Милушева-Бойкина Д.В., Милушев В.Б.

Формиране на умения за прилагане на анализ и синтез при решаване на задачи по геометрия

Милушева-Бойкина Добринка Василева, доктор, доцент
Милушев Васил Борисов, доктор на педагогическите науки, професор,
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски", Пловдив, България

Резюме: Тази статия се явява продължение на нашата работа „Относно използването на методи и евристики при решаване на задачи от позициите на рефлексивно-синергетичния подход", публикувана в журнала Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. – Vol. II(14), Issue 27. – 2014. – P. 52-56. e-ISSN 2308-1996, p-ISSN 2308-5258, където са разработени теоретичните основи на разглежданата тема, които могат да служат като база за изграждане на съответна методика на обучение. В настоящата статия представяме конкретна реализация на съвременна методика за обучаване на прийоми на умствена дейност, които допринасят за развиване на евристични умения и рефлексивни способности при решаване на задачи по геометрия. Запознаването на учениците с общологически и частни методи за доказателство, а също и с евристични схеми за търсене и намиране на решения, се явява ефективно средство за самоорганизиране, самоуправление и саморегулиране на мисловната им дейност. Разработката е апробирана в учебната практика.

***Ключови думи**: умение, решаване на задачи, общологически методи – анализ и синтез, евристични схеми*

Въведение. Както сме посочили в [1], независимо от това, че съществуват доста публикации, свързани с обучението в решаване на задачи, този проблем продължава да е актуален, защото непрекъснато се развива и може да се изследва от различни позиции. Там са разработени главните теоретични постановки на разглежданата тема, които се основават на принципите на синергетиката [3]. Процесът обучаване в решаване на математически, най-вече неалгоритмични задачи се явява сложна, нелинейна, отворена динамична система, поради което неговата реализация има връзка с рефлексивно-синергетичния подход [4] и се базира на знания за общологическите и някои частни методи за доказване на твърдения.

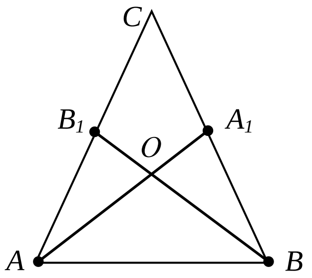
Целта на статията е да представим конкретна реализация на съвременна методика за формиране на умения за прилагане на общологическите методи анализ и синтез, включително и паралелното им използване, както и на някои частно-математически метози за решаване на неалгоритмични задачи по геометрия.

Изложение на основния материал. Ясно е, че този проблем е твърде сложен, няма еднозначно решение и зависи от подготовката на обучаваните и обучаващите както по отношение на фактическия материал, така и върху същността и особеностите на прилагане на различните методи за решаване на задачи. Ще отбележим, че многократните преходи от анализ към синтез и обратно, при паралелното, а още повече при съвместното им прилагане за търсене на решения на математически задачи, превръщат, по същество, паралелното и съвместното използване на анализа и синтеза в продуктивни евристични прийоми [5], които са частни случаи на известния прийом „анализ чрез синтез". Те са основно средство за обособяване на задачите-компоненти, решаването на които играе ключова роля за реализиране на решението на изходната задача. Много често задачите-компоненти се решават въз основа на частно-математически методи, овладяването на които позволява на решаващият задачата в доста случаи да използва синтетични разсъждения в голяма част от процеса на нейното решаване. Аналогично може да се каже, че ориентирането към използване на някои специални евристики [5] в много случаи се основава на изградени умения за аналитико-синтетична дейност. Поради посочените предимства на тези прийоми, тяхното овладяване се разглежда като главна цел на обучението, а развиването на умения за директно синтетично търсене на решение и паралелното прилагане на анализ и синтез подпомагат изпълнението на главната цел.

Ще отбележим, че при обучението на учещите субекти (ученици или студенти) една и съща задача съзнателно може да се използва както за илюстриране на приложението на различни общологически методи за решаване (директно прилагане на синтез; последователно прилагане първо на несъвършен анализ, а след това на синтез; възходящ анализ; метод на еквивалентност), така и с оглед по-явно и ясно да се откроят специфичните особености и различия между тях, а също и, за да се оцени кой метод е по-рационален в конкретния пример. Опитът показва, че това има силен рефлексивно-обучаващ ефект, тъй като допринася за формиране на рефлексивни способности. Във връзка с това ще посочим, че решаването, например, на задачата за доказване на неравенството на Коши чрез посочените по-горе методи превръща това неравенство в толкова популярно за учещите, че те го приемат като основно твърдение (задача-теорема) и могат да го използват наготово при решаване на разнообразни задачи. По този начин даже може да се обособи нов частен метод (основаващ се на неравенството на Коши) за решаване на задачи от определени видове, които могат да бъдат организирани в специални подсистеми с ефективна многофункционалност (затвърдяване на знанията и уменията за прилагане на един или повече общологически методи, на един или повече частно-математически методи, в т.ч. и обособения вече метод и др.).

В учебната практика запознаването на учениците с основните общологически методи анализ и синтез, както и с техните предимства и недостатъци, обикновено се извършва върху задачи за доказване на тъждества или неравенства от алгебрата. Това е приемливо, понеже в повечето случаи техните доказателства са подостъпни и лесно се изявяват позитивните и негативните им страни, както например при доказване на вече споменатото неравенство на Коши.

С оглед създаване на възможности учещите субекти да пренасят уменията си за извършване както на несъвършен, така и на възходящ анализ и при решаване на геометрични задачи (не само за доказване, но и за изчисление или построение) и, за да се убедят те, че за такива задачи използваният анализ дори може да се окаже по-продуктивен, е уместно задачите да се организират в система /**А**/, на която предназначението е овладяване на тези методи. В нея могат да се включат следващите задачи, тъй като те допускат решаване по различни начини, при всеки от които е приложима и схемата на Пап. От друга страна ще отбележим, че тези задачи, освен за овладяване на основните общологически методи, са подходящи и за вкарване в зоната на близкото развитие (ЗБР) на учещите на умението им да извършват по-сложната дейност – <u>паралелно прилагане на анализ и синтез</u>.



Черт. 1

Задача 1. Даден е равнобедрен триъгълник ABC (AC=BC). Ако $tg\gamma = \frac{3}{4}$, където $\gamma = \angle ABC$ (черт.1), да се докаже, че медианите AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) са взаимно перпендикулярни.

Тъй като тази задача е първа от разглежданата система, при решаването на която се използва паралелното прилагане на анализ и синтез, то методическата работа по търсене на нейно решение с ученици е подходящо да се проведе по следния ***план***:

1. <u>Актуализиране</u> знанията за ключовите елементи от теоретичния базис на задачата – формулата за медиана в триъгълника, косинусовата теорема, характеристичните свойства на понятието правоъгълен триъгълник. Също така трябва да се припомнят и знания за метода на параметризацията.

2. <u>Ориентиране</u> към подходящ вариант на прилагане на аналитико-синтетични разсъждения при търсенето на решение. За целта е полезно да се конструира схема като тази на фиг. 1, с което се обособяват и обектите на мисловната дейност.

синтез

<u>**Дадено**</u>:
ΔABC – равнобедрен
AA_1 и BB_1 – медиани
$tg\angle ACB=\frac{3}{4}$
(фиг. 1)

Могат да се **параметризират до подобие фигурите**:
– ΔABC
– ΔABA_1 (ΔABB_1)
– ΔAA_1C (ΔBB_1C)
– ...

Достатъчно е да се **параметризират до еднаквост или до подобие чрез характеристични свойства на правоъгълен триъгълник**:
– ΔAOB (ΔA_1OB_1)
– ΔAOB_1 (ΔBOA_1)
и др.

анализ

<u>**Изискване**</u>:
Да се докаже, че $AA_1 \perp BB_1$

Фиг. 1. Разсъждения на паралелно прилагане на синтез и анализ

От схемата се забелязва, че трудно може само чрез синтез да се стигне от даденото в задачата до изискването, а също и само чрез анализ да се стигне от изискването до даденото, т.е. като че ли в случая не е целесъобразно да се използва само един от посочените варианти на прилагане на анализ или синтез. Затова е целесъобразно да се използва друг вариант за търсене на решение, например, паралелното прилагане на анализ и синтез.

3. <u>Детайлизиране</u> на етапите и стъпките на процеса на търсене на решение от гледна точка на очерталия се, в предходния етап, вариант на прилагане на основните общологически методи.

За тази задача е характерно, че в хода на прилагане на тези методи се продуцира допълнителна информация, въз основа на която възникват в "движение" нови идеи за търсене на решение.

Доказателството, че медианите AA_1 и BB_1 са взаимно перпендикулярни може да се реализира по два различни начина. При единия начин е достатъчно да се параметризира до еднаквост ΔAOB, а при другия – ΔAOB_1 (или ΔBOA_1). Тук представяме, при това <u>схематично</u>, откриването на решението на задачата само по първия начин при паралелно прилагане на възходящ анализ и синтез.

Решение **(по първи начин)**. За краткост, представяме схематично само резултата от проведената (с наша помощ) аналитико-синтетична дейност от обучаваните субекти (студенти и/или ученици).

Възходящ анализ – I стъпка: $AA_1 \perp BB_1 \Leftarrow \angle AOB=90° \Leftarrow AB^2 = AO^2 + BO^2$ (където O е пресечната точка на медианите).

Синтез – I стъпка: От AA_1 и BB_1 – медиани $\Rightarrow$ $AO = \frac{2}{3}AA_1$, $BO = \frac{2}{3}BB_1$, $AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+a^2}$ и $BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+a^2}$ (където a е бедрото, а c е основата на ΔABC) $\Rightarrow AO = \frac{1}{3}\sqrt{2c^2+a^2}$ и $BO = \frac{1}{3}\sqrt{2c^2+a^2}$.

Възходящ анализ – II стъпка:
$AB^2 = AO^2 + BO^2 \Leftarrow c^2 = \frac{1}{9}(2c^2+a^2) + \frac{1}{9}(2c^2+a^2)$ $\Leftarrow 9c^2 = 4c^2 + 2a^2 \Leftarrow 5c^2 = 2a^2$.

Синтез – II стъпка:
От $tg\gamma = \frac{3}{4} \Rightarrow cos\gamma = \frac{4}{5}$, а по косинусовата теорема – $c^2 = 2a^2 + 2aa\frac{4}{5} \Rightarrow 5c^2 = 2a^2$.

С оглед създаване на условия за развиване на рефлексивните им способности, предлагаме на обучаемите да сравнят направените дотук разсъждения с разсъжденията, които се извършват при решаване на алгебричната задача: „Да се докаже, че ако $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$, то a = b = c" и да изявят съществуващите прилики и разлики между тях. /Тук отваряме една скоба, за да споменем, че тази задача е решавана от тях по-рано чрез прилагане както на несъвършен анализ (по схемата на Евклид), така и чрез възходящ анализ (по схемата на Пап), а след това, въз основа на аналитичните разсъждения, са оформяли решението синтетично./ С наша помощ те отбелязваг, че сега при тази геометрична задача за откриването на решение трудно може да се приложи само анализ или само синтез. Иначе казано, тук се прилага ту анализ, ту синтез, поради което, за да е възможно оформяне на синтетично решение, трябва, проследявайки съответните символи за по-кратко записване (⇒ и ⇒), да е възможна, в крайна сметка, някаква „среща" на аналитичните и синтетичните разсъждения. Тъй като в представените по-горе разсъждения тази „среща" е налице, може да се направи следното

4. Синтетично оформяне на решението.

От $tg\gamma = \frac{3}{4}$, $tg\gamma = \frac{sin\gamma}{cos\gamma}$ и $sin^2 + cos^2 = 1 \Rightarrow cos\gamma = \frac{4}{5} \Rightarrow c^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow 5c^2 = 2a^2 \Rightarrow 9c^2 = 4c^2 + 2a^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + a^2) + \frac{1}{9}(2c^2 + a^2)$.

От друга страна, тъй като AA_1 и BB_1 са медиани, то са изпълнени равенствата $AO = \frac{2}{3}AA_1$, $BO = \frac{2}{3}BB_1$, $AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + a^2}$ и $BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + a^2}$.
Следователно $AO = \frac{1}{3}\sqrt{2c^2 + a^2}$ и $BO = \frac{1}{3}\sqrt{2c^2 + a^2}$ $\Rightarrow AO^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + a^2)$ и $BO^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + a^2)$.

От последните две равенства и равенството $c^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + a^2) + \frac{1}{9}(2c^2 + a^2)$ следва, че е изпълнено $AB^2 = AO^2 + BO^2 \Rightarrow \Delta ABO$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха $O \Rightarrow AA_1 \perp BB_1$.

Задачата е решена.

В контекста на идеята за „окрупнените теоретични единици" (по Ердниеви), а също с оглед развиване на умения за самоосъзнаване (интелектуални рефлексивни умения) и самоорганизация, в етапа Е4 „Поглед назад" от методиката за решаване на задачи [2] предлагаме на учещите да се състави, колективно, и да се реши задача, обратна на горната. Тук ще посочим една от съставените обратни задачи и нейно решение, основаващо се на общата й информация.

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC=BC$). Ако медианите AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) са взаимно перпендикулярни, да се намери $cos\gamma$, ($\gamma = \angle AOB$).

Решение. От $AA_1 \perp BB_1 \Rightarrow \angle AOB = 90° \Rightarrow AB^2 = AO^2 + BO^2$ (където O е пресечната точка на медианите). Понеже AA_1 и BB_1 са медиани $\Rightarrow AO = \frac{2}{3}AA_1$, $BO = \frac{2}{3}BB_1$, $AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + a^2}$ и $BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + a^2}$. (където a е бедрото, а c е основата на ΔABC) $\Rightarrow AO = \frac{1}{3}\sqrt{2c^2 + a^2}$ и $BO = \frac{1}{3}\sqrt{2c^2 + a^2} \Rightarrow AO^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + a^2)$ и $BO^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + a^2)$.

Тогава от равенството $AB^2 = AO^2 + BO^2$ се получава $5c^2 = 2a^2$. Като се използва този резултат и косинусовата теорема за ΔABC, се намира $cos\gamma = \frac{4}{5}$.

В същия етап Е4 се коментира и въпросът може ли да се решат тези две задачи с използване на основната информация в тях – дадените елементи във всяка от задачите определят разглежданата фигура до релация подобност. Изтъкна се, че и при двете задачи може да се приложи методът на параметризация, като се въведе подходящ линеен параметър. Но докато при задача **1** такъв се явява бедрото, защото чрез него лесно се изразяват всички елементи в триъгълника, то при задача **2** по-подходящо е за параметър да се избере отсечката $OA_1 = OB_1 = x$. Понеже методът на параметризация не е цел на разглеждане в тази статия, няма да представяме решенията на двете задачи чрез него. Разработен бе и трети начин за решаване на задача **2**, като се използва специфичната информация в нея, а именно фактът, че ΔABC е равнобедрен. Тогава, като се построи и третата медиана CC_1, следва, че тя същевременно е и височина, и ъглополовяща в триъгълника. Следователно $tg\frac{\gamma}{2} = \frac{AC_1}{OC_1}$. Но $AC_1 = OC_1$, затова $tg\frac{\gamma}{2} = \frac{AO}{CC_1} = \frac{1}{3}$. От тук и формулата $cos\gamma = \frac{1 - tg^2\frac{\gamma}{2}}{1 - tg^2\frac{\gamma}{2}}$ се получава $cos\gamma = \frac{4}{5}$.

Повечето обучаеми окачествяват този начин като по-рационален.

В етап Е4 се разглежда и четвърти начин за решаване на задача **2**, основаващ се на векторния апарат. Тук е удобно да се избере векторна база, съставена от векторите $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$, понеже скаларното им произведение съдържа $cos\,\gamma$. Без ограничение на общността, може да се приеме, че базисните вектори са единични. Чрез тях се изразяват векторите $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$, след което се използва, че скаларното произведение на последните е равно на нула, тъй като те са перпендикулярни. От полученото равенство се намира $cos\gamma = \frac{4}{5}$.

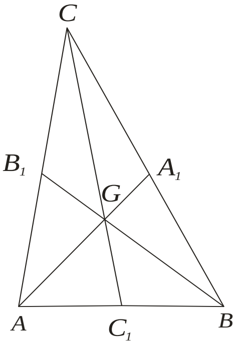
Заслужава да се отбележи, че векторният метод може да се приложи и за решаване на задача **1**.

С обучаемите се обсъжда и въпросът кой от разгледаните начини за решаване на задачите е по-рационален, което също съдейства за развиване на техните рефлексивни способности.

С оглед поддържане на уменията за прилагане на общологическите методи в ЗБР, е уместно да се провежда аналогична работа и с други сходни задачи (които тук няма да описваме). Тук ще се спрем на методиката на обучение на тези методи и в рамките на зоната на актуалното развитие (ЗАР) на учещите, като за целта ще разгледаме един представител на съответната подсистема /**Б**/ от задачи.

Задача 3. Ако a, b и c са страните на триъгълник ABC и те удовлетворяват равенството $a^2+b^2=5c^2$, да се докаже, че медианите му AA_1 и BB_1 са взаимно перпендикулярни.

Методически коментарии, свързани с етапи Е1 и Е2 от методиката за решаване на задачи [2]. Обикновено в началния етап от търсенето на решение на дадена задача проблем за учениците се оказва изборът на общологически метод, чрез който тя да бъде „атакувана". При начална обработка на инфор-мацията в задача **3** се забелязва, че много трудно би се открило решение чрез директно прилагане на синтез, тъй като не е ясно как да се използва даденото равенство $a^2+b^2=5c^2$. От друга страна, съществуват сравнително много признаци за перпендикулярност на две прави, както и следствия от твърдението, че две прави са взаимно перпендикулярни, поради което при избора на аналитичен метод е за предпочитане да се „върви напред" чрез схемата на Евклид, „хвърляйки" непрекъснато поглед към условието на задачата. Разбира се, би могло да се приложат и разсъждения по схемата на Пап, но тук, с оглед да се усъвършенстват уменията на учещите да използват схемата на Евклид, е целесъобразно те да се насочат да приложат несъвършен анализ.



Черт. 2

Несъвършен анализ. Да допуснем, че медианите AA_1 и BB_1 в ΔABC са взаимно перпендикулярни и G е пресечната им точка, т.е. G е медицентърът му (черт. 2). Тогава ΔABG е правоъгълен. Затова, ако се построи третата медиана CC_1 на ΔABC, то GC_1 се явява медиана към хипотенузата в правоъгълния ΔABG и значи $GC_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$.

От друга страна, от свойството на медицентъра следва, че $CC_1 = 3GC_1 = \frac{3c}{2}$. Така страните на ΔBCC_1 се изразиха чрез параметрите a и c и следователно е целесъобразно за него да се приложи косинусовата теорема

$$cos\beta = \frac{BC^2+BC_1^2-CC_1^2}{2\cdot BC\cdot BC_1} = \frac{a^2+\frac{c^2}{4}-\frac{9c^2}{4}}{4a\frac{c}{2}} = \frac{4a^2-8c^2}{4ac} = \frac{a^2-2c^2}{ac}$$

т.е.

$$cos\beta = \frac{a^2-2c^2}{ac} \qquad (1)$$

Аналогично, по косинусовата теорема за ΔABC следва, че

$$cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \qquad (2)$$

Тогава, съгласно равенства (1) и (2), е изпълнено $\frac{a^2-2c^2}{2ac} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \Rightarrow 2a^2-4c^2 = a^2+c^2-b^2 \Rightarrow a^2+b^2 = 5c^2$.

Сега вече става ясно как ще се оформи съответното решение чрез прилагане на синтез, но поради ограничения в обема на статията, тук няма да го описваме.

В етап Е4 „Поглед назад” първо се разисква въпросът за намиране на други решения на базата на други теоретични базиси. Някои ученици се ориентират към използване на формулата за медианата:

$AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, $\quad BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$,

свойството на медицентъра и факта, че ΔABG е правоъгълен. Тази идея те осъществяват, провеждайки последователно несъвършен анализ и синтез, каквато е и целта на разглеждане на задача 3. Подробното оформление на този анализ и синтез тук няма да представяме.

На следващо мято в етап Е4 се разглежда и въпросът дали е вярно обратното твърдение. С активно участие на учениците се формулира и аналогично се решава обратната задача на дадената, поради което се налага да се постави и изискването да формулират и задача, която да обединява тези две задачи. Уместно е да се постави и дидактическото задание: последната задача да бъде решена чрез възходящ анализ, с което за пореден път да бъдат осъзнати сходствата и различията между двата вида анализ. По такъв начин се осъществява богата комплексна дейност, включваща: решаване на задачата по няколко начина с използване на различни теоретични базиси, конструиране на обратни задачи и отново прилагане на използвания метод, а накрая, обединяване в синергетичен аспект [6] двете задачи в една, решаването на която по схемата на Пап се явява найестествено за учениците.

Накрая ще представим само условието на още една задача (давана на конкурсен кандидатстудентски изпит в България) от подсистемата /Б/: „Да се намерят острите ъгли на правоъгълен триъгълник, ако радиусите съответно на вписаната в него и описаната около него окръжности се отнасят както 2:5.”

Изводи. Реализирането на такава комплексна дейност с многократно прилагане на схемата на Евклид, при една и съща геометрична ситуация или при различни ситуации, както и на схемата на Пап, а също и паралелното прилагане на анализа и синтеза, допринася съществено за понататъшно самоусъвършенстване на уменията на обучаемите за разсъждения по тези схеми и вкарването им в тяхната зона за актуално развитие (ЗАР). Всичко това е предпоставка за подейно и самостоятелно участие на учещите при решаването и на други задачи от подсистемата /Б/.

Благодарност. Изследванията са направени с финансовото съдействие на фонд „Научни изследвания” при ПУ „Паисий Хилендарски”. Договор на проект НИ15-ФМИ-004.

ЛИТЕРАТУРА

1. Милушева-Бойкина, Д.В., Милушев, В.Б. Относно използването на методи и евристики при решаване на задачи от позициите на рефлексивно-синергетичния подход. // Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. – 2014. – Vol. II(14), Issue 27. – P. 52-56. e-ISSN 2308-1996, p-ISSN 2308-5258.
2. Милушев, В., Д. Бойкина. О методике решения задач школьного курса математики. // Вісник Черкаського університету ім. Богдана Хмельницького Серія Педагогічні науки. – Вип №8 – Черкаси. – 2013 – С. 95-107.
3. Милушев, В.Б. Принципы синепгетики и их конкретизация при обучении математике. // Didactics of mathematics: Problems and Investigations. – n. 32. – Donetsk. – 2009. – С. 7-15.
4. Милушев, В.Б. Рефлексивно-синергетичен подход в обучението. // Научни трудове на ПУ „Паисий Хилендарски”. – т. 45. – кн. 2. – Методика на обучението. – 2008. – С. 43-53.
5. Скафа, Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. – Донецк. – 2004. – 439 с.
6. Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience. – Sofia. – 2007. – 295 p.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Milusheva-Boikina, D.V., V.B. Milushev. About Using Methods and Heuristics in Solving Problems from the Perspective of Reflexive-synergetic Approach. // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. – Vol. II(14), Issue 27. – 2014. – P. 52-56. e-ISSN 2308-1996
2. Milushev, V., D. Boikina. About the Methodics of Solving Problems from the School Course in Mathematics // Bulletin of Cherkasy University n.a. Bogdan Hmelnitsky, Pedagogical sc. – Vol. № 8 (261). – Cherkasy. – 2013. – P. 95-107.
3. Milushev, V.B. Principles of Synergetics and Their Concretization in Teaching Mathematics // Didactics of mathematics:

Problems and Investigations (International Collection of Scientific Works). – n. 32. – Donetsk. – 2009. – P. 7-15.
4. Milushev V. A Reflexive-synergetic approach in the Education // Nauchni trudove na PU “Paisii Hilendarski”. – T. 45. – kn. 2. – Metodika na obuchenieto. – 2008. – S. 43-53.
5. Skafa, E.I. Heuristic Education in Mathematics: Theory, Methodology, Technology. – Doneck: Publ. DonNU. – 2004. – 439 p.

Millousheva-Boykina D.V., PhD & Milloushev V.B., DSc.

Forming Skills for the Application of Analysis and Synthesis in Solving Problems in Geometry

Abstract. The article is a continuation of our work „About Using Methods and Heuristics in Solving Problems from the Perspective of Reflexive-synergetic Approach”, published in the magazine Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. – Vol. II(14), Issue 27. – 2014. – P. 52-56. e-ISSN 2308-1996, p-ISSN 2308-5258, where we have worked out the theoretical bases of the theme, which can be used as a base for the elaboration of methodic of education for solving problems. In the present paper we suggest a certain realization of modern methodic for education of students in methods of intellectual activity, which contribute to the development of theuristics skills and reflexive abilities in students in solving problems in geometry. The acquaintance of students with heuristics schemes for looking for and finding out solutions, as well as the knowledge of generally logical and private methods for proof are effective means for self-organization, self-government and self-regulation of the thinking activity of students. This elaboration is piloted in the educative practice.

Keywords: *skill, solving problems, generally logical methods – analysis and synthesis, heuristics*

Милушева-Бойкина Д.В., Милушев В.Б.

Формирование умений для применения анализа и синтеза при решении задач по геометрии

Аннотация: Эта статья является продолжением нашей работы „Относно използването на методи и евристики при решаване на задачи от позициите на рефлексивно-синергетичния подход”, опубликованной в журнале Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. – Vol. II(14), Issue 27. – 2014. – P. 52-56. e-ISSN 2308-1996, p-ISSN 2308-5258, где разработаны теоретические основы рассматриваемой проблемы, которые могут послужить как база для построения соответствующей методики обучения. В настоящей статьи представлена конкретная реализация современной методики обучения прийомам умственной деятельности, которые способствуют развитию эвристических умений и рефлексивных способностей при решении задач по геометрии. Ознакомление учащихся с общелогическими или частными методами доказательства, а также с эвристи-ческими схемами для поиска и нахождения решения, является эффективным средством самоорганизации, самоуправления и саморегулирования их мыслительной деятельности. Разработка апробирована в учебной практике.

Ключевые слова: *умение, решение задач, общелогические методы – анализ, синтез, эвристические схемы*