

Швец Л.В.¹

Побудова зображень просторових фігур в шкільному курсі стереометрії

¹ Швец Людмила Василівна, аспірант, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, м. Київ, Україна

Анотація: Під час вивчення курсу стереометрії перед вчителем постає завдання навчити учнів зображати стереометричні фігури та їх комбінації, тобто виробити в них уміння виконувати такі побудови. Навчаючи учнів стереометрії, вчителі широко використовують наочні зображення фігур, які відіграють важливу роль в педагогічному процесі. Ці зображення не тільки полегшують розуміння учнями роздумів і висновків учителя, а й, що важливо, вони розвивають в учнів просторове уявлення, розглянутих відношень і надають їм конкретних геометричних форм. Завдяки цьому матеріал запам'ятовується швидше і з більшою користю. З іншого боку правильний рисунок дає змогу знайти розв'язання задачі, навпаки, неправильний рисунок може наштовхнути учнів на неправильні міркування. Зрозуміло, що в умовах педагогічного процесу зображення повинні задовольняти ряд вимог, що викликані специфікою викладання. Звичайно, для побудови зображень, можна використати детально розроблені методи нарисної геометрії. Однак ці методи стосуються проблем переважно технічного характеру, не передбачені діяльністю вчителя і не пристосовані до умов педагогічного процесу. Названі вище обставини потребують суттєвого перегляду принципів побудови зображень в курсі стереометрії з врахуванням вимог до рисунка та умов вироблення в учнів умінь виконувати ці побудови шляхом формування часткових умінь. У статті висвітлено принципи побудови зображень просторових фігур в шкільному курсі стереометрії. Дано порівняльну характеристику принципів побудови зображень нарисної геометрії та зображень, що використовуються під час навчання в шкільному курсі геометрії. Розглянуті властивості паралельного проєкціювання, поняття повноти та метричної визначеності просторових зображень, задля підвищення рівня графічної культури стосовно побудов стереометричних фігур та їх комбінацій. Також подано структуру формування та розвитку вмінь старшокласників зображати просторові фігури та їх комбінації шляхом поділу на часткові.

Ключові слова: стереометрія, паралельне проєкціювання, повнота, метрична визначеність, часткові вміння, побудова стереометричних фігур.

Постановка проблеми. Вивчивши курс стереометрії, учні повинні вміти зображати стереометричні фігури та їх комбінації. Використання на уроках стереометрії наочних зображень просторових фігур дають змогу вчителю розвивати в учнів просторове уявлення та вміння виконувати побудови таких зображень. Яким вимогам мають задовольняти такі зображення і, яка їх відмінність від існуючих методів нарисної геометрії? Який з методів побудови просторових фігур є найоптимальнішим в умовах педагогічного процесу, коли беруться до уваги і фізичний і інтелектуальний розвиток старшокласників, а також обмеженість у часі (тривалість уроку) та кількість відведеного часу за програмою. Також важким є питання, виокремити часткові вміння, які слід виробити в учнів під час побудови просторових зображень.

Окреслені питання обумовлюють детального перегляду принципів побудови зображень в шкільному курсі стереометрії з врахуванням вимог до рисунка; умов формування та розвитку в учнів умінь виконувати побудови стереометричних зображень, шляхом поділу їх на часткові.

Аналіз актуальних досліджень. Питання щодо формування й розвитку вмінь старшокласників зображати стереометричні фігури і їх комбінації знайшло своє відображення в педагогічній науці. Такі відомі педагоги й психологи, як Л.С. Виготський, П.Я. Гальперін, Г.С. Костюк, В.А. Крутецький, В.О. Онищук, Н.Ф. Талізіна,

І.С. Якиманська, Л.М. Фрідман, Я.Й. Груденов, П.О. Шеварьов висвітлили психолого-дидактичні основи формування в учнів наукових понять.

Теоретичні та методичні аспекти формування в учнів умінь будувати зображення стереометричних фігур та їх комбінацій відображені в наукових та методичних працях М.Ф. Четверухіна, О.Р. Зенгіна, Л.М. Лоповка, В.М. Савченка, В.М. Литвиненка, Я.Є. Гольдберга та інших. Слід відзначити, що наукові засади теорії зображення просторових фігур з використанням проєкційних методів зображень в курсі стереометрії розробив і обґрунтував професор М.Ф. Четверухін. Саме він запропонував використовувати метод основної площини для побудови зображень, задля врахування вимог до рисунка в умовах педагогічного процесу. Його послідовники деталізували і популяризували ідеї вчителя, розробляючи власні методики побудови зображень фігур під час розв'язування різних типів стереометричних задач. Пропагування ідей М.Ф. Четверухіна знайшли своє відображення в дисертаційних дослідженнях Д.Ф. Ізаака (1960), П.Г. Козакова (1966), М.Д. Касьяненка (1966), Г.І. Лернера (1975), Т.П. Гори (1984), В.Г. Коровіної (1987), Р.Л. Аракеяна (1988) та інших дослідників.

Мета статті. Проаналізувати принципи побудови зображень просторових фігур в шкільному курсі стереометрії. Порівняти принципи побудови зображень нарисної геометрії та зображень, що використовуються під час навчання в шкіль-

ному курсі геометрії. Розглянути властивості паралельного проєкціювання, поняття повноти та метричної визначеності просторових зображень. Побудувати структуру формування та розвитку вмінь старшокласників зображати просторові фігури та їх комбінації шляхом поділу на часткові.

Виклад основного матеріалу. Під час вивчення стереометрії роль рисунка, є, безумовно, вирішальною. Вчитель, щоб викликати в учнів наочне просторове уявлення геометричних образів, поєднує його разом з викладом теоретичних міркувань та пояснень. Таке вивчення предмета є конкретнішим і відповідає практичним завданням засвоєння курсу стереометрії. Яким же методом слід користуватися, виконуючи зазначені рисунки? Безумовно, можна скористатися відомими методами нарисної геометрії, яка вивчає типи зображень: комплексний рисунок в ортогональних проєкціях (епюри), аксонометрію, лінійну перспективу. Варто підкреслити, що побудова зображень за правилами будь-якого наперед обраного методу проєкціювання потребує виконання тих чи інших графічних операцій, розв'язання певних конструктивних задач, які абсолютно незрозумілі учням, і як наслідок заважатимуть і ускладнюватимуть процес навчання. Наочніші зображення можна дістати при центральному проєкціюванні. Це пояснюється тим, що саме розглядання предмета вже є ніби центральним його проєкціюванням на сітчатку ока. Проте, розглядаючи невеликі предмети здалеку, центральне проєкціювання можна наближено прийняти за паралельне. До того ж паралельну проєкцію оригіналу легше будувати, ніж центральну. Тому в педагогічному процесі застосовують зображення, побудовані тільки **паралельним проєкціюванням**, при чому рисунок необов'язково вважати проєкцією самого оригіналу, досить, щоб зображення було проєкцією фігури, подібної до оригіналу. Задля унаочнення зображення, в школі використовують проєкцію оригіналу, на якій одні елементи не закривають інші. Тому проєкціювання повинно бути таким, щоб прямі та площини оригіналу не вироджувалися.

У шкільній практиці використовуються **проєкційні рисунки** (так звані **вільні зображення**). Це зображення, які можна вважати невиродженою паралельною проєкцією оригіналу, або подібної до нього фігури, причому напрям проєкціювання щодо оригіналу не вказується. У вивченні стереометрії роль проєкційного рисунка вирішальна. З одного боку, вчитель ілюструє за допомогою рисунка на дошці свій виклад, щоб викликати в учнів наочне просторове уявлення про геометричні образи, поєднуючи з ними теоретичні міркування та пояснення. Таке вивчення

предмета є конкретнішим і відповідає практичним завданням засвоєння курсу стереометрії. Професор М.Ф. Четверухін у своєму посібнику [11] називає рисунки, застосовані з цією метою, «рисунками-картинами». З другого боку, не можна забувати про друге завдання курсу стереометрії: навчити учнів, оперувати просторовими образами і формами, розв'язувати задачі з просторовими фігурами, тобто знаходити розв'язок фактичною побудовою. Такі рисунки названі автором «рисунки-моделі». Між обома видами рисунків є істотна, глибока принципова відмінність. Якщо «рисунок-картина» залишає свободу дій за педагогом, тобто надає йому можливість вільного вибору елементів зображення на рисунку, то «рисунок-модель» застосовується для ефективного розв'язування стереометричних задач, тобто не допускається довільний вибір шуканих елементів, бо вони цілком визначаються даними з умови.

Також М.Ф. Четверухін [10] і виділяє три вимоги до рисунка — рисунок має бути: **правильним**, тобто всі його елементи побудовані за допомогою одного й того ж методу проєкціювання; **наочним**, тобто такий, що дає повне уявлення про оригінал, який зображується; **простим** у побудові, тобто всі побудови мають бути зрозумілі учням і не обтяжувати викладання матеріалу.

Те, що рисунок має бути простим у побудові, є достатньо специфічною умовою навчального процесу. Саме вона різко вирізняє задачу побудови педагогічних зображень серед інших задач нарисної геометрії. Якщо вчитель доповнює свою розповідь рисунками, що дають змогу зрозуміти і засвоїти учням матеріал, то він не повинен виконувати будь-які інші побудови, крім тих, яких потребує хід міркувань. До того ж ці побудови відбуваються саме у тій послідовності, в якій відбувається виклад теми. У цьому і полягає особливість і складність виконання педагогічних зображень.

Оскільки рисунок має бути правильним, тобто побудований за допомогою одного й того ж методу проєкціювання, то, обравши будь-який з методів проєкціювання і за його правилами побудувавши зображення, згідно нарисної геометрії, буде порушена третя вимога, а разом з тією сам процес навчання. Порівняння обох принципів вказує на їх глибоку різницю, обумовлену третьою вимогою — звільнення процесу виконання зображення від додаткових побудов, допускаючи довільність. Якщо б проєкцію було задано наперед, то за методами нарисної геометрії, це привело б до необхідності виконувати побудови, відповідні до обраної проєкції. Відповідно, зображення обтяжувалися б сторонніми для педагогічного процесу побудовами, що порушували

ло б перебіг навчального процесу. Тому необхідно залишити невизначеними як проєкційний апарат, так і положення його відносно оригіналу.

Що ж стосовно довільності під час побудови зображень, то вона не є необмеженою. Це слідує з того, що не всі властивості оригіналу спотворюються при проєкціюванні, і тому вони не зображуються довільно. По відношенню до проєкційних властивостей оригіналу будь-яка довільність неможлива. Інша ситуація стосовно метричних властивостей оригіналу, які можуть порушуватися і спотворюватися при проєкціюванні, причому ці спотворення залежать від вибору проєкційного апарату і положення оригіналу. У зображеннях, виконаних за принципами побудови зображень в умовах педагогічного процесу, визначальним фактором є умови, які задовольняє оригінал. Саме ці умови, що доповнюють зображення, дають змогу в більшій чи меншій мірі визначити оригінал, проєкційний апарат і положення його відносно оригіналу. Саме з метою наближення методів зображення просторових фігур до практичного використання в навчальному процесі М.Ф. Четверухін розробив різновид аксонометричного проєкціювання, який дістав назву **методу основної площини**. З поняттям правильний рисунок тісно пов'язане поняття **позиційної повноти** зображення, зокрема в задачах на побудову, які можна розв'язати тільки тоді, коли зображення даних фігур є повним. Так зображення призми, циліндра, піраміди і конуса завжди повні. У випадку піраміди і конуса за напрям проєкціювання обирають, наприклад, бічне ребро або твірну відповідно, що робить зображення цих фігур також повним. З поняттям правильного зображення пов'язано також поняття його **метричної визначеності**. Зображення фігур визначеної форми, таких як, куб, сфера та інші правильні многогранники, завжди є метрично визначеними. Разом з тим, зображення правильних призм і пірамід, а також кругового циліндра і конуса, є метрично невизначеними.

Таким чином, якщо під час розв'язування задач або вивчення теоретичних питань потрібна лише ілюстрація, то варто використовувати неповні зображення, які дають змогу довільно задавати точки і лінії перетину та інші елементи рисунка. Якщо маємо повне зображення, то під час розв'язування позиційної задачі довільний вибір елементів двох фігур неможливий і їх необхідно будувати. Разом з тим, повне і метрично невизначене зображення під час розв'язання метричної задачі може мати вільний вибір визначальних елементів, що спрощує побудову. Тому під час розв'язування конкретних задач доцільно умову формулювати в загальному вигляді (без

числових відношень), щоб зображення було метрично невизначеним.

З'ясувавши відмінність методів нарисної геометрії та методу, що використовується в педагогічному процесі, а також умови, яким має задовольняти рисунок, зупинимось на виокремленні часткових умінь під час виконання просторових зображень. Відомо, що діяльність учня складається з окремих дій, які досить різні і утворюють складну ієрархічну структуру. Серед них є найпростіші, які називаються **навичками**. Дія, яка виконується за допомогою навичок, перетворюється в **операцію**, що є складовою частиною складніших дій. Для виконання складніших дій, учень повинен володіти діями, які дають змогу застосовувати знання та навички. В загальній психології за редакцією А.В. Петровського зазначено, що володіння складною системою психічних і практичних дій, необхідних для доцільної регуляції діяльності наявними у суб'єкта знаннями та навичками називається **умінням**.

Оскільки діяльність включає низку різноманітних дій: пізнавальних, розумових, практичних, то відповідно до цього й загальне вміння виконувати таку діяльність включає в себе ряд **часткових умінь**. Формування вмінь та навичок досить складний і тривалий в часі процес. У загальній системі навчання вміння виконувати зображення просторових фігур можна вважати частковим, оскільки воно входить в загальне вміння – вміння розв'язувати стереометричні задачі. Розглянемо вміння зображати просторові фігури та їх комбінації як загальне вміння і на основі цього вибудуємо структуру часткових умінь.

Отже, якщо розглядати вміння зображати стереометричні фігури та їх комбінації як **загальне**, то воно складається з таких **часткових умінь**:

1. Аналіз умови: переведення словесних даних в графічний образ.
2. Виділення суттєвих ознак та властивостей геометричного образу і його числових характеристик.
3. Вибір просторового положення даного образу та його структури задля унаочнення зображення.
4. Побудова зображення просторового образу, за допомогою методу паралельного проєкціювання (косокутного або ортогонального).
5. Позначення на рисунку даних елементів й добудова шуканих елементів в разі необхідності.
6. Побудова базових планіметричних фігур, що є складовими стереометричного зображення задля полегшення сприйняття й усвідомлення завдання.

Перші три виділені часткові вміння пов'язані з оперуванням геометричними образами. Відбу-

вається, свого роду, певна графічна обробка прочитаного в умові задачі та створення образу, можливо, навіть, дещо загального, який мимоволі з'являється в уяві учня. Наступне виділення суттєвих ознак та властивостей, а також урахування числових характеристик графічного образу ніби уточнює його, перетворюючи спочатку утворений уявою образ на той, що відповідає умові. Усвідомивши, про який саме йде мова образ, учень подумки аналізує його положення в просторі й видозмінює задля унаочнення зображення. Наступні два часткові вміння є безпосереднім демонструванням учнями їх умінь виконувати просторові зображення. Важливим є крок переходу від *образу* до *зображення*. Саме вміння учнів втілити побачене в своїй уяві на папері й визначає рівень їх знань, вмінь і навичок зображати стереометричні фігури та їх комбінації. На цьому етапі відбувається акумулювання вивченого ними раніше теоретичного матеріалу та застосування певних *елементарних побудов*. До таких елементарних побудов можна віднести побудову зображення: площини; точки, яка належить і не належить площині; прямої, яка належить і не належить площині; прямої, яка паралельна площині; прямої, яка перпендикулярна до площини; прямої, яка нахилена до площини під кутом; відрізка, який виражає відстань від прямої до площини; відрізка, який виражає відстань від точки до площини; паралельних площин; перпендикулярних площин; площин, які перетинаються під кутом; відрізка, який виражає відстань між площинами; кола; трикутників та їх елементів; чотирикутників та їх елементів; трикутників та чотирикутників вписаних і описаних навколо кола.

Таким чином, оволодіння учнями вміннями виділених нами як четверте і п'яте є частковими вміннями зображення стереометричних фігур, але вони включають в себе низку елементарних побудов, які в свою чергу є їх частковими вміннями. Важливо зазначити, що певні вміння зго-

дом переходять у навички і це значно спрощує виконання побудов.

Шосте часткове вміння демонструє бачення учнями стереометричного зображення з різних позицій, тобто вміння подумки споглядати просторовий об'єкт не тільки в традиційно сформованому положенні, а й повертати його в просторі й розглядати з різних точок зору. Таке вміння дає можливість ніби розібрати цілісний просторовий образ на часткові планіметричні зображення, що в деяких випадках суттєво полегшує розуміння й усвідомлення задачі. Виконання таких планіметричних рисунків не завжди обов'язкове, але задля кращого розуміння учнями просторового зображення доцільне в багатьох випадках.

Висновки. Аналіз типів зображень вимог та принципів їх побудови в нарисній геометрії та в умовах педагогічного процесу, дає змогу визначити метод та вид проєкціонування. Отже, *вільні зображення*, які використовуються в шкільному курсі стереометрії, слід виконувати за допомогою *паралельного проєкціонування* з дотриманням принципу їх зображення згідно трьом вимогам до рисунка: правильність, наочність та простота в побудові. Метод, який при цьому використовується, запропонований М.Ф. Четверухіним і відомий як *метод основної площини*. Довільність в побудові є обмеженою і пов'язана з поняттями повноти чи неповноти та метричної визначеності рисунка. З огляду на це в практичній діяльності під час вивчення курсу стереометрії варто користуватися неповними або повними метрично невизначеними зображеннями для простоти виконання побудови. Розгляд поетапного формування в учнів умінь зображати просторові фігури в шкільному курсі стереометрії дає можливість створити чітку технологію розвитку таких вмінь. Логічно вибудована лінія формування й розвитку вмінь старшокласників зображати стереометричні фігури та їх комбінації є запорукою їх графічної культури.

ЛІТЕРАТУРА

1. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. — Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. — 464 с.
2. Гольдберг Я. Е. С чего начинается решение стереометрической задачи: Пособие для учителя. — К.: Рад. шк., 1990. — 118 с.
3. Зенгин А. Р. Основные принципы построения изображений в стереометрии: Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1962. — 108 с.
4. Лепський М. М. Нарисна геометрія: Посібник для педагогічних інститутів. — К.: Рад. шк., 1961 — 118 с.
5. Лернер Г. И. Психология восприятия объемных форм (по изображениям). — М.: Из-во Моск. ун-та, 1980. — 136 с.
6. Литвиненко В. Н. Задачи на развитие пространственных представлений: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1991. — 127 с.: ил.
7. Лоповок Л. М. Зображення круглих тіл: Посібник для вчителів середньої школи. — К.: Рад. шк., 1961. — 64 с.
8. Савченко В. М. Изображение фигур в математике. — К.: Вища школа, 1978. — 136 с.
9. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математи-

- ки о пед. психологии. — М.: Просвещение, 1983. — 160 с., ил.
10. Четверухин М. Ф. Изображение фигур в курсе геометрии: Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1958. — 216 с.
11. Четверухін М. Ф. Стереометричні задачі на проєкційному рисунку.— К.: Рад. шк., 1954. — 112 с.

Shvets L.V.

Graphical representation of spatial figures in school stereometry course

Abstract. During the studying of stereometry course a teacher has to teach students to represent stereometrical figures and their combinations, in the other words, to make students' abilities to do these representations. Teaching students to stereometry teachers make full use of visual figure representations, which play an important role in pedagogical process. These graphical representations make easier students' understanding of teacher's thoughts and resume. It's very important that they also develop students' spatial conception of observing ratios and give them specific geometrical forms. Thanks to it students can remember material rapidly and with more profit. On the other hand a correct sketch give possibilities to solve a sum. But an incorrect sketch can suggest an incorrect idea about students' consideration. Of course, in pedagogical conditions graphical representations should satisfy some dictates, which are demanded by teaching specificity. Certainly, for graphical representation you can use methods of descriptive geometry, which are developed in details. But these methods fall within problems of technical kind of work, which are unexpected by teacher's activity and unadapted to pedagogical process. These mentioned circumstances need revising of graphical representation principles in details in stereometry course taking into consideration sketch dictates and conditions when students can make skills to do these representations by forming off partial skills. In this article there are principles of graphical representation of spatial figures in school stereometry course. There is a comparative characteristic of principles of graphical representation of descriptive geometry and representations, which are used in school stereometry course. Also there are characteristics of parallel projecting, conception of completeness and metric precision of spatial representations to improve a level of graphic culture as to graphical representation of stereometrical figures and their combinations. There is a structure of forming and developing of senior students' skills to represent spatial figures and their combinations by dividing into parts in this article, too.

Key words: stereometry, parallel projecting, completeness, metric precision, partial abilities, graphical representation of stereometrical figures.

Швец Л.В.

Построение изображений пространственных фигур в школьном курсе стереометрии

Аннотация. Во время изучения курса стереометрии перед учителем возникает задача научить учеников изображать стереометрические фигуры и их комбинации, то есть выработать у них умения выполнять такие построения. Обучая учеников стереометрии, учителя широко используют наглядные изображения фигур, которые играют важную роль в педагогическом процессе. Эти изображения не только облегчают понимание учениками размышлений и выводов учителя, а и, что важно, они развивают в учеников пространственное представление рассматриваемых отношений и придают им конкретных геометрических форм. Благодаря этому материал запоминается быстрее и с большей пользой. С другой стороны правильный рисунок дает возможность найти решение задачи, напротив, неправильный рисунок может натолкнуть учеников на неправильные соображения. Очевидно, что в условиях педагогического процесса, изображения должны удовлетворять ряд условий, которые вызваны спецификой преподавания. Конечно, для построения изображений, можно использовать детально разработанные методы начертательной геометрии. Однако эти методы касаются проблем преимущественно технического характера, не предусмотрены деятельностью учителя и не приспособлены к условиям педагогического процесса. Названные выше обстоятельства требуют существенного пересмотра принципов построения изображений в курсе стереометрии с учетом требований к рисунку и условий выработки в учащихся умений выполнять эти построения путем формирования частичных умений. В статье освещены принципы построения изображений пространственных фигур в школьном курсе стереометрии. Дано сравнительную характеристику принципов построения изображений начертательной геометрии и изображений, используемых при обучении в школьном курсе геометрии. Рассмотрены свойства параллельного проектирования, понятия полноты и метрической определенности пространственных изображений, для повышения уровня графической культуры построений пространственных фигур и их комбинаций. Также дано структуру формирования и развития умений старшеклассников изображать пространственные фигуры и их комбинации путем деления на частичные.

Ключевые слова: стереометрия, параллельное проектирование, полнота, метричная определенность, частичные умения, построение стереометрических фигур.