

**Мельник В., Бліндер Ю., Мендель В.**

**Математичний формалізм трансформації радіоекологічного стану території із застосуванням матриць Маркова і РЕМ-мікроскопії**

*Мельник Володимир Миколайович, професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри  
Бліндер Юрій Степанович, кандидат технічних наук, доцент  
Мендель Вадим Павлович, Інженер  
кафедра геодезії, землевпорядкування та кадастру  
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк, Україна*

**Анотація.** Розглянуті із загальних математично-формалістичних позицій питання трансформації в часі радіоекологічного стану враженої території. Показано, що подібні трансформації відповідають марковським процесам, які пропонується характеризувати матрицями Маркова. Дано прогнозний алгоритм у вигляді системи матричних рівнянь калманівського типу. Пропонується інтегрована радіоекологічна оцінка із застосуванням сучасної РЕМ-мікроскопії.

**Ключові слова:** радіоекологія, прогнозування, матриці Маркова, РЕМ-мікроскопія

**Вступ.** Внаслідок міграції радіонуклідів (РН), які потрапили в ґрунт, відбувається їх перерозподіл як у глибину ґрунту, так і горизонтально, що є причиною надходження їх у рослини, у ґрунтові води та у водоймища [1-5]. Відомо, що вертикальну міграцію РН зумовлюють такі процеси: фільтрація атмосферних опадів углиб ґрунту; капілярне підтікання вологи до поверхні в результаті випаровування; термоперенесення вологи під дією градієнтного перерозподілу температури; рух та дифузія вільних і адсорбованих іонів, а також перенесення на мігруючих колоїдних частинках і кореневими системами рослин та ін. [6-10].

Важливу роль відіграє концентрація солей у ґрунтових розчинах, яка може змінюватись у 10 разів і більше, а із зростанням концентрації ґрунтового розчину суттєво (в 5-14 рази) збільшується коефіцієнт фільтрації [11].

Важливим фактором є кислотність ґрунту. Залежно від мінералогічного складу, вмісту гумусу, активності мікроорганізмів та інших чинників, властивості ґрунтового розчину у різних ґрунтах можуть бути різними (для більшості ґрунтів рН=3.5-9.0). Вміст органічних речовин коливається від 1-2% в сіроземах до 10-12% у потужних чорноземах [12].

Міграція радіонуклідів, що потрапляють в ґрунт, залежить і від густини трав'яного покриву. Якщо рослинність густа, то в землю потрапляє лише 20% радіонуклідів, а інші 80% включаються в процес міграції, який триває 1-5 років. Описаний механізм вертикальної міграції РН є по суті агрохімічним.

Проте міграцію РН можна описати і на основі наступних чотирьох процесів: конвекції, яка відображає направлене перенесення потоку маси; дисперсійно-дифузійного процесу; сорбції-адсорбції із повним спектром можливих фізико-хімічних взаємодій між РН та ґрунтом і механічне перенесення РН, сорбованих на інертних носіях.

Така спрощена механіко-детерміністична концепція базується на припущенні, що всі фізико-хімічні процеси, що керують міграцією РН в ґрунті, можуть бути строго описані. Більш реалістичною моделлю поширення радіонуклідів і радіоекологічного стану території є стохастична імовірнісна модель. Інтерпретація процесів поведінки хімічних сполук у ґрунтового покриві отримала найбільше застосування [13].

**Аналіз останніх наукових досліджень.** Продовжуючи започатковані в [6, 8] дослідження та аналізуючи

[7, 14] можна зробити висновок про їхню актуальність та перспективність. Тема статті відповідає тематиці загальнодержавної концепції "Національної програми охорони земель" та тісно пов'язана з держтемою: "Дослідження сучасного стану та розробка засобами ГІС-технологій і РЕМ-мікроскопії засад раціонального землекористування ерозійно-деградованих земель Волинської височини" (держреєстраційний номер 0111U002146), що виконувалась на кафедрі геодезії, землевпорядкування та кадастру Волинського національного університету імені Лесі Українки (2011-2012р.).

Мета даної роботи полягає у дослідженні можливості використання марковських властивостей (матриць Маркова) в оцінці радіоекологічного стану уражених територій, розробці математичного формалізму такого підходу.

**Виклад основного матеріалу**

**I. Використання матриць Маркова при оцінці радіоекологічного стану території.** Нехай на певний момент часу  $t_0$  відомий радіоекологічний стан ураженої території. Щоб визначити стан середовища в момент часу  $t_N = t_0 + N\tau$ , змодельємо окремі зміни станів для моментів  $t_r$  і  $t_{r-1}$  лінійним операторним рівнянням [15, 16]

$$Q^r(i) = K(\tau) \cdot Q^{r-1}(i) \tag{1}$$

або спрощено

$$Q_r = K \cdot Q_{r-1} \tag{2}$$

де  $K$  – лінійний оператор  $K(\tau)$  при фіксованому  $\tau$ . Очевидно стан середовища для моменту  $t_N$  матиме вигляд:

$$Q_N = K(\dots((K \cdot Q_0)K)\dots),$$

або в більш компактній формі

$$Q_N = K^N \cdot Q_0. \tag{3}$$

Операторне рівняння (3) має властивість марковських ланцюгів, для яких справедливе наступне положення: незалежно від початкового стану  $Q_0$  послідовність наступних станів, яким властиве співвідношення (2), має певний граничний стан  $Q^*$ , тобто

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Q_r(i) = Q^*(i).$$

При цьому

$$Q^*(i) = K \cdot Q^*(i-1), \quad (4)$$

або в дискретній формі

$$\sum_i Q^*(i) = \sum_i Q_0(i),$$

що відповідає стану рівноваги.

Проте у випадку дії додаткових зовнішніх джерел впливу стан рівноваги порушується. Позначимо через  $P_r(i)$  оператор зовнішніх впливів. Тоді співвідношення (2) матиме вигляд:

$$Q_r(i) = \sum_j Q_{r-1}(j) \cdot K_{ij} + P_r(i)$$

або

$$Q_r = K \cdot Q_{r-1} + P_r. \quad (5)$$

Але в цьому випадку можлива невизначеність, тому для повноти моделі (5) необхідно вказати способи подолання статистичної невизначеності вихідного матеріалу і дати математичний апарат імовірнісного інтерполювання просторових значень трансформацій радіоекологічного стану середовища [17,18].

Обмежимося для простоти одновимірним випадком. Зробимо такі припущення: нехай багатовимірний стан радіоекологічного стану описується векторами:

$$\bar{X} = \{X_i\}, \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_k]^T \quad (6)$$

і вектором емпіричних вимірів  $\bar{Z} = \{Z_i\}$ . З вектора  $\{X_i\}$  виділяється  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  перших  $m$  значень  $X$ , де  $m$  – вимірний вектор, що функціонально не пов'язаний з координатами  $x_{m+1}, \dots, x_k$ .

В загальному досліджувана система може описуватися такими двома матричними рівняннями:

$$\begin{aligned} X_n &= \Phi X_{n-1} + \Gamma \omega_n, \\ Z_n &= H X_n + v_n, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\Phi, \Gamma, H$  – залежить від часу;  $[n]$  – номер ітерації,  $\omega_n$  – гаусівська випадкова послідовність з нульовим математичним очікуванням.

Матриця  $\Gamma$  для одновимірного випадку є матрицею-стовпцем з одним ненульовим елементом, тому другим доданком в першому рівнянні системи (7) можна нехтувати.

З врахуванням зроблених припущень перше рівняння системи (7) для  $n$ -ної ітерації запишеться так:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 19.00 & 31.00 & 21.97 & 86.72 & 118.00 & 63.80 & 33.00 & 0.0 & 0.0 \\ 20.37 & 32.79 & 12.31 & 44.34 & 110.59 & 49.85 & 42.00 & 0.0 & 0.0 \\ 21.57 & 74.80 & 8.00 & 29.06 & 18.00 & 34.74 & 26.00 & 0.0 & 0.0 \\ 19.00 & 86.00 & 47.00 & 28.00 & 11.00 & 25.13 & 28.97 & 0.0 & 0.0 \\ 22.61 & 78.11 & 47.56 & 45.00 & 14.13 & 32.24 & 31.00 & 0.0 & 0.0 \\ 34.21 & 48.97 & 75.68 & 54.81 & 12.00 & 34.00 & 32.28 & 0.0 & 0.0 \\ 36.00 & 50.00 & 86.00 & 70.00 & 32.00 & 35.73 & 45.72 & 0.0 & 0.0 \\ 7.00 & 6.00 & 19.00 & 64.76 & 32.57 & 38.00 & 47.00 & 0.0 & 0.0 \\ 23.00 & 11.17 & 16.99 & 42.47 & 36.50 & 39.28 & 52.00 & 0.0 & 0.0 \\ 24.00 & 11.00 & 10.00 & 17.61 & 38.31 & 45.34 & 48.00 & 0.0 & 0.0 \\ 23.07 & 11.83 & 10.44 & 11.62 & 36.40 & 48.96 & 48.74 & 0.0 & 0.0 \\ 21.56 & 12.72 & 19.16 & 4.37 & 43.35 & 49.35 & 57.87 & 0.0 & 0.0 \\ 22.00 & 12.00 & 20.83 & 2.00 & 45.00 & 44.97 & 61.00 & 0.0 & 0.0 \\ 18.79 & 12.57 & 18.67 & 5.05 & 41.13 & 36.78 & 32.00 & 40.00 & 47.00 \end{pmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}_{n-1} + \Gamma \omega_n, \quad (8)$$

де  $a_{ij}$  і т.д. – часткові похідні функції  $\Phi$ .

Обчислення значень екстрапольованих  $\hat{X}$  здійснюється із застосуванням матриць Маркова за такою рекурентною схемою:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1[n] &= a_{11} \hat{X}_1[n-1] + \dots + a_{1m} \hat{X}_m[n-1], \\ \hat{X}_2[n] &= a_{21} \hat{X}_1[n-1] + \dots + a_{2m} \hat{X}_m[n-1], \\ &\vdots \\ \hat{X}_m[n] &= a_{m1} \hat{X}_1[n-1] + \dots + a_{mm} \hat{X}_m[n-1]. \end{aligned} \quad (9)$$

Необхідні для таких обчислень апіорні імовірності  $w_k$  і  $p_{ij}$  знаходяться за відомими формулами теорії ймовірності [19, 20]

$$p_{ij}[n] = M\{\hat{X}_i[n-1] \hat{X}_j[n-1]\} = f(p_{ij}[n-1] a_{ij}), \quad (10)$$

де  $1 \leq i, j \leq m$ , а знак  $M\{\dots\}$  означає операцію знаходження математичного очікування.

В такому підході загальною властивістю є марковість перехідних станів, тому прогнози, одержані таким чином можна трактувати як марковський прогноз [15, 16].

Як приклад, показано аналіз радіоекологічних змін окремо взятої території після Чорнобильської аварії через 10 і 20 років.

У відповідності з викладеним алгоритмом маємо:

- $N = 10$  – число циклів (років прогнозу);
- $14 \times 9$  – розмірність вихідної і прогнозних матриць;
- $*$  – означає відсутність даних.

Приклад практичного розрахунку матриць Маркова приведено на рис.1. Тут: матриця  $M_{t_0}$  отримано за модельними характеристиками радіоекологічного стану певної території на час екстремальної ситуації ( $t_0$ ); матриця  $M_{t_1}$  розрахована для  $t_1 = t_0 + 10$ ; матриця  $M_{t_2}$  – для  $t_2 = t_0 + 20$ . В розрахунках за функцію  $\Phi$  взята багатofакторна лінійна регресійна модель [19, 20].

$Q_{10} =$	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>6.40</td><td>6.40</td><td>4.63</td><td>54.38</td><td>77.00</td><td>30.60</td><td>1.26</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>7.14</td><td>9.03</td><td>4.38</td><td>21.07</td><td>71.63</td><td>21.82</td><td>12.00</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>8.28</td><td>49.16</td><td>3.69</td><td>6.19</td><td>7.21</td><td>13.70</td><td>10.00</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>6.40</td><td>59.00</td><td>0.45</td><td>4.00</td><td>2.67</td><td>8.62</td><td>10.04</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>9.32</td><td>51.91</td><td>7.14</td><td>32.00</td><td>3.25</td><td>12.90</td><td>10.00</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>18.89</td><td>30.62</td><td>40.66</td><td>29.78</td><td>0.45</td><td>14.00</td><td>10.61</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>20.00</td><td>32.00</td><td>47.00</td><td>32.00</td><td>14.00</td><td>13.75</td><td>15.53</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>1.60</td><td>0.42</td><td>18.00</td><td>30.38</td><td>13.89</td><td>14.00</td><td>16.00</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>10.00</td><td>4.18</td><td>12.01</td><td>22.06</td><td>14.87</td><td>13.93</td><td>12.00</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>16.00</td><td>4.00</td><td>4.00</td><td>9.06</td><td>12.16</td><td>13.39</td><td>13.00</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>14.30</td><td>4.21</td><td>3.86</td><td>2.37</td><td>6.48</td><td>12.02</td><td>12.81</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>4.60</td><td>0.97</td><td>0.68</td><td>0.73</td><td>7.71</td><td>9.37</td><td>11.38</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>4.00</td><td>0.40</td><td>0.45</td><td>0.40</td><td>8.00</td><td>8.17</td><td>12.00</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>3.94</td><td>0.81</td><td>0.63</td><td>0.82</td><td>7.37</td><td>8.76</td><td>2.53</td><td>3.11</td><td>4.45</td></tr> </table>	6.40	6.40	4.63	54.38	77.00	30.60	1.26	0.0	0.0	7.14	9.03	4.38	21.07	71.63	21.82	12.00	0.0	0.0	8.28	49.16	3.69	6.19	7.21	13.70	10.00	0.0	0.0	6.40	59.00	0.45	4.00	2.67	8.62	10.04	0.0	0.0	9.32	51.91	7.14	32.00	3.25	12.90	10.00	0.0	0.0	18.89	30.62	40.66	29.78	0.45	14.00	10.61	0.0	0.0	20.00	32.00	47.00	32.00	14.00	13.75	15.53	0.0	0.0	1.60	0.42	18.00	30.38	13.89	14.00	16.00	0.0	0.0	10.00	4.18	12.01	22.06	14.87	13.93	12.00	0.0	0.0	16.00	4.00	4.00	9.06	12.16	13.39	13.00	0.0	0.0	14.30	4.21	3.86	2.37	6.48	12.02	12.81	0.0	0.0	4.60	0.97	0.68	0.73	7.71	9.37	11.38	0.0	0.0	4.00	0.40	0.45	0.40	8.00	8.17	12.00	0.0	0.0	3.94	0.81	0.63	0.82	7.37	8.76	2.53	3.11	4.45	;	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>4</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>4</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>4</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>8</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>5</td><td>*</td><td>*</td><td>4</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>4</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>*</td><td>2</td><td>*</td><td>*</td><td>3</td><td>3</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>3</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>3</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>3</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>4</td><td>*</td><td>2</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> </table>	*	*	*	*	4	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	4	*	*	*	*	*	*	*	*	4	*	*	*	8	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	5	*	*	4	*	*	*	*	*	*	*	4	*	*	*	3	4	4	3	4	*	*	*	*	*	*	2	*	*	3	3	*	*	*	*	*	*	*	*	3	*	*	2	3	3	*	*	*	3	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	3	*	*	*	4	*	2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	$Q_{20} =$
6.40	6.40	4.63	54.38	77.00	30.60	1.26	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
7.14	9.03	4.38	21.07	71.63	21.82	12.00	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
8.28	49.16	3.69	6.19	7.21	13.70	10.00	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
6.40	59.00	0.45	4.00	2.67	8.62	10.04	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
9.32	51.91	7.14	32.00	3.25	12.90	10.00	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
18.89	30.62	40.66	29.78	0.45	14.00	10.61	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
20.00	32.00	47.00	32.00	14.00	13.75	15.53	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
1.60	0.42	18.00	30.38	13.89	14.00	16.00	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
10.00	4.18	12.01	22.06	14.87	13.93	12.00	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
16.00	4.00	4.00	9.06	12.16	13.39	13.00	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
14.30	4.21	3.86	2.37	6.48	12.02	12.81	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
4.60	0.97	0.68	0.73	7.71	9.37	11.38	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
4.00	0.40	0.45	0.40	8.00	8.17	12.00	0.0	0.0																																																																																																																																																																																																																																																								
3.94	0.81	0.63	0.82	7.37	8.76	2.53	3.11	4.45																																																																																																																																																																																																																																																								
*	*	*	*	4	*	*	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
*	*	*	*	*	*	4	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
*	*	*	*	*	*	4	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
*	8	*	*	*	*	*	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
*	*	*	5	*	*	4	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
*	*	*	*	*	4	*	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
3	4	4	3	4	*	*	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
*	*	2	*	*	3	3	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
*	*	*	*	*	*	3	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	3	*	*	*	3	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
*	*	*	*	*	*	*	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
*	*	*	*	*	*	*	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
3	*	*	*	4	*	2	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								
*	*	*	*	*	*	*	*	*																																																																																																																																																																																																																																																								

Рис.1. Матриці Маркова на час  $t_0$ ,  $t_1$  і  $t_2$ .

Комп'ютерна реалізація алгоритму марковського прогнозу показала, що він може бути реалізований двома шляхами, що відрізняються послідовністю застосування процедур перетворення матриць і прогнозу окремих елементів матриць. У символічній формі перший і другий підходи мають вигляд:

перший підхід

$$Q_0 \xrightarrow{\text{прогноз}} Q_0, Q_0 \xrightarrow{k} Q_1, Q_1 \xrightarrow{\text{прогноз}} Q_1, Q_1 \xrightarrow{k} Q_2,$$

другий підхід

$$Q_0 \xrightarrow{\text{прогноз}} Q_0, Q_0 \xrightarrow{k} Q_1, Q_1 \xrightarrow{k} Q_N.$$

При застосуванні першого підходу на кожному часовому циклі розв'язуються дві задачі: задача прогнозу і задача переходу до наступного часового  $k$ -річного, циклу.

В другому підході спочатку розв'язується задача прогнозу, а потім у всіх часових циклах – тільки задача переходу до наступного часового циклу.

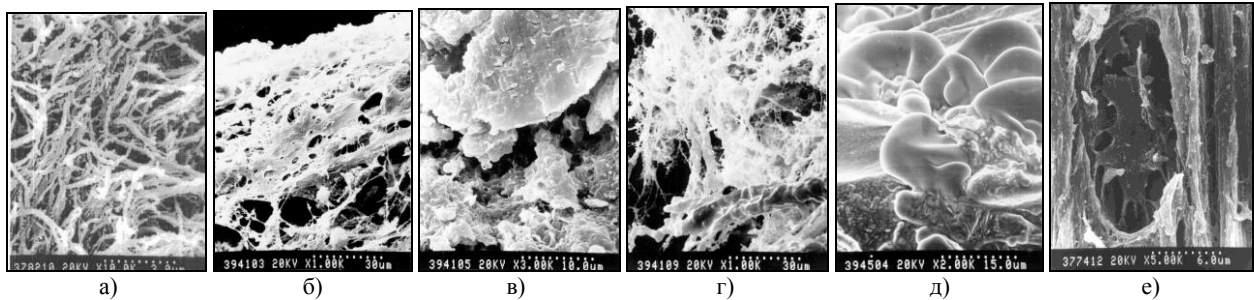


Рис.2. Морфологічні особливості перебудови кісткової тканини під впливом підвищеної радіації:

а) мікроструктура кісткової тканини в нормі, збільшення  $10000^{\times}$ ; б) фрагмент губчастої кістки, ураженої враженого хворобою Пертеса,  $-1000^{\times}$ ; в) кортикальна частина кістки, враженої дистрофією,  $-3000^{\times}$ ; г) фрагмент ураженої остеоомою кістки,  $-1000^{\times}$ ; д) кістково-хрящовий екзостоз, фрагмент кістки,  $-2000^{\times}$ ; е) РЕМ-мікрофотографія кісткової лакуни,  $-5000^{\times}$ .

## II. РЕМ-мікроскопія деструкції кісткової тканини

На територіях, радіоактивно вражених внаслідок Чорнобильської аварії, крім радіоактивного забрудненого ґрунтового і рослинного покриву спостерігаються суттєві деструктивні зміни кісткової тканини у людей і тварин [21]. На мікрофотографіях (рис.2, а, б, в, г, д, е) отриманих за допомогою сучасної електронної мікроскопії растрового типу (РЕМ "Hitachi-S800") показаний зразок здорової кісткової тканини людини (а) та зміни пов'язані з негативними зовнішніми процесами: ураження хворобою Пертеса (б), дистрофією (в), остеоомою, (г), кістковим хрящовим екзостозом (е), кістковою лакуною (д).

Відмічені деструктивні зміни обумовлені депонуванням в кістковій тканині головним чином радіоактивного цезію-137 і стронцію-90. Тривале надходження та інкорпорація їх у кістковій тканині супроводжується розвитком в кістках ряду структурних перебудов, найбільш вражених в зонах росту і адаптивного ремодулювання кістки.

## Висновки і перспективи подальших досліджень

1. Із комп'ютерного порівняння цих підходів можна зробити такий висновок: в першому підході розв'язується  $N$  задач прогнозування, а в другому тільки одна. Перший підхід не накопичує помилок прогнозування, а кожний раз уточнює прогноз при переході з одного часового циклу на інший. Другий підхід: перші спрогнозовані значення поширює послідовно на решту часових циклів, що приводить до накопичення помилок прогнозування з кожним часовим циклом. Очевидно, з точки зору точності, необхідно віддати перевагу першому підходу.

2. В сукупності розроблена методика дозволяє здійснювати на якісно новому рівні інтегровану оцінку, інтерпретацію та прогноз радіоекологічного стану території, а також вплив радіаційних, еко-антропогенних факторів на здоров'я людини.

ЛІТЕРАТУРА (REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- Макрелов Д.А. Определение зональной радиотолерантности как базис биоиндикации радиоэкологического состояния территории. // *Мат. Международного симпозиума Инженерная Экология*. – 2003. – М: ВСНТОРЕС им. А.С. Попова. – с. 77-81.  
*Makrelov D.A. Opredelenye zonalnoi radyotolerantnosti kak bazys bioindykatsyy radyoekologicheskoho sostoiannya terrtoryi [Definition of Zonal Radiotolerance as the Basis of bioindication of radioecological state of territory] // Mat. Mezhdunarodnoho sympozyumu Ynzhenernaia Ekolohyia. – 2003. – M: VSNTORES ym. A.S. Popova. – S. 77-81.*
- Балалаев А.К. Эколого-микроморфологическая оценка эдафотопов лесных экосистем Степного Приднепровья (состояние, охрана, прогноз): автореф. дис. канд. биол. наук: 03.00.16 / А.К. Балалаев. – Днепропетровск. 2005. – 24 с.  
*Balalaeв A.K. Ekoloho-mykromorfologicheskaiia otsenka edafotopov lesnuh ekosystem Steпноho Prydneprovya (sostoianye, okhrana, prohnaz) [Ecological-micromorphological evaluation of edafotops of forest ecosystems of Steppe Prydniprov'ye (state, protection, forecasting)]: avtoref. dys. kand. byol. nauk: 03.00.16 / A.K. Balalaeв. – Dnepropetrovsk. 2005. – 24 s.*
- Косолапова Е.В. Екологічна оцінка забруднених земель різного використання Волинського і Житомирського Полісся цезієм-137: автореф. дис. канд. с.-г. наук: 03.00.16 / Е.В. Косолапова. – Житомир, 2002. – 19 с.  
*Kosolapova E.V. Ekolohichna otsinka zabrudnennykh zemel riznoho vykorystannia Volynskoho i Zhytomyrskoho Polissia ceziyem-137 [Environmental assessment of contaminated lands of different utilization of Volyn and Zhytomyr Polesje by cesium-137]: avtoref. dys. kand. s.-h. nauk: 03.00.16 / E.V. Kosolapova. – Zhytomyr, 2002. – 19 s.*
- Прохоров В.М. Миграция радиоактивных загрязнений в почвах (Физико-химические механизмы и моделирование (Под ред. Р.М. Алексахина). М., 1981. – 96 с.  
*Prokhorov V.M. Myhratsyia radyoaktyvnyh zahriaznenyi v pochvakh (Fyzyko-hymycheskye mehanyzmy u modelyrovanye [Migration of radioactive contaminations in soils (physicochemical mechanisms and modeling)] (Pod red. R.M. Aleksakhyna). M., 1981. – 96 s.*
- Чорний С. Протиерозійна стійкість степових ґрунтів України / С. Чорний, Н. Нікончук // Генеза, географія та екологія ґрунтів: зб. наук. пр. на пошану проф. Львів. нац. ун-ту ім. Івана Франка Мирона Кита. – Львів, 2008. – С. 579-584.  
*Chornyi S. Protyeroziyna stiykist' stepovykh gruntiv Ukrainy [Erosional-preventive resistance of steppe soils of Ukraine] / S. Chornyi, N. Nikonchuk // Geneza, heohrafiia ta ekolohiia gruntiv: zb. nauk. pr. na poshanu prof. Lviv. nats. un-tu im. Ivana Franka Myrona Kita. – Lviv, 2008. – S. 579-584.*
- Бліндер Ю.С. Дослідження вертикальної міграції радіонуклідів методами РЕМ-мікроскопії / Ю.С. Бліндер, Я.І. Країло // 7. Науковий вісник ВДУ, Р. 2, Географічні науки, – № 7, 2003. – С. 98-105.  
*Blinder Yu.S. Doslidzhennia vertykalnoi mihratsii radionuklidiv metodamy REM-mikroskopii [The study of vertical migration of radionuclides by SEM-microscopy methods] / Yu.S. Blinder, Ya.I. Krailo // Naukovyi visnyk VDU, R. 2, Heohrafiichni nauky, – № 7, 2003. – S. 98-105.*
- Ефремов И.В. Математическое моделирование миграции радионуклидов в почвенно-растительных комплексах / И.В. Ефремов, Н.Н. Рахимова, Е.Е. Савченкова, К.Я. Гафарова // Вестник ОГУ, №9. Оренбург, 2005. – С. 129-133.  
*Efremov Y.V. Matematycheskoe modelyrovanye myhracui radyonuklydov v pochvenno-rastytelnykh kompleksah [Mathematical modeling of radionuclide migration in soil-cover complexes] / Y.V. Efremov, N.N. Rakhymova, E.E. Savchenkova, K.Ya. Hafarova // Vestnyk OHU, № 9. Orenburh, 2005. – S. 129-133.*
- Бліндер Ю.С. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів у ґрунті / Ю.С. Бліндер // Геодезія, картографія і аерофотознімання. Міжвідомчий науково-технічний збірник, № 63, 2003. – С. 25-28.  
*Blinder Yu.S. Matematychnе modelyuvannia vertykalnoi mihratsii radionuklidiv v grunty [Mathematical Modeling of vertical migration of radionuclides in soil] / Yu.S. Blinder // Heodeziia, kartohrafiia i aerofotoznimannia. Mizhvidomchyi naukovotekhnichniy zbirnyk, №63, 2003. – S. 25-28.*
- Квасникова Е.В. Цезий-137 в почвах ландшафтов через 20 лет после аварии на Чернобыльской АЭС / Е.В. Квасникова, О.М. Жукова, С.К. Гордеев, Д.А. Манзон // Известия РАН. Серия географическая. М.: Известия РАН., 2009 №5.  
*Kvasnykova E.V. Cezyi-137 v pochvakh landshaftov cherez 20 let posle avariу na Chernobul'skoi AES [Cesium-137 in the soils of terrains 20 years after the accident on Chernobyl AES] / E.V. Kvasnykova, O.M. Zhukova, S.K. Hordeev, D.A. Manzon // Yzvestyia RAN. Seryia heohrafycheskaia. M.: Yzvestyia RAN, 2009 №5*
- Манзон Д.А. Радиационный мониторинг в Брянском поле-сье через 21 год после аварии на Чернобыльской АЭС [текст] / Д.А. Манзон // Конференция молодых учёных, посвящённая 100-летию Е.К. Федорова (16-19 ноября 2009г.): труды института прикладной геофизики имени академика Е.К. Федорова. – М.: ИПГ им. Е.К. Федорова, 2010.  
*Manzon D.A. Radyatsyonnyi monitorynh v Brianskom polese cherez 21 hod posle avariу na Chernobul'skoi AES [tekst] [Radiation Monitoring in Brjansk Polesje 21 years after the accident on Chernobyl AES] / D.A. Manzon // Konferentsyia molodukh uchyonukh, posviashchyonnaia 100-letyiu E.K. Fedorova (16-19 no-iabria 2009h.): trudu ynstytuta prykladnoi heofyzyky ymeny akademyka E.K. Fedorova. – M.: YPH ym. E.K. Fedorova, 2010.*
- Шевченко А.Л. Трансформация первоначальных выпадений радионуклидов и скорость их проникновения на глубину в различных типах почв // Охрана природы при мелиорации земель. Укр. НИИ гидротехнологии и мелиорации. – Киев, 1991. – С.21-27.  
*Shevchenko A.L. Transformatsyia pervonachalnykh vupadenyi radionuklydov u skorost yh pronyknovenyia na hlubynu v razlychnnykh tyпах pochv [Transformation of primary drop-over of radionuclides and the speed of their penetration into the depth in different kinds of soils] // Okhrana pryrodu pry melyoratsyy zemel. Ukr. NYU hydrotekhnolohyy u melyoratsyy. – Kyev, 1991. – S. 21-27.*
- Бондарьков М.Д. Изучение глобальных выпадений, связанных с атомными взрывами / М.Д. Бондарьков, М.В. Желтоножская // Проблемы безопасности атомных электростанций и Чернобиля. – вып. 5. – 2006 – С. 157-160.  
*Bondarkov M.D. Yzuchenye hlobalnykh vupadenyi, svyazannykh s atomnykh vzryvamy [Study of Global drop-over, connected with nuclear power explosions] / M.D. Bondarkov, M.V. Zheltonozh'skaia // Problemy bezpeky atomnykh elektrostantsii i Chornobyliya. – vup. 5. – 2006 – S. 157-160.*
- Янчук В.М. Методы та засоби математичного моделювання міграції радіонуклідів у природних екосистемах / В.М. Янчук, М.М. Колодницький, А.М. Ковальчук, В.Г. Левицький, О.О. Орлов // Т.1.: Від аналізу до математичної моделі. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 142 с.  
*Yanchuk V.M. Metody ta zasoby matematychnoho modelyuvannia mihratsii radionuklidiv u pryrodnykh ekosystemakh [Methods and tools of mathematical modeling of radionuclide migration in natural ecosystems] / V.M. Yanchuk, M.M. Kolodnytskyi, A.M. Kovalchuk, V.H. Levytskyi, O.O. Orlov // T.1.: Vid analizu do matematychnoi modeli. – Zhytomyr: ZhITI, 2002. – 142 s.*
- Булавацький В.М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу / В.М. Булавацький, Ю.Г. Кривонос, В.В. Скопєцький. – К.: Наукова думка, 2005. – 254 с.  
*Bulavatskyi V.M. Neklasychni matematychni modeli protsesiv teplo- ta masoperenosu [Nonclassical mathematical models of heat and mass transport] / V.M. Bulavatskyi, Yu.H. Kryvonos, V.V. Skopetskyi. – K.: Naukova dumka, 2005. – 254 s.*
- Чжун Кай-Лай. Однородные цепи Маркова. Пер. с англ. М.: Мир, 1964. – 425 с.

- Chzhun Kai-Lai. *Odnorodnye tsepy Markova [Markov homogeneous chains]*. Per. s anhl. M.: Myr, 1964. – 425 s.
- Rabiner L. *Atutorial on hidden Markov models and selected application in speech recognition Procc. IEEE. 1989. – №2. – p. 257-285.*
- Rabiner L. *Atutorial on hidden Markov models and selected application in speech recognition Procc. IEEE. 1989. - №2. - P. 257-285.*
17. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1991. – 383 с.
- Ventsel E.S. *Teoriya sluchainuh protsessov y ee ynzhenemue prylozheniya [Theory of random processes and its engineering applications] / E.S. Ventsel, L.A. Ovcharov. – М.: Nauka, 1991. – 383 s.*
18. Федоровский О.Д. Дешифрирование космических снимков ландшафтных комплексов с использованием Марковской модели изображений / О.Д. Федоровский, В.Г. Якимчук, С.О. Рябобоненко // Космическая наука и технология №5-6, 2001. – С. 80-84.
- Fedorovskiy O.D. *Deshyfyrovanye kosmycheskykh snymkov landshafinukh kompleksov s yspolzovanyem Markovskoi modely yzobrazheniy [Decoding of satellite images of terrain complexes with the appliance of Markov model of images] / O.D. Fedorovskiy, V.H. Yakymchuk, S.O. Riabokononko // Kosmycheskaia nauka y tekhnolohiya №5-6, 2001. – S. 80-84.*
19. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов / А.Д. Вентцель. – М.: Наука, 1978. – 320 с.
- Ventsel A.D. *Kurs teoryy sluchainuh protsessov [Course of the Theory of random processes] / A.D. Ventsel. – М.: Nauka, 1978. – 320 s.*
20. Корн Г. Справочник по математике. / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1970. – 720 с.
- Korn H. *Spravochnyk po matematyke [Guide in Mathematics] / H. Korn, T. Korn – М.: Nauka, 1970. – 720 s.*
21. Мельник В.М. Кількісна стереомікрофрактографія: Монографія [Текст] / В.М. Мельник, А.В. Шостак. – Вид. «Твердіня». – М. Луцьк, 2010. – 457 с.
- Melnyk V.M. *Kilkisna stereomikrofraktohrafia: Monohorafia [Quantitative stereomicrofracturing. Monograph] [Tekst] / V.M. Melnyk, A.V. Shostak. – Vyd. «Tverdnyia». – M. Lutsk, 2010. – 457 s.*

**Melnyk V.M., Blinder J.S., Mendel V.P. Mathematical formalism transformation radiation using state of the Markov matrices and SEM-microscopy**

**Abstract.** The question of time transformation of radio-ecological state of the affected area is investigated from a general mathematical-formalistic positions. It is shown that such transformations correspond to Markov processes that are offered to be characterized by Markov matrices. The predictive algorithm is given as a system of matrix equations of Kalman's type. The integrated radio-ecological assessment with the appliance of modern SEM-microscopy is proposed.

**Keywords:** radioecology, predictability, Markov matrices, SEM-microscopy

**Мельник В.Н., Блиндер Ю.С., Мендель В.П. Математический формализм трансформации радиоэкологического состояния территории с применением матриц Маркова и РЭМ-микроскопии**

**Аннотация.** Рассмотренные из общих математически-формалистических позиций вопрос трансформации во времени радиоэкологического состояния пораженной территории. Показано, что подобные трансформации соответствуют марковским процессам, которые предлагается характеризовать матрицами Маркова. Дано прогнозный алгоритм в виде системы матричных уравнений калмановской типа. Предлагается интегрированная радиоэкологическая оценка с применением современной РЭМ-микроскопии.

**Ключевые слова:** радиоэкология, прогнозирования, матрицы Маркова, РЭМ-микроскопия