

**Милушева-Бойкина Д. В., Милушев В.Б.**

## Изследване на дейността съставяне на учебни математически задачи

*Милушева-Бойкина Добринка Василева, доктор на педагогическите науки, доцент  
Милушев Васил Борисов, доктор на педагогическите науки, професор,  
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”, гр. Пловдив, България*

**Резюме.** Статията се явява продължение на нашата работа „Дейността ”съставяне” на математически задачи”, публикувана в журнала Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. 2013, Vol. 5, с. 23-28, където е разработен модел на съдържанието на дейността съставяне на математически задачи (ДСМЗ), който се явява и модел на нейната структура. В настоящата статия се представя изследване на ДСМЗ от различни теоретични позиции. Това изследване е направено от следните гледни точки: модела на А.А. Столяр за математическата дейност, който се разглежда като „надмодел” на модела на ДСМЗ; „ситуационния подход и елементарните стъпки” (Л.М. Фридман); „теорията на умствените действия” (Н.Я. Галперин, Н.Ф.Тализина); „евристични елементи от правдоподобен тип” (Д. Пойа, В.Н. Пушкин, Е. Скафа и др.); „прогнозирането” (А.В. Брушлински, П.Д. Петров, В. Милушев и др.); дейността решаване на математически задачи; теорията за трите звена на действието (Р. Трашлиев); модела за „окупнените дидактически упражнения” (П. М. Ердниев и Б. П. Ердниев).

**Ключови думи:** изследване, модел, дейността съставяне на математически задачи.

**Въведение.** В статията [4] разработихме модел на дейността съставяне на математически задачи (ДСМЗ), който представлява същевременно и модел на нейната структура, тъй като са показани и връзките между неговите компоненти – етапи и подетапи. Както посочихме там (поради ограничения в обема на статията), в отделна публикация ще направим допълнително детайлизиране на посочения модел, разглеждайки го от различни позиции. Това осъществяваме в настоящата статия.

**Целта** на тази статия е да представим изследване на дейността съставяне на математически задачи от различни актуални теоретични гледни точки.

**Изложение на основния материал.** За реализиране на тази цел ще съпоставим ДСМЗ с различни модели на други дейности, подходи или теории, разработени от известни утвърдени учени.

1. Моделът на А.А. Столяр [12, 117] за **математическата дейност** включва три нейни аспекта: 1) математическо организиране на емпиричен материал (МОЕМ), 2) логическо организиране на математически материал (ЛОММ), 3) приложение на теорията (ПТ). В резултат на задълбочено проучване на модела на А. Столяр може да се направи извод, че той се явява „надмодел” за модела на ДСМЗ. Съпоставяйки тези два модела, могат да се изляват следните връзки. Компонентите 1.3., 1.4. и 1.5. и отчасти 2.1 и 2.2.2. на модела на ДСМЗ могат да се отнесат към аспекта МОЕМ от модела на Столяр. Компонентите 3.1., 3.2., 3.3. и 3.4. имат връзка с втория аспект на математическата дейност – ЛОММ. Компонентът 2.2.3. и отчасти 2.1. кореспондират с третия аспект на математическата дейност – ПТ. Следователно моделът на ДСМЗ се „вписва” в модела на А.А. Столяр за математическата дейност.

2. Моделът на ДСМЗ може да се изследва от гледна точка на „ситуационния подход и елементарните стъпки”, посочени от Л.М. Фридман [15, 62] при решаване на задачи. В резултат на това могат да се очертаят два типа елементарни стъпки при дейността съставяне на задачи, а именно:

- елементарни стъпки, реализацията на които е достоверен извод;
- елементарни стъпки, реализацията на които е правдоподобен извод.

На практика при съставянето на система от задачи, излизайки от дадена „базова” задача, формулираните задачи имат хипотетичен характер. Някои от тях могат да се окажат верни твърдения (което трябва да се докаже), а други – неверни (за тях е достатъчно да се конструира поне един контра-пример).

3. Разглеждайки ДСМЗ като система от **умствени действия**, тя може да бъде детайлизирана и от гледна точка на „теорията на умствените действия” (Н.Я. Галперин [2] и Н. Ф. Тализина [13]). Операциите (елементарните стъпки на умствените действия), с които се осъществява ДСМЗ, се разчленяват на три групи: *ориентировъчна, изпълнителска, контролно-коригираща*. Операциите от първата група (ориентировъчните) се реализират предимно чрез етап 1., подетап 2.2.2. и отчасти – чрез подетап 2.1. от модела на ДСМЗ. Изпълнителските операции се реализират предимно в етап 2 с акцент в подетап 2.2.3. Контролните операции се осъществяват и в етап 2., но най-вече в целия етап 3. При това контролно-оценъчните и коригиращите действия са задължителни при оценяването на коректността на съставените задачи от логическа, математическа и съдържателна гледни точки.

4. Моделът на ДСМЗ, като отнасящ се и до дейност по изпълнение на дидактически задания, е целесъобразно да се изследва и от гледна точка на „евристични елементи от правдоподобен тип” (Д.Пойа [9], В.Н.Пушкин [10], Е.Скафа [11]). При съставянето на задачи по принцип се търси изход от проблемна ситуация, при което субектът „е принуден да създаде нова, неизвестна преди това стратегия за своята дейност, т.е. да извърши творчески опит”[10, 4]. Психическият процес при разрешаване на проблемна ситуация се разглежда от редица автори като евристична дейност. В процеса на съставяне на задачи, както и във всяка дейност, в която преобладават евристични компоненти, субектът често издига хипотези, които в една или друга степен трябва да се подкрепят чрез „правдоподобни” разсъждения. За представения тук модел също може да се направи извод, че в ДСМЗ, от гледна точка на характера на нейните компоненти, преобладават стратегии от евристичен тип.

5. Моделът на ДСМЗ е уместно да бъде изследван и от гледна точка на „*прогнозирането*” (А.В. Брушлински [1], Б.С. Гершунски [3], П.Д. Петров [7] и др.). На базата на тези и други изследвания, а също и въз основа на рефлексията на нашия собствен опит, с П.Д. Петров (аспирант на В. Милушев) сме изяснили мястото и ролята на прогнозирането при решаване на математически задачи, както и основните прогностични функции на методите за решаване. Освен това П. Петров е конструирал „*евристична схема*” [8] за търсене на решения на планиметрични задачи. При съпоставката на тази евристична схема с модела на ДСМЗ, отнасящ се специално за съставяне на задачи, при което се използва като източник базова планиметрична задача, може да се изтъкне, че осъществяването на подетапите 2.2.1., 2.2.2. и 2.2.3. от модела на ДСМЗ има връзка с „образуването на множество от идеи за решаване” – компонент от етап 3 на „евристичната схема”, а целият етап 3 от модела на ДСМЗ – с „оценката на възникналите идеи и избор на опорна идея”, което е следващия компонент на етап 3 от „евристичната схема”. От друга страна, при работата с правдоподобни твърдения и оценяването на полученото множество от задачи при етап 3. от модела на ДСМЗ е характерно следното: опериране, предимно в явен вид, с правдоподобни твърдения; наситеност с контролно-оценъчни действия при оценка на множеството от задачи; използване на индуктивни методи на познание, които имат висок евристичен и прогностичен потенциал; съставянето на множество от задачи е цел; пълноценно опериране с правилата за извод и създаване условия за тяхното изучаване в явен вид.

6. В училищния курс по математика *дейността решаване* на математически задачи (ДРМЗ) [5] е „първообразна” дейност, а ДСМЗ е „производна”, обслужваща първата. Поради основната роля, която играе ДСМЗ (разглеждана като средство) за усъвършенстване на работата с учебните математически задачи, не са редки случаите, когато в задължително избираемата подготовка (ЗИП), свободно избираемата подготовка (СИП), както и в школа по математика, формирането на умения за съставяне на математически задачи се явява и цел на обучението (тъй като, за да бъде тя средство, преди това трябва да бъде цел на обучението), като сега ДСМЗ се явява първообразна, а ДРМЗ – производна дейност, понеже решаването се явява съставна част в етап 3 „Изследване на съставените математически задачи” Трябва да се има пред вид, обаче, че при всеки от тези случаи целта на извършването на двете дейности е усъвършенстване на методиката за развиване на умения за осъществяване на първостепенната дейност решаване на задачи. Всичко това показва, че тези основни дейности с математически задачи са свързани помежду си и в много голяма степен се преплитат. За конкретност и нагледност, тези взаимни връзки илюстрираме чрез схемата на фиг. 1.

Ще отбележим, че изискването да се състави математическа задача е също задача. В този смисъл част от модела на ДСМЗ в голяма степен съответства на съдържанието на процеса решаване на задачи. Тази връзка се забелязва и в схващането за дейността

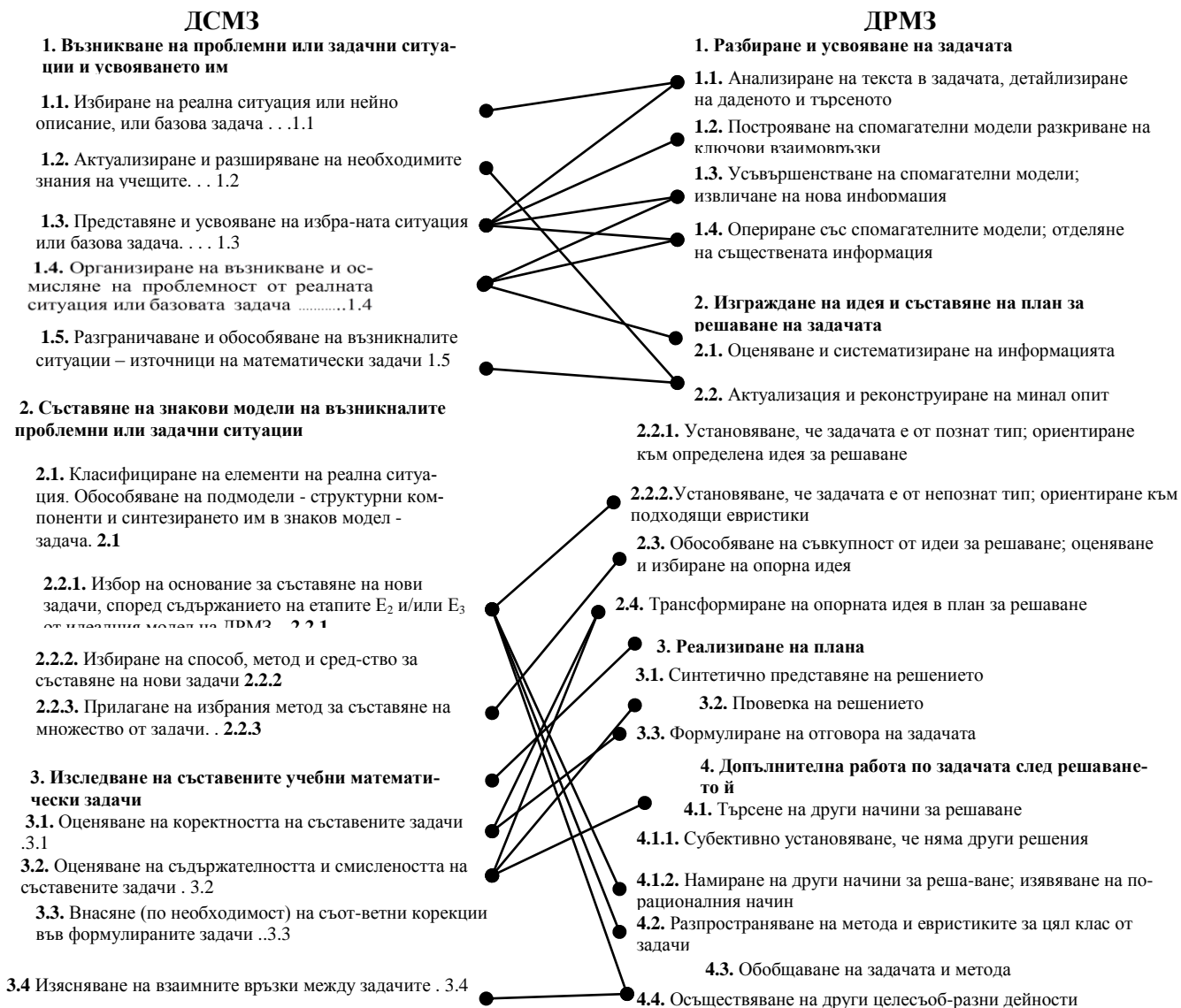
съставяне на задачи, описана в технологичен план от С. Гроздев в [17], която, в известен смисъл, може да се отъждестви с някои важни технологични аспекти на дейността решаване на задачи. Действително, на практика при съставяне на задачи обикновено се тръгва от някаква идея (вариране на условието или заключението на изходна „базова” задача, обобщение или конкретизация, разглеждане на конкретна конфигурация или ситуация и пр.), пробва се избраната идея, констатира се евентуални грешки в началните предположения, правят се съответни промени или се изоставя началната идея, избира се нова, пак се пробва и, ако отново се стигне до „задънена улица”, пак се изоставя и с още по-голям опит се търси нова идея, докато в крайна сметка се стигне до търсената оригинална задача. „Успехът от тази дейност донася удоволствие и радост. Активността е гарантирана и учениците – автори получават нов допълнителен стимул за усъвършенстване.” [17, 85]. Последната констатация за пореден път потвърждава извода, че съставянето на задачи от учещия допринася за развиване на уменията му за решаване на задачи, както в методически, така и в психологически план – тъй като спомага съществено, най-вече, за създаване на траен интерес към работата със задачи.

7. Теорията за трите звена на действието, обособени от Р. Трашлиев в [14] при *функционалния анализ* на задачата (разглеждана в широк смисъл), и изводите, направени там, ще съотнесем към системата ДРМЗ – ДСМЗ (виж фиг.1), разглеждайки я в синергетичен план. Решаването на задача, по същество, е преработване на информация, което може да се осъществи по различни начини. Преработването на информацията чрез използване на *правила* (независимо дали са дадени в готов вид или трябва да бъдат намерени самостоятелно) прокарва пътя от даденото до търсеното, т.е. оформя решението на задачата. При прилагане на *правило* движението на информацията е еднопосочно – от входа към изхода, от даденото към търсеното (Работата по *правила* може да се сравни с използването на координатна система върху права). Всичко това дава основание, при прилагането на модела на ДРМЗ при работа с усвоен тип задачи, системата от неговите дейности да се разглежда на микроравнище. При извършването на „нов” тип действия, принадлежащи на модела на ДСМЗ, се оформя система от дейности, извършвани от обучаваните с помощта на обучаващия (разпредметяване), която може да се разглежда на макроравнище. При първоначално самостоятелно извършване на тези действия (опредметяване, екстериоризация) те могат да се разглеждат като компоненти на система на мегаравнище. При самостоятелно откриване на логически връзки (виж фиг.1) със системата от действия, принадлежащи на ДРМЗ (на микроравнище), на мястото на интериоризираните в зоната на близкото развитие (ЗБР) знания и умения за осъществяване на ДСМЗ се формират знания и умения в зоната на актуалното развитие (ЗАР), с помощта на които се извършват действия от система на ново макроравнище. Тези действия са на качествено ново ниво – извършват се

не само по правила, а и по **схема** – комплекс от взаимосвързани разнородни подсистеми от правила, която е по-сложна форма на преработване на информация. При нея информацията се систематизира и подрежда, което осигурява по-висока степен на нейното съхранение. **Схемата** има двумерен характер. При нея движението на информацията е и в права, и в обратна посока – както от даденото към търсеното, така и обратно. Именно тези особености на

обработването на информация по **схема** са характерни за съставянето на задачи. (Действията по **схема** могат да се сравнят с използване на координатна система в равнината). Същевременно работата със схеми предполага прилагане и на правила, т.е. за субекта, съставящ задачата, решаването на същата е лесно. (Този, който може да работи с координатна система в равнината, той може да работи и с координатна система върху права).

Съпоставка на ДСМЗ с ДРМЗ



Фиг. 1.

В процес на поддържане в ЗАР на действията от модела на ДСМЗ (отнасящи се до определен тип задачи), те могат да се разглеждат вече като елементи на система на микроравнище. При подходяща образователна среда в контекста на рефлексивно-синергетичния подход [6] би могло да се създаде ситуация за овладяване на знания и умения на по-високо равнище, свързани не само с решаване и съставяне на задачи, но и с рефлексивни умения с оценъчно-контролен характер. За целта учещите

могат да бъдат доведени до потребност от възприемане на система от знания и умения, свързани с изграждане и прилагане на подходящи адекватни **критерии** за оценяване. Това може да се осъществи на базата на установяване на връзки на чужди подходи и методи за работа със задачи със своите собствени. Например чрез обсъждане на групови самостоятелни работи, реферати и др., свързани с дейностите ДРМЗ и ДСМЗ, учещите биха могли да боравят със система от такива знания и умения на

мегаравнище, които впоследствие да бъдат свързани със съответните им знания на микроравнище. Преобразуването и асимилирането на информация по определени **критерии** е най-сложната форма на преработване на информация. При такава обработка на информацията може да се прави преценка на извършени разсъждения, както и да се прогнозира следващи, бъдещи разсъждения. Това е така, защото **критерият** е основа за извършване на оценка, на анализ на формулирани, преформулирани, решени, съставяни задачи (Работата с **критерии** може да се сравни с използването на координатна система в пространството). Прилагането на критерии, от своя страна, предполага използване и на схеми, и на правила, т.е. този, който има критерии за анализ, може и да съставя, и да решава задачи (Този, който умее да използва координатна система в пространството, той умее да работи с координатна система и в равнината, и върху права). Следователно умението за оценяване на задачи включва и умението за съставяне на задачи, а последното умение включва и умения за решаване. Ще отбележим, обаче, че на практика тази дейност е подходяща при обучаване на студенти – математици.

8. Усвояването и затвърдяването на математическите знания в училище и придобиването на умения за тяхното прилагане се осъществява в процеса на изпълнение на целенасочени упражнения. Теоретически и практически П.М. Ердниев и Б.П. Ердниев [16] са обосновали необходимостта от системно използване на тъй нар. от тях „**окупнени дидактически упражнения**”. Те разглеждат математическото упражнение като основна клетка на обучението по математика в училищния курс. Авторите развиват идеята, че основна форма на упражнението трябва да бъде „многокомпонентното задание, образувано от няколко логически разнородни, но психологически стиковани в някаква цялост части” [16, 19]. В своя модел Ердниеви включват следните последователни части в едно окупнено упражнение, осъществявано в един урок:

- а) решаване на традиционно „готова” задача;
- б) съставяне обратна задача и нейното решаване;
- в) съставяне аналогична задача по дадена формула или уравнение и решаването му;
- г) съставяне задачи по някои елементи, общи с изходната задача;
- д) решаване или съставяне на задача, обобщена по един или друг параметър.

#### ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Брушлинский, А. В. Мышление и прогнозирование. – М.: „Мысль”. – 1979. – 168 с.  
*Brushlinskii, A.V. Mishlenie i prognozirovanie [Thinking and Predicting]. – Moskva. – 1979. – 168 s.*
2. Гальперин, П.Я. Основные результаты исследования по проблеме „Формирование умственных действий и понятий”. – М.: „Педагогика”. – 1965. – 176 с.  
*Galperin, P.Y. Osnovnie rezultati issledovanya po probleme "Formirovanie umstvennykh deystviy i ponyatiy" [Basic Results from the Investigation of the problem "Forming Mental Activities and Concepts"]. – Moskva: „Pedagogika”. – 1965. – 176 s.*
3. Гершунский Б. С. Педагогическая прогностика. – Киев: „Вища школа”. – 1986. – 202 с.  
*Gershunskii B.S. Pedagogicheskaya prognostika [Pedagogical prognostic]. – Kiev. – 1986. – 202 s.*

ДСМЗ може да бъде разгледана и от гледна точка на **модела** на **Ердниеви**. При съпоставката на последния с модела на ДСМЗ, се установява, че той преобладава в неговото съдържание. Така например, посочената по-горе точка а) е в тясна връзка с подетапите 1.2., 1.3., 1.4. и 1.5., а останалите подточки (б – д) кореспондират с подетапи 2.2.1., 2.2.2. и 2.2.3., а също, в известна степен, и с целия етап 3. на модела на ДСМЗ. Това показва, че чрез ДСМЗ може да се изграждат окупнени упражнения, при които да се използват пълноценно възможностите на оперативната памет на учащия субект. Чрез упражнения от този вид се реализира икономия на ценно учебно време. При съчетано осъществяване на дейностите съставяне и решаване на математически задачи се усвоява във взаимовръзка метода на познание „анализ чрез синтез”.

**Изводи.** Макар и кратко, изследването на ДСМЗ изяснява важни нейни характеристики и най-вече дидактическото ѝ значение. Като поставяме акцент в съдържанието на ДСМЗ върху „изследването на знаковия модел” и върху получаването на множество от задачи, искаме да обърнем внимание на следното.

Първо – тези задачи в голяма степен са свързани помежду си и следователно чрез подходящ подбор на задачи от това множество могат да се създават условия за усвояване на сложна ситуация, за която съществуват различни варианти за допълване, изменение и проблематизиране. По този начин е възможно да се съставят съответни дидактически системи от учебни задачи за целенасочено формиране на общи умения, от гледна точка на системния и рефлексивно-синергетичния подход.

Второ – в случая, когато като източник за съставяне на задачи се използва определена базова задача, ДСМЗ може да се окаже като „преобразуване” на изходната задача, което се разглежда като начин, средство за съставяне на задачи. То също води до усъвършенстване на методиката за развиване на умения за решаване на математически задачи.

Изследването на тези проблеми е важно за методическата наука и практиката на обучението по математика.

**Благодарност.** Изследванията са направени с финансовото съдействие на фонд „НИ” при ПУ „Паисий Хилендарски”. Договор на проект НИ13ФМИ-002/19.03.2013

4. Милушева-Бойкина, Д.В., В.Б. Милушев. Дейността „съставяне” на математически задачи. // Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. – 2013. – Vol. 5. – P. 23-28.  
*Milusheva-Boikina, D.V., V.B. Milushev. Deinostta "sastavyane" na matematicheski zadachi [The Activity of "Creating" Mathematical Problems]. // Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. – 2013. – Vol. 5. – P. 23-28.*
5. Милушев, В., Д. Бойкина. О методике решения задач школьного курса математики. // Вісник Черкаського університету ім. Богдана Хмельницького, Серія Педагогічні науки. – Вип №8 – Черкаси. – 2013 – С.95-107  
*Milushev, V., D. Boikina. O metodike reshenya zadach shkolnogo kursa matematiki [About the Methodics of Solving*

- Problems from the School Course in Mathematics]. // *Visnik Cherkaskogo universitetu im. Bogdana Hmel'nitskogo, Serya Pedagogichni nauki*. – Vipusk № 8 (261). – Cherkasi. – 2013. – S. 95-107.
6. Милушев, В. Б. Рефлективно-синергетичен подход в обучението. // Научни трудове на ПУ „Паисий Хилендарски“. – т. 45. – кн. 2. – Методика на обучението. – 2008. – С. 43-53.
7. Петров, П. Д. Дидактически аспекти на прогнозирането при търсене на решения на математически задачи. Автореферат. – С., 1996.
8. Петров, П. Д. Евристична схема за откриване на решения на планиметрични задачи. – Ст. Загора – 1993.
9. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – 2 изд. – М.: „Наука“. – 1975. – 576 с.
10. Пушкин, В.Н. Евристика – наука за творческото мислене. – С.: „Наука и изкуство“. – 1968. – 183 с.
11. Скафа, Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. – Донецк. – 2004. – 439 с.
12. Столяр, А.А. Педагогика на математиката. – С.: „Народна просвета“. – 1976. – 408 с.
13. Талызина, Н.Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся. М.: „Знание“, 1983, 96 с.
14. Трашлиев, Р. Задачата (Психолого-педагогически проблеми). – София. – 1989. – 155 с.
15. Фридман, Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. – М. „Педагогика“. – 1977.
16. Эрдниев, П. М., Б. П. Эрдниев. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике. Книга для учителя. – М.: „Просвещение“. – 1986. – 225 с.
17. Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience. – Sofia. – 2007. – 295 p.

**Millousheva-Boykina D. V., Milloushev V. B., Investigation of the Activity of “Creating” School Mathematical Problems**

**Abstract.** The present paper is a continuation of our article „The Activity of “Creating” Mathematical Problems”, published in Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. 2013, Vol. 5, c. 23-28, where a model of the content of the activity of creating mathematical problems (ACMP) is developed, which model represents also a model of its structure. In the following paper we present an investigation of ACMP from different theoretical views. The investigation is made from the following points of view: the model of A. Stolyar about the mathematical activity, which is considered as an “upper model” of the model of ACMP; “the situational approach and the elementary steps” (L. Fridman); “the theory of mental actions” (N. Galperin, N. Talizina); “the heuristic elements believable type” (D. Poya, N. Pushkin, E. Skafa, etc.); “the forecasting” (A. Brushlinski, P. Petrov, V. Millousev, etc.); the activity of solving mathematical problems: the theory of the three units of action (R. Trashliev); the model about “the consolidated didactic exercises” (P. Erdniev and B. Erdniev).

**Keywords:** investigation, model, the activity of creating mathematical problems.

**Милушева-Бойкина Д.В., Милушев В.Б. Исследование деятельности составления учебных математических задач**

**Анотация.** Эта статья является продолжением нашей работы „Деятельность ”составяне” на математически задачи”, опубликованной в Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. 2013, Vol. 5, c. 23-28, где разработана модель содержания деятельности составления математических задач (ДСМЗ), которая является и моделью ее структуры. В настоящей статье представлено исследование этой деятельности с разных точек зрения. Это исследование сделано со следующих теоретических позиций: модели А. Стояра о математической деятельности, которую рассматриваем в качестве „надмодели” модели ДСМЗ; „ситуационного подхода и элементарных шагов” (Л.М. Фридман); „теории умственных действий” (Н.Я. Гальперин, Н.Ф. Талызина); „эвристических элементов правдоподобного типа” (Д. Пойа, В.Н. Пушкин, Е. Скафа и др.); „прогнозирования” (А.В. Брушлинский П.Д. Петров, В.Б. Милушев и др.); деятельности решения математических задач; „теории трех звеней действия” (Р. Трашлиев); модели „окрупненных дидактических упражнений” (П. М. Эрдниев и Б. П. Эрдниев).

**Ключевые слова:** исследование, модель, деятельность составления математических задач.