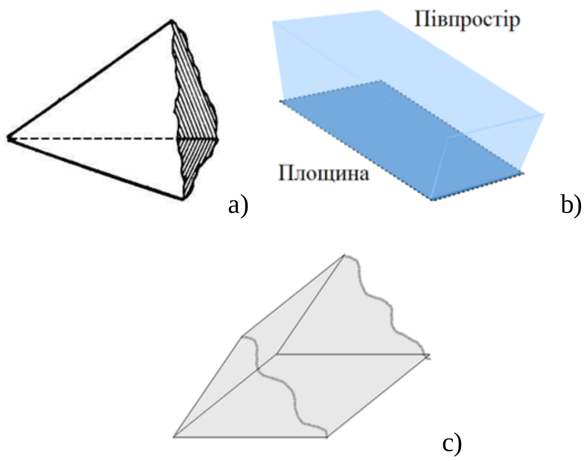

Рис. 4. Необмежені тривимірні геометричні тіла

Просторова фігура (зокрема тіло) називається *опуклою*, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати відрізком, який цілком міститься у цій фігурі.

Опуклими геометричними тілами у просторі будуть призма, піраміда, циліндр, конус, куля, зображені на рис. 3. Приклади неопуклих тіл (зірчастих) зображено на рис. 5 (a, b, c). Призма і піраміда, основами яких є неопуклі многокутники, також є не опуклими тілами (рис. 5, d, e).

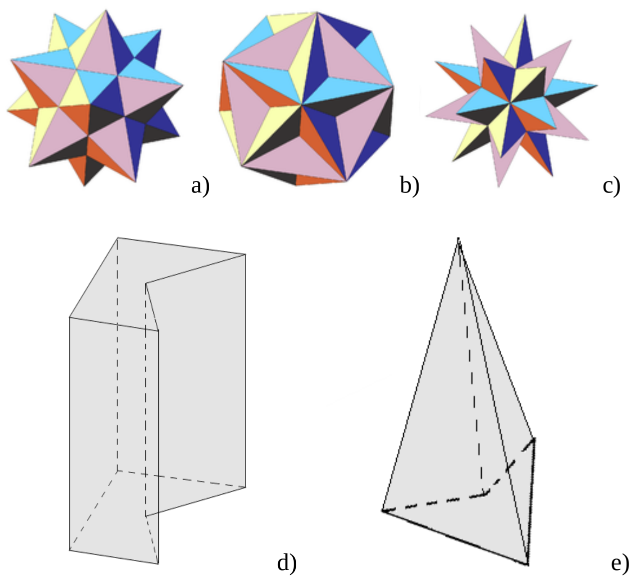

Рис. 5. Неопуклі геометричні тіла

Критерій просторового геометричного тіла та пов'язаний з ним алгоритм дослідження геометричної фігури.

З означення просторового геометричного тіла випливає, що геометрична фігура Ф є тілом тоді й тільки тоді, коли виконуються умови:

– межа фігури Ф співпадає з межею її внутрішності та міститься у Ф;
– будь-які дві внутрішні точки фігури Ф можна сполучити ламаною, усі точки якої є внутрішніми точками Ф.

Це твердження також можна вважати означенням просторового геометричного тіла і воно є еквівалентним означенню, наведеному вище.

На основі даного твердження можна скласти алгоритм перевірки, чи є дана геометрична фігура Ф просторовим тілом, чи ні:

1. Знайти межу S(Ф) та внутрішність G(Ф) даної геометричної фігури Ф.
2. Якщо межа S(Ф) не міститься у фігурі Ф, перейти на пункт 7.
3. Якщо G(Ф)=Ø, тобто фігура Ф не має внутрішніх точок, перейти на пункт 7.
4. Якщо внутрішність G(Ф) фігури Ф не є лінійно зв'язною, перейти на пункт 7.
5. Якщо межа внутрішності G(Ф) не співпадає з межею фігури Ф, перейти на пункт 7.
6. Зафіксувати, що фігура Ф є просторовим геометричним тілом з поверхнею S(Ф) і перейти на п. 8.
7. Зафіксувати, що фігура Ф не є просторовим геометричним тілом.
8. Якщо існує куля, що містить фігуру Ф, то зафіксувати, що фігура Ф обмежена і перейти на пункт 10.
9. Зафіксувати, що фігура Ф необмежена.
10. Якщо відрізок AB міститься у фігурі Ф для будь-яких точок A і B цієї фігури, то зафіксувати, що фігура Ф опукла і перейти на пункт 12.
11. Зафіксувати, що фігура Ф не є опуклою.
12. Завершити роботу.

Блок схему наведеного алгоритму зображено на рис. 6.

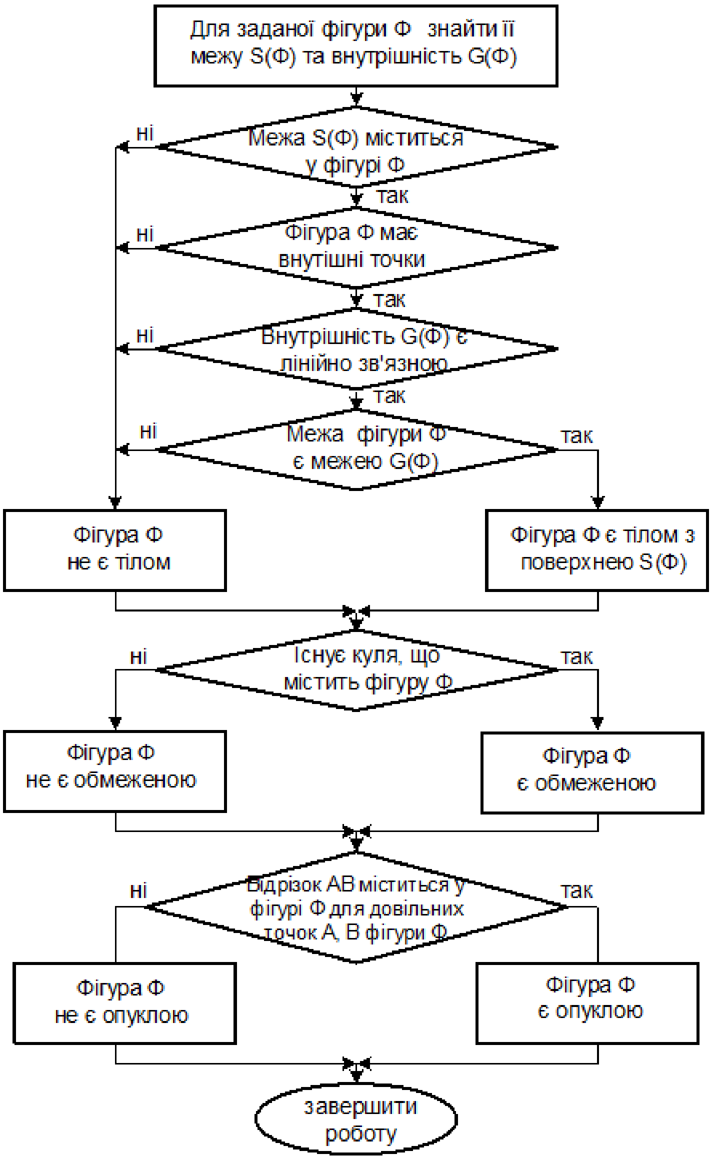

Рис. 6. Алгоритм дослідження геометричної фігури

Висновки. Запропонований спосіб введення чіткого означення поняття просторового геометричного тіла та пов'язаний з ним алгоритм дослідження геометричної фігури, на нашу думку, цілком доступний і може бути корисним більшості учнів школи, оскільки розкриває сутність простих і водночас важливих і в теорії, і в житті таких математичних понять, як:

- внутрішня точка та внутрішність фігури;
- межова точка та межа фігури;
- лінійна зв'язність фігури.

Його можна реалізувати в курсі стереометрії старшої школи перед вивченням теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл». Зміст такого матеріалу є певним узагальненням змістової лінії «Геометричні фігури і їх властивості» та основою для вивчення нової змістової лінії «Геометричні величини, їх вимірювання та обчислення».

Для математично обдарованих учнів цей спосіб можна поглибити і розширити на заняттях гуртка, факультативу чи окремо вибраного елективного курсу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. Затверджений постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392.
2. Програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень // URL: http://osvita-novog.at.ua/metod/10-11_matem_prof.pdf.
3. Нелін Є.П. Геометрія: дворівн. підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. і профільн. рівні / Є.П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 240 с.: іл.
4. Геометрія: 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. – К.: Генеза, 2011. – 336 с.: іл.
5. Александров А.Д. и др. Геометрия для 9-10 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – 2-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1988. – 480 с.: ил.
6. Геометрия: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1992. – 207 с.: ил.
7. Жалдак М.І., Михалін Г.О., Деканов С.Я. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних: Навчальний посібник. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. – 430 с.
8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 томах. Т. 2. – М.: Дрофа, 2004. – 720 с.

REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED

1. The state standard for basic and secondary education. Approved by the Cabinet of Ministers of Ukraine dated 23 November 2011 p. № 1392.
2. Program of Mathematics for 10-11 grades of secondary schools. The relevant level // URL: http://osvita-novog.at.ua/metod/10-11_matem_prof.pdf.
3. Nelin E.P. Geometry: a two-level textbook for 10 classes secondary schools, academic and profile level / E.P. Nelin. – KH.: Himnaziya, 2010. – 240 p.
4. Geometry: 11 class: a textbook for secondary schools, academic level, the profile level / H.P. Bevz, V.H. Bevz, N.H. Vladimirova, V.M. Vladimirov. – K.: Heneza, 2011. – 336 p.
5. Aleksandrov A.D. and others. The geometry of of 9-10 classes: Textbook for students of schools and classes with in-depth study of mathematics / A.D. Aleksandrov, A.L. Verner, V.Y. Ryzhyk. – 2-e yzd., dorab. – M.: Prosveshchenye, 1988. – 480 p.
6. Geometry: A Textbook for 10-11 classes of secondary schools / L.S. Atanasyan, V.F. Butuzov, S.B. Kadomtsev and others. – M.: Prosveshchenye, 1992. – 207 p.
7. Zhaldak M.I., Mykhalin H.O., Dekanov S.YA. Mathematical analysis. Functions of several variables: Textbook. – K.: NPU imeni M.P. Drahomanova, 2007. – 430 p.
8. Kudryavtsev L.D. Course of mathematical analysis. In 3 parts. Part 2. – M.: Drofa, 2004. – 720 p.

Shvets V.A., Snigur T.A. The concept of spatial geometric body in the school course of stereometry

Abstract. The article describes an approach to the interpretation of the concept of "spatial geometric body"; criterion is formulated spatial geometric body and algorithm research geometric shape.

Keywords: *Geometric shapes, spatial geometric body, the body surface; neighbourhood, classification of points in space; open and closed shapes; area, closed domain*

Швец В.А., Снигур Т.А. Понятие пространственного геометрического тела в школьном курсе стереометрии

Аннотация. В статье рассмотрен один из подходов к трактовке понятия «пространственное геометрическое тело»; сформулирован критерий пространственного геометрического тела и алгоритм исследования геометрической фигуры.

Ключевые слова. *Геометрическая фигура, пространственное геометрическое тело, поверхность тела; окрестность точки, классификация точек пространства; открытая и замкнутая фигуры; область, замкнутая область*