Парчук М.І.

Реалізація міжпредметних зв'язків з курсом "Теорія ймовірностей та математична статистика" в процесі навчання теоретичної фізики студентів фізичних спеціальностей

Парчук Марія Іванівна, аспірант
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, м. Київ, Україна

Анотація. В статті проаналізовані знання, вміння та навички з теорії ймовірностей та математичної статистики, які використовуються в навчанні теоретичної фізики загалом та термодинаміки і статистичної фізики зокрема.

Ключові слова: *теоретична фізика, теорія ймовірностей та математична статистика, розподіл Максвела, ймовірність, закон розподілу, функція розподілу, функція щільності розподілу, міжпредметні зв'язки*

Теоретична фізика відіграє вирішальну роль у завершенні підготовки спеціаліста-фізика, формує науковий світогляд майбутнього вчителя, який повинен мати цілісні уявлення про сучасну фізичну картину світу, вміти розв’язувати практичні і теоретичні задачі сучасної фізики, бути підготовленим до сприймання новітніх ідей фізики XXI сторіччя. Теоретична фізика узагальнює все, що відкрито експериментально, формулює постулати і принципи, створює нові теорії. Це дає можливість пояснити відомі закономірності, передбачити клас нових експериментально ще не відкритих явищ та законів.

Суттєва роль під час вивчення курсу "Теоретична фізика" фахівцями фізики приділяється таким її розділам як термодинаміка і статистична фізика. Існує суттєва відмінність у підході до явищ, які вони вивчають. Статистична фізика виходить із мікроскопічної структури об’єкта, уявлень про властивості і рух частинок, з яких він складається. Термодинаміка вивчає свої об’єкти феноменологічно, цікавлячись лише їх макроскопічними характеристиками. Однак такі підходи не протирічать один одному: закони термодинаміки можуть бути теоретично обґрунтовані за допомогою методів статистичної фізики. Варто зазначити і те, що жоден з даних розділів неможливо якісно вивчати без ґрунтовного знання багатьох математичних дисциплін, методи яких використовуються для дослідження математичних моделей реальних фізичних явищ або таких, якими займається теоретична фізика. Однією з таких дисциплін є теорія ймовірностей та математична статистика, яка забезпечує формування у студентів-фізиків спеціальних математичних компетенцій, що є необхідними в подальшому навчанні та роботі.

У статті ми проаналізуємо зв'язок між знаннями, вміннями та навичками, які здобуваються студентами у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики, та покажемо, як ці компетентності застосовуються в курсі теоретичної фізики загалом та термодинаміки і статистичної фізики зокрема.

Пропонована програма курсу "Теоретична фізика (термодинаміка і статистична фізика)" розрахована на 189 аудиторних годин (з них 44 години лекційні та 44 години практичних занять) і 101 година самостійної роботи.

Розглянемо зміст навчального матеріалу та основних змістових модулів курсу "Теоретична фізика (термодинаміка і статистична фізика) ".

Модуль І. **Основні поняття термодинаміки.** Основні поняття термодинаміки. Основні закони термодинаміки.

Модуль ІІ. **Методи термодинаміки.** Методи термодинаміки. Умови рівноваги і стійкості термодинамічних систем. Фазові переходи і критичні явища.

Модуль ІІІ. **Основні поняття і принципи статистичної фізики.** Основні поняття і принципи статистичної фізики. Розподіл Максвела – Больцмана. Розподіли Гіббса. Принцип Больцмана. Зв’язок термодинамічних і статистичних величин. Статистична теорія ідеальних систем. Поняття про статистичну теорію неідеальних систем. Теорія флуктуацій.

Питання реалізації міжпредметних зв’язків стохастики та фізичних дисциплін є досить актуальним в сучасній методиці навчання математики та знайшло своє відображення у працях М.І. Бурди, В.О. Гірки [2], Г.О. Грищенка [3], В.П. Дущенка [6], А.А. Свєшнікова, Ф.Г. Сєрової [7], З.І. Слєпкань, В.В. Фірсова, В.О. Швеця, М.І. Шута [8].

Розглянемо деякі основні поняття і закони статистичної фізики, які ґрунтуються на основних фактах теорії ймовірностей та математичної статистики. Представимо орієнтовний виклад теоретичного матеріалу щодо розподілу Максвела в курсі теоретичної фізики (на основі [3, 4, 7]).

В основі міркувань, що ведуть до розподілу Максвела, лежать фактично два блоки постулатів:

– про хаос й інтерпретацію абсолютної температури T - складають блок фізичних постулатів;
– про застосування статистичного підходу до дослідження систем великої кількості частинок, заснованого на теорії ймовірностей – складають блок математичних постулатів.

Внаслідок хаотичного руху та зіткнень молекул між собою їх швидкості весь час змінюються як за напрямом так і за величиною. За характером хаотичний рух молекул такий, що ставити питання про кількість молекул, які в даний момент часу мають швидкість, що точно дорівнює $\vec{v},$, не можна, бо таких молекул може і не бути. Отже, швидкість даної молекули газу в даний момент часу є величина випадкова.

Термодинамічна рівновага (ТД) за своєю глибинною суттю не статична, а динамічна. Молекули газу, стикаючись між собою, весь час обмінюються імпульсами та енергією, змінюючи свої швидкості. Оскільки однією з умов термодинамічної рівноваги є сталість температури, яка пов’язана із середньою квадратичною швидкістю руху молекул виразом $v_{\text{ср}}^2 = \frac{3kT}{m_0}$ (1), то природно припустити, що має місце принцип **детальної рівноваги**: скільки молекул, що мають швидкості в інтервалі $\{\vec{v}, \vec{v} + d\,\vec{v}\}$, вибуває з цього інтервалу за деякий достатньо малий час $\Delta\, t$, стільки ж приблизно, й прибуває до нього за той же час. Інакше кажучи, природно вважати, що в стані ТД рівноваги має місце стабільний (незалежний від часу) розподіл молекул за швидкостями. Постає задача встановлення цього розподілу. Фактично необхідно встановити вигляд щільності функції розподілу молекул за швидкостями $f_M\ \vec{v}$, яка в свою чергу дозволяє встановити **ймовірність** $dP\ \vec{v}$ знайти молекулу газу зі швидкістю, що потрапляє до паралелепіпеду у просторі швидкостей з місткістю $\left(du_x du_y du_z\right)$ в околі значення $\vec{v}$:

$$dP\ \vec{v} = f_M \underset{v}{\rightarrow} du_x du_y du_z. \qquad (2)$$

Цю задачу й вирішив Максвел у 1860 р. для поступального руху молекул ідеального газу. Загальну теорію статистичних властивостей фізичних систем розвинули Больцман і Гіббс. Закон Максвелла – це перший приклад статистичного закону в науці. Д. Максвелл усвідомив, що випадковий рух окремих молекул підпорядкований певному статистичному закону.

Поняття ймовірності. Ергодична гіпотеза. В подальшому викладі використаємо статистичний підхід до визначення ймовірності, тобто ймовірність події А визначатиметься за формулою:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}, \qquad (3)$$

де N – кількість спостережень або випробувань, з яких N_A - число сприятливих випробувань,

Зауваження. При цьому необхідно, щоб число випробувань у системі було досить великим ($N \to \infty$), а система перебувала при незмінних умовах.

Замість вимоги випробувань над однією і тією самою системою при незмінних умовах можна говорити про сукупності окремих випробувань над великою кількістю однакових систем, які називають **ансамблем.**

Отже, є **два способи** експериментального дослідження ймовірностей різних можливих для системи макростанів:

– Перший полягає в довготривалому спостереженні за однією великою системою $t \to \infty$. Припустимо, що Δt_n сумарний час, який система за час спостереження перебувала в одному з $n = 1, 2, \ldots$ можливих макростанів системи. Тоді ймовірність певного макростану є:

$$w_n = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\Delta t_n}{t}\right). \qquad (4)$$

Другий полягає у спостереженні за великою кількістю $N \to \infty$ абсолютно однакових в початковий момент часу, але статистично незалежних одна від одної систем (**ансамблем Гіббса**). Кожна така система змінює свої стани незалежно від інших і через певний невеликий проміжок часу можна підрахувати кількість систем ΔN_n , які потрапили в той чи інший стан n. Ймовірність в такому методі:

$$w_n = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\Delta N_n}{N}\right). \qquad (5)$$

Ергодична гіпотеза статистичної фізики стверджує, що ймовірності (4) та (5) є рівними.

Знаючи функцію $f(\vec{v})$ можна визначити середні значення усіх фізичних величин, що залежать від швидкості. Для кінетичної енергії, наприклад:

$$\overrightarrow{E_K} \equiv \langle E_K \rangle = \frac{m\overrightarrow{v^2}}{2} = \iiint_\propto \frac{mv^2}{2} \cdot f(\vec{v}) du_x du_y du_z. \quad (6)$$

Для функції $f(\vec{v})$ завжди повинна виконуватися **умова нормування**:

$$\iiint_\propto f_M(\vec{v}) \cdot du_x du_y du_z = 1. \qquad (7)$$

Молекулярний рух має хаотичний характер. Це означає, що всі напрями руху рівно ймовірні, та швидкості молекул можуть бути практично довільними: від досить малих до дуже великих. Але для рівноважного стану ($T = const$, відсутність зовнішніх дій) величина $\overrightarrow{v_{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}}$ в (1) залишається сталою. Це означає, що в результаті зіткнень у газі встановлюється деякий стаціонарний розподіл молекул за швидкостями. Цей розподіл стосується всієї сукупності молекул, тобто він є статистичним. **Питання** про розподіл швидкостей можна сформулювати так: яка частина молекул dN з усіх N в одиниці об'єму має швидкості, що лежать у деякому інтервалі від v до $(v + dv)$.

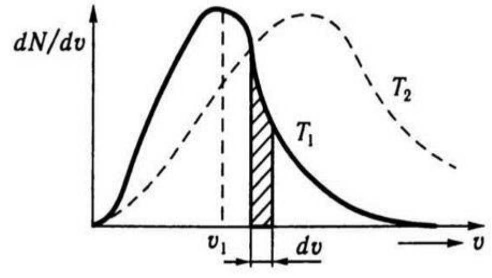

Рис. 1.

Величина $\frac{dN}{N}$ повинна залежати не тільки від інтервалу dυ , а й від швидкості υ . Формалізуємо задачу у наступному вигляді:

$$\frac{dN}{N} = \int_v^{v+dv} f(v)dv = F(v + dv) - F(v) \qquad (8)$$

Функція $f(v)$ є **функцією щільності розподілу**: визначає відносне число молекул $\frac{dN}{N}$, швидкості яких лежать в одиничному інтервалі швидкостей, в околі швидкості υ . Функція $f(v)$ являє собою ймовірність того, що довільна молекула в одиниці об'єму має швидкість в одиничному інтервалі швидкостей в околі v .

Такий розподіл вперше встановив **Джеймс Клерк Максвелл** у 1860 р. За всіма етапами строгого виведення формули для функції розподілу Максвела $f(\vec{v})$ ми можемо прослідкувати у [1].

Закон Максвела – закон розподілу молекул за швидкостями – має такий вигляд:

$$\frac{dN}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv. \qquad (9)$$

Проаналізуємо графічну ілюстрацію закону Максвела (рис. 1):

1. Функція щільності розподілу $f(v) = 0$ при $v = 0$, і прямує до нуля ($f(v \to 0)$ при $v \to \infty$. Це означає, що в газі немає нерухомих молекул, а також свідчить про те, що ймовірність наявності молекул з $v \to \infty$ близька до нуля.

2. Функція щільності розподілу має максимум при певній швидкості $v_Н$- **найбільш ймовірній швидкості** (див. наступний пункт). Крива Максвела вказує на те, що в газі найбільша частина молекул рухається зі швидкостями, значення яких близькі до деякої $v_Н$. Звичайно, ймовірність того, що молекула рухається з точно заданою швидкістю дорівнює нулю.

3. Крива Максвела асиметрична. Вона швидко зростає при $v < v_Н$, досягає максимуму при $v = v_Н$ і повільніше спадає при $v > v_Н$.

Користуючись кривою Максвела можна графічно визначити відносне число молекул $\frac{dN}{N}$, швидкості яких лежать в заданому інтервалі від v до $(v + dv)$. Якщо визначити площу, обмежену кривою розподілу і віссю абсцис, то дістанемо сумарне відносне число молекул, тобто одиницю.

З підвищенням температури максимум на кривій розподілу Максвела буде зміщуватися вздовж осі абсцис вправо, бо $v_{\text{Н}} \sim T$. Оскільки площа, обмежена кривою Максвела і віссю абсцис, повинна при цьому залишатися незмінною, то ордината, що відповідає максимуму кривої, зменшується – крива розподілу стає більш пологою. Одночасно максимум кривої стає не різко вираженим, тобто більш „розмитим". При цьому також права вітка кривої розмішується вище, а ліва нижче (рис. 1). Це вказує на те, що з підвищенням температури розподіл стає більш рівномірним, а також збільшується кількість молекул, швидкості яких наближаються за величиною до $v_{\text{Н}}$, і зменшується кількість молекул з малими швидкостями.

Останній результат пояснює вплив температури на деякі фізико-хімічні процеси. Наприклад, прискорення хімічних реакцій при нагріванні сумішей, що реагують, значною мірою визначається збільшенням кількості молекул, що мають швидкості, які близькі за значенням до деякої характерної величини.

Характерні швидкості молекул. У молекулярно-кінетичній теорії газів користуються поняттями середньої $\bar{v}$, середньої квадратичної $\overline{v_{\text{кв}}^2}$ та найбільш імовірної $v_{\text{Н}}$ швидкостей. Ці швидкості задаються для рівноважних станів газу. Закон Максвела дає змогу обчислити середню арифметичну $\bar{v}$, і середню квадратичну $\overline{v_{\text{кв}}^2}$ та середню відносну $\langle v_{\text{відн}} \rangle$ [5] швидкості молекул.

Отримати вираз для $v_{\text{Н}}$ – **найбільшймовірної швидкості** можна з наступних міркувань. Досліджуючи функцію (9) на максимум, отримаємо:

$$\frac{df(v)}{dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_0T}\right)^{\frac{3}{2}}\left[v^2 \frac{d}{dv}\left(exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)\right) + 2v \cdot exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)\right],$$

де $\frac{d}{dv}\left(exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)\right) = -\frac{2mv}{2k_0T} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right) = -\frac{mv}{k_0T} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)$,

отже, $\frac{df(v)}{dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_0T}\right)^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{mv^3}{k_0T} \cdot exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right) + 2v \cdot exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)\right]$.

При $v_{\text{Н}}$ екстремум функції $f(v)$ перетворюється в 0 (рис. 1), тобто $\frac{df(v)}{dv} = 0$. Розв'язуючи вираз у квадратних дужках, отримаємо найбільш імовірну швидкість $v_{\text{Н}}$:

$$v_{\text{Н}} = \sqrt{\frac{2k_0T}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \qquad (10)$$

Середня швидкість (або середньоарифметична) визначається сумою:

$$\bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i, \qquad (11)$$

де v_i – швидкість i-ї молекули, N – кількість молекул. З іншого боку за допомогою функції щільності розподілу Максвелла $f(v)$ середню швидкість υ молекул можна визначити так:

$$\bar{v} \equiv \langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv, \qquad (12)$$

Для отримання виразу для $\bar{v}$ виконаємо наступні математичні перетворення. У вираз для $f(v)$ замість $\left(\frac{m}{2k_0T}\right)$ підставимо $v_{\text{Н}}^2$, згідно (10). Отримаємо наступний вигляд функції щільності розподілу $f(v)$:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{v_{\text{Н}}^3}\exp\left(-\frac{v^2}{v_{\text{Н}}^2}\right)v^2. \qquad (13)$$

Підставимо (13) у вираз (12), отримаємо наступне:

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{v_{\text{Н}}^3}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{v^2}{v_{\text{Н}}^2}\right)v^3\, dv. \qquad (14)$$

Використаємо метод інтегрування частинами та отримаємо наступне:

$$\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{v^2}{v_{\text{Н}}^2}\right)v^3\, dv = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{\text{Н}}^2}\right)^{-2} \text{ або}$$

$$\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{v^2}{v_{\text{Н}}^2}\right)v^3\, dv = \frac{1}{2}v_{\text{Н}}^4.$$

Звідки й отримаємо вираз для середньої (арифметичної) швидкості молекул:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (15)$$

Середня квадратична швидкість може бути знайдена з рівняння (1):

$$\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2}, \text{ або } \bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \qquad (16)$$

За формулою (16) можна також обчислити швидкість броунівського руху частинок. Звичайно, при цьому m – маса броунівської частинки. Після множення чисельника і знаменника під коренем в (16) на N_A і врахувавши, що $kN_A = R$ та $mN_A = M$:

$$\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (17)$$

Середню квадратичну швидкість (16) та (17) називають ще **тепловою**. Значення $\bar{v}_{\text{кв}}$ для газів досить великі. Так для водню ($M = 2 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$) при кімнатній температурі $\bar{v}_{\text{кв}} = 1{,}9 \cdot 10^3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, тобто близько $2\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$. Теплова швидкість, як видно з (16), пропорційна $\sqrt{\text{T}}$ і обернено пропорційна $\sqrt{m}$, з чого можна зробити висновок, що тепловий рух досить інтенсивний для молекул, помітний для мікроскопічно малих частинок, які здійснюють броунівський рух, і зовсім непомітний для важких тіл.

Середня квадратична швидкість $\bar{v}_{\text{кв}}^2$ (16) та середня швидкість $\bar{v}$ (15) пов'язані з найбільш імовірною швидкістю $v_{\text{Н}}$ (10) простими співвідношеннями:

$$\bar{v}_{\text{кв}}^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}v_{\text{Н}} \cong 1{,}225 v_{\text{Н}}, \qquad (18)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{4}{\pi}}v_{\text{Н}} \cong 1{,}128 v_{\text{Н}}. \qquad (19)$$

Для цих швидкостей виконується нерівність:

$$\bar{v}_{\text{кв}}^2 > \bar{v} > v_{\text{Н}}.$$

З (18) та (19) випливає, що всі ці три величини дають загальне уявлення про швидкості теплового руху молекул газу.

У законі Максвела (9) функція щільності розподілу $f(v)$ залежить від природи газу та температури. Увівши до розгляду так звану відносну швидкість:

$$u = \frac{v}{v_{\text{Н}}}, \qquad (20)$$

де υ – задана швидкість молекули, а $v_{\text{Н}}$ – найбільш ймовірна при даній температурі, дістанемо універсальне рівняння, яке **не** залежить від природи газу та температури:

$$\frac{dN}{Ndu} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2. \quad (21)$$

Форма запису закону розподілу Максвела (21) є досить зручною для розв'язування різних задач, пов'язаних з розподілом молекул за швидкостями. Цей закон має фундаментальне значення для молекулярної теорії газів.

Експериментальна перевірка закону Максвела. Щоб мати більш конкретне уявлення про характер закону розподілу Максвела, варто розібратися із прикладом розподілу швидкостей молекул кисню при 0℃, який наведено у [6].

Експериментальна перевірка закон розподілу Максвела була здійснена Елдріджем (1927 р.) та Ламмертом (1929 р.) [6, с. 253]. Дуже цікавим є безпосереднє експериментальне визначення швидкостей газових молекул. Воно є прямим підтвердженням багатьох результатів та положень молекулярно-кінетичної теорії. Вперше такі дослідження провів О. Штерн у 1920 р. [6, с. 249]. Результати дослідів Штерна цілком передають реальну картину теплового руху молекул. Наприклад, в одному з дослідів при T=1473K найбільш імовірна швидкість $v_{\text{Н}}$ дорівнювала 675 м/с, а за обчисленнями 672 м/с.

Задача 1. Обчислити для Максвелівського розподілу найбільш ймовірне значення швидкості v_{ver}, яке відповідає максимуму функції розподілу.

Розв'язання. Найбільш ймовірна швидкість легко знаходиться диференціюванням Максвелівської функції розподілу частинок за модулями швидкості $F_v = 4\pi v^2 (m/2nkT)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT)$, після чого отриманий вираз прирівнюють до нуля.

$$8\pi v_{ver} (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_{ver}^2}{2kT}\right) -$$
$$8\pi v_{ver}^3 \frac{m}{2kT} (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_{ver}^2}{2kT}\right) = 0.$$

Звідси знаходимо $v_{ver} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

Задача 2 [2]. В якої частини молекул повітря модуль швидкості відрізняється від найбільш імовірної $v_{\text{ім}}$ швидкості молекул не більше, ніж на $\Delta v = \pm\, 0{,}5$ м/с? Температура повітря t=17 °С.

Розв'язання. Абсолютна температура повітря T=(t+273)K =290K. Враховуючи, що середня молярна маса повітря становить $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, для найбільш імовірної $v_{\text{ім}}$ швидкості молекул дістаємо:

$$v_{\text{ім}} = \sqrt{2RT\mu} = \sqrt{2 \cdot 8{,}31 \cdot \frac{290}{29} \cdot 10^{-3}} = 408 \text{ м/с}.$$

Частка молекул ідеального газу, модуль швидкості яких належить до певного інтервалу, або, що те саме, імовірність Δw того, що молекула повітря має модуль швидкості з цього інтервалу, визначається функцією розподілу Максвелла за модулем швидкості

$$\Delta w = \frac{\Delta N}{N} = \frac{4e^{-u^2} u^2 \Delta u}{\sqrt{\pi}}.$$

За умовою задачі: $v = v_{\text{ім}} \to u = \frac{v}{v_{\text{ім}}} = 1$,

$\Delta v = (v_{\text{ім}} + 0{,}5) - (v_{\text{ім}} + 0{,}5) = 1\frac{\text{м}}{\text{с}} \to \Delta u = \frac{\Delta v}{v_{\text{ім}}} = \frac{1}{v_{\text{ім}}} = \frac{1}{408} << 1$, що свідчить про можливість застосування наближеної формули:

$$\Delta w = \frac{4}{\sqrt{\pi}} = \frac{e^{-1} 1^2}{408} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Зауважимо, що імовірність молекули газу мати модуль швидкості в зазначеному інтервалі $\Delta w \equiv \int_{v_{\text{ім}}-\Delta v}^{v_{\text{ім}}+\Delta v} f(\upsilon) d\upsilon$ за геометричним змістом інтегралу – це площа криволінійної трапеції (площа під кривою, яку описує функція $f(\upsilon)$). Тобто кожні дві з тисячі молекул повітря мають модуль швидкості у зазначеному інтервалі.

Можна запропонувати ще ряд задач міжпредметного змісту для розв'язання на практичних заняттях з теорії ймовірностей та математичної статистики, а також і на заняттях з теоретичної фізики.

Задача 3 [10]. Знайти середню квадратичну $\langle v_{\text{кв}} \rangle$, середню арифметичну $\langle v \rangle$, та найбільш імовірну $v_{\text{і}}$ швидкості молекул водню. Підрахунки виконати для трьох значень температури: 1) T=20K; 2) T=300K; 3) T=5kK;

Задача 4 [10]**.** Визначити частку *w* молекул ідеального газу, енергії яких відрізняються від середньої енергії $< \varepsilon_{\text{П}} >$ поступального руху при тій самій температурі не більше, ніж на 1%.

Задача 5 [10]**.** Яка частина молекул кисню при T=100°С має швидкість від v_1=100м/с до v_2=110м/с?

На основі проведеного аналізу змісту навчального матеріалу з теми "Розподіл Максвела" можна визначити основні теоретичні факти з теорії ймовірностей та математичної статистики, без яких неможливо вивчати дану тему в курсі теоретичної фізики. Відповідність між основними стохастичними моделями та їх інтерпретаціями і застосуваннями в теоретичній фізиці наведено в наступній таблиці 1.

Висновки. Аналіз змістових модулів курсу теоретичної фізики "Термодинаміка та статистична фізика" дозволяє зробити наступні висновки:

1. Існують суттєві міжпредметні зв'язки між курсами теоретичної фізики і теорії ймовірностей та математичної статистики.

2. Теорія ймовірностей є теоретико-математичним підґрунтям введення основних понять та доведення основних теоретичних положень у термодинаміці та статистичній фізиці.

Враховуючи це, можна сформулювати наступні рекомендації щодо підвищення ефективності реалізації між предметних зв'язків:

Під час вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики, зокрема таких змістових модулів (тем) як "Елементи комбінаторики. Класичне означення ймовірності", "Геометричне означення ймовірності", "Ряд розподілу, функція розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини" пропонувати студентам фізичних спеціальностей задачі фізичного змісту, зокрема, задачі, в яких використовуються моделі теоретичної фізики.

Шляхом системного впровадження таких задач буде досягнуто ряд дидактичних цілей: мотивація, активізація пізнавальної діяльності за рахунок пропедевтики, прикладна та професійна спрямованість навчання.

Під час вивчення теоретичної фізики необхідно коректно і повно провести актуалізацію відповідних знань з теорії ймовірностей без зайвих дублювань. При введенні нових понять, обґрунтуванні теоретичних фактів та розв'язуванні задач доцільно постійно акцентувати увагу студентів на відповідних поняттях з теорії ймовірностей та математичної статистики.

Таблиця 1. Відповідність між основними стохастичними моделями та їх інтерпретаціями і застосуваннями в теоретичній фізиці

Теорія ймовірностей і математична статистика	**Приклад з теоретичної фізики**
Статистична ймовірність	Ймовірність макростану (4) $w_n = \lim_{t\to\infty}(\frac{\Delta t_n}{t})$ - , де Δt_n - сумарний час перебування системи в макростані, t - час спостереження за системою. Ймовірність макростану (5) $w_n = \lim_{N\to\infty}(\frac{\Delta N_n}{N})$, де ΔN_n - кількість систем, що потрапили у певний стан, N - кількість систем в початковий момент часу.
Функція розподілу	Кількість того, що молекули, які містяться в певному об'ємі, мають швидкість, що лежить в інтервалі від v до $v + dv$ $$\frac{dN}{N} = \int_v^{v+dv} f(v)dv = F(v+dv) - F(v)$$
Функція щільності розподілу	Ймовірність попадання молекули в паралелепіпед (13) $dP\ \vec{v} = f_M \underset{v}{\rightarrow} du_x du_y du_z$ -, де $f_M\ \vec{v}$ - щільність функції розподілу за швидкостями, $(du_x du_y du_z)$ - місткість паралелепіпеда. Середня швидкість молекул (12) $\bar{v} \equiv \langle v \rangle = \int_0^\propto v f(v) dv$, де $f(v)$ - функція швидкості розподілу Максвела за швидкостями.
Математичне сподівання або середнє значення	Середня швидкість (11) $\bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i$, де v_i - швидкість i-ї молекули, N - кількість молекул. Середня швидкість молекул (12) $\bar{v} \equiv \langle v \rangle = \int_0^\propto v f(v) dv$, де $f(v)$ - функція швидкості розподілу Максвела за швидкостями. Середня швидкість (14) $\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{v_{\text{Н}}^3}\int_0^\propto \exp\left(-\frac{v^2}{v_{\text{Н}}^2}\right) v^3\, dv$, де $v_{\text{Н}}$ - найбільш ймовірна швидкість. Середня швидкість молекул (15) $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$, де R – універсальна газова стала, T – температура, m – маса молекул, k – стала Больцмана. Швидкість броунівського руху частинок (16) $\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2}$, або $\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, де $\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}}$ - середня квадратична швидкість, T – температура, m – маса броунівської частинки, k – стала Больцмана. Теплова швидкість (17) $\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, де R – універсальна газова стала, T – температура, M – молярна маса. Середня квадратична швидкість (18) $\bar{v}_{\text{кв}}^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} v_{\text{Н}} \cong 1{,}225 v_{\text{Н}}$, де $v_{\text{Н}}$ - найбільш ймовірна швидкість. Середня швидкість (19) $\bar{v} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} v_{\text{Н}} \cong 1{,}128 v_{\text{Н}}$, де е $v_{\text{Н}}$ - найбільш ймовірна швидкість.
Середнє квадратичне відхилення	Найбільш імовірна швидкість (10) $v_{\text{Н}} = \sqrt{\frac{2k_0 T}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$, де T – температура, m – маса частинки, k – стала Больцмана, R – універсальна газова стала, M – молярна маса.

ЛІТЕРАТУРА

1. Василевский А.С., Мултановский В.В. Курс теоретической физики Том 4. Статистическая физика и термодинаміка М.: Просвещение, - 1985, 256 с., С. 117 – 128
2. Гірка В.О., Гірка І.О. Лекції з курсу фізики «Механіка та молекулярна фізика» для студентів природничих факультетів. - URL: http://dspace.univer.kharkov.ua/bitstream/123456789/1735/6/molec_4.pdf
3. Грищенко Г. Основні поняття статистичної фізики. Навч. посібник. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. – 44с.
4. Дворник О.В. Статистичні розподіли. Лекція 13. - URL: ftp://ns1.norma4.ks.ua/pdf
5. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Высш. шк., 1989. – 608 с.
6. Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика: у 3-х кн. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.: Вища шк., 1995. – 431 с.
7. Серова Ф.Г., Янкина А.А. Сборник задач по теоретической физике: Квантовая механіка, статистическая фізика. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ. спец. – М.: Просвещение, 1979. – 192 с., ил.
8. Сусь Б.А., Шут М.І. Проблеми дидактики фізики у вищій школі. Науково-методичне видання – друге, виправлене доповнене. – К.: ВЦ "Просвіта", 2003. – 155 с.
9. Тичинська Л.М. Теорія ймовірностей. Ч.1. Історичні екскурси та основні теоретичні відомості: навчальний посібник/ Л.М. Тичинська, А.А. Черепащук. – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 112 с. - URL: http://posibnyky.vntu.edu.ua/pdf/000814.pdf
10. http://ignatenko.sumdu.edu.ua/wp-content/uploads/7%20 ОсновиМКТ.pdf

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Vasilevskiy A.S., Multanovsky V.V. Course of Theoretical Physics, Volume 4. Statistical physics and termodinamika M .: Education, - 1985, 256 p., P 117-128.
2. Hirka V.A., Hirka I.O. Lectures on physics course "Mechanics and Molecular Physics" for students of natural faculties. - URL: http://dspace.univer.kharkov.ua/bitstream/123456789/1735/6/molec_4.pdf
3. Gryshchenko G. Concepts of statistical physics. Teach. guide. - Kyiv: NPU n.a. M.P. Drahomanov. 2005 – 44 p.
4. Dvornik O.V. Statistical distributions. Chapter 13. - URL: ftp://ns1.norma4.ks.ua/pdf
5. Detlaf A.A., Yavorskiy B.M. Physics course. - M .: Higher sch., 1989. - 608 p.

6. Duschenko V.P. Kucheruk I.M. General Physics: in 3 books. Bk. 1. Physical principles of mechanics. Molecular physics and thermodynamic-Mika. - K .: Higher sch., 1995. - 431 p.
7. Serov F.G., Yankina A.A. Problems in Theoretical Physics: Quantum mechanics, statistical physics. Textbook for students of pedagogical institutes of physical specialty - M .: Education, 1979. - 192 p.
8. Sus' B.A., Shut M.I. Problems of didactics of physics in high school. Scientific-methodical guide / second edition, revised, enlarged Nene. - K .: Pub.Center "Education", 2003. - 155 p.
9. Tychynska L.M. Probability. Part 1. Historical overview and basic theoretical information: Tutorial / L.M. Tychynskiy, A.A. Cherepashchuk. - Vinnitsa: NTUV, 2010. - 112 p. - URL: http://posibnyky.vntu.edu.ua/pdf/000814.pdf

Parcuk M.I. The realization of interdisciplinary connections with the course "Probability Theory and Mathematical Statistics" in learning theoretical physics students physical specialities

Abstract. In this article analyzes the knowledge, abilities and skills in probability theory and mathematical statistics, which are used in teaching theoretical physics and thermodynamics and statistical physics in particular.

Keywords*: theoretical physics, probability theory and mathematical statistics, Maxwell distribution, the probability distribution, distribution function, density function distribution, interdisciplinary communication*

Парчук М.И. Реализация межпредметных связей с курсом "Теория вероятностей и математическая статистика" в процессе обучения теоретической физики студентов физических специальностей

Аннотация. В статье проанализированы знания, умения и навыки по теории вероятностей и математической статистики, используемые в обучении теоретической физики в целом и термодинамики и статистической физики в частности.

Ключевые слова: *теоретическая физика, теория вероятностей и математическая статистика, распределение Максвелла, вероятность, закон распределения, функция распределения, функция плотности распределения, межпредметные связи*