Любченко К.Н.

Использование инструментально-контролирующей программы Master of Logic при обучении решению задачи о функциональной полноте системы булевых функций

Любченко Константин Николаевич, старший преподаватель
Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого, г. Черкассы, Украина

Аннотация. В статье рассмотрена задача исследования функциональной полноты систем булевых функций. Для формирования у студентов (учащихся) знаний, умений и навыков её успешного решения рассмотрены необходимые понятия, в частности классы Поста, и примеры, а также соответствующие возможности инструментально-контролирующей программы Master of Logic. Статья в первую очередь предназначена преподавателям дискретной математики, математической логики, искусственного интеллекта и т. п., учителям информатики и математики средних учебных заведений, студентам соответствующих специальностей и учащимся.

***Ключевые слова**: средства обучения, математическая логика, булевы функции, Master of Logic*

Введение. В наше время остается актуальной проблема формирования у будущих специалистов в сфере информационно-коммуникационных технологий фундаментальных знаний и практических умений их применения.

Одной из важных задач в этой области является проектирование интегральных микросхем, являющихся основой цифровых автоматов, в частности компьютеров. Для успешного её решения необходима информация о функциональной полноте систем булевых функций, используемых при указанной разработке, поскольку такие системы позволяют построить произвольный цифровой автомат. Также отметим, что вопрос определения полноты системы булевых функций может трактоваться в двух основных вариантах: на основе формулировки или доказательства критерия Поста, что требует достаточно основательных знаний и умений, включающих следующие понятия:

– логические операции и таблица истинности булевых функций;
– двойственность и самодвойственность булевых функций;
– монотонность булевых функций;
– полином Жегалкина и линейность булевых функций.

Краткий обзор публикаций по теме. Теоретический материал, связанный с задачами математической логики и, в частности, с функциональной полнотой, изложен, например, в [1–6].

Поскольку исследование функциональной полноты системы булевых функций является достаточно сложным и громоздким, то для более эффективной организации и проведения занятий, а также самостоятельной работы студентов (учащихся) при изучении этого вопроса целесообразно использовать компьютер. Но нам неизвестны программные продукты, которые бы позволяли комплексно решать указанную задачу.

Поэтому для компьютерной поддержки изучения математической логики автором создана инструментально-контролирующая программа Master of Logic [8], которая является современным важным средством формирования у студентов (учащихся) умений и навыков решения основных классов задач алгебры высказываний и исследования булевых функций, а также позволяет автоматизировать процесс промежуточного и итогового контроля знаний [3; 7].

Таким образом, задача формирования знаний по исследованию полноты некоторой системы булевых функций является актуальной, но для более эффективного решения требует использования соответствующего программного обеспечения.

Целью статьи является рассмотрение алгоритма определения функциональной полноты системы булевых функций на основе формулировки критерия Поста и инструментально-контролирующей программы Master of Logic для формирования у студентов (учащихся) соответствующих знаний, умений и навыков.

Материалы и методы. Изучение темы о функциональной полноте системы булевых функций можно начать или с формулировки критерия Поста, или с определения классов Поста.

Рассмотрим сначала классы Поста.

1. T_0 – класс булевых функций, сохраняющих 0, т. е. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_0 \Leftrightarrow f(0,0,\ldots,0) = 0$.

Примеры. $0, x, \wedge, \vee, \oplus \in T_0$.

$1, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow \notin T_0$.

Можно сформулировать такое задание: определить количество булевых функций от n переменных, принадлежащих классу T_0.

2. T_1 – класс булевых функций, сохраняющих 1, т. е. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1 \Leftrightarrow f(1,1,\ldots,1) = 1$.

Примеры. $1, x, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \in T_1$.

$0, \neg, \oplus \notin T_1$.

Аналогично предыдущему заданию можно сформулировать такой вопрос: определить количество булевых функций от n переменных, принадлежащих классу T_1.

3. S – класс самодвойственных булевых функций.

Булева функция $f^*(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называется ***двойственной*** к булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, если $f^*(x_1, x_2, \ldots x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_n})}$.

Примеры.

1) Константа **0** двойственна к константе 1 и наоборот;

2) $\wedge$ двойственна к $\vee$: $x \wedge y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$;

3) $\downarrow$ двойственна к $|$: $x \downarrow y \equiv \overline{x \vee y} \equiv \overline{\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}} \equiv \overline{x} \mid \overline{y}$;

4) $\oplus$ двойственна к $\leftrightarrow$: $x \oplus y \equiv \overline{x \leftrightarrow y} \equiv \overline{\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}}$.

Замечание. $\oplus$ и $\leftrightarrow$ являются отрицаниями друг друга и двойственны друг к другу. Но не всегда, когда $f = \overline{g}$, то g двойственна f. Например, $|$ не двойственна к $\wedge$, а $\downarrow$ не двойственна к $\vee$.

Булева функция f называется ***самодвойственной***, если $f^* = f$.

Другими словами, f самодвойственна, если $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_n})}$, т. е. на противоположных наборах f принимает противоположные значения. Поэтому самодвойственная функция полностью определяется своими значениями на 1-й половине строк таблицы истинности.

Тогда можно сформулировать такое задание: определить количество булевых функций от *n* переменных, принадлежащих классу *S*.

Примеры. $x, \neg \in S$. $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \notin S$.

4. *M* – класс монотонных булевых функций.

Булева функция f называется ***монотонной***, если для любых наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ таких, что $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$, имеет место $f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})$.

Примеры. $0, 1, x, \wedge, \vee \in M$. $\rightarrow, \leftrightarrow, |, \oplus \notin M$.

5. *L* – класс линейных булевых функций.

Булева функция называется ***линейной***, если она может быть представлена полиномом Жегалкина степени не выше первой.

Число линейных булевых функций от *n* переменных равно 2^{n+1} – число линейных полиномов Жегалкина.

Примеры. $0, 1, x, \neg, \leftrightarrow, \oplus \in L$. $\wedge, \vee, \rightarrow \notin L$.

Теперь сформулируем критерий Поста.

Теорема. Система булевых функций является функционально полной, если она не содержится целиком ни в одном из классов Поста.

Рассмотрим примеры заданий на определение функциональной полноты с помощью формулировки критерия Поста и использование для этого программы Master of Logic.

Задание 1. Определить, является ли система булевых функций $F = \{\rightarrow, \vee, 0\}$ функционально полной.

Решение. На основе формулировки критерия Поста необходимо построить критериальную таблицу. Для этого нужно определить, к каким классам Поста принадлежат булевы функции из множества *F*. Учитывая приведенные при рассмотрении классов Поста примеры, заполним критериальную таблицу (табл. 1).

В этой таблице на пересечении каждой строки и столбца находится знак "+", если соответствующая функция принадлежит соответствующему классу Поста, и знак "–" в противном случае.

Таблица 1. Критериальная таблица Поста

	T_0	T_1	S	M	L
$\rightarrow$	–	+	–	–	–
$\vee$	+	+	–	+	–
0	+	–	–	+	+

Поскольку в полученной для рассматриваемого примера таблице в каждом столбце есть хотя бы одни знак "–", то делаем вывод, что данная система *F* полна.

Отметим, что данная система *F* содержит достаточно простые функции и поэтому некоторыми студентами (учениками) построение аналогичных критериальных таблиц является устной задачей. Но существенные трудности возникают, если исследуемая на полноту система состоит из более сложных функций и/или большего их числа. Особое внимание при этом нужно уделить определению принадлежности функций классам *S*, *M*, *L*.

Задание 2. Исследовать мажоритарную булеву функцию (табл. 2) на принадлежность классам Поста.

Таблица 2. Таблица истинности мажоритарной булевой функции

X_1	X_2	X_3	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Решение. Из таблицы видно, что данная булева функция принадлежит классам $\boldsymbol{T_0}$ и $\boldsymbol{T_1}$.

Основными методами определения принадлежности функции классу ***S*** являются:

– построение и анализ таблицы истинности;

– построение совершенной нормальной формы (конъюнктивной или дизъюнктивной) для булевой функции и двойственной к ней.

В данном случае используем готовую таблицу истинности (табл. 2), из которой делаем вывод, что мажоритарная булева функция является самодвойственной, т. к. на противоположных наборах она принимает противоположные значения.

Заметим, что совершенная конъюнктивная нормальная форма булевой функции имеет вид:

$$(X_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3) \wedge$$
$$\wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3)$$

Для определения монотонности рассматриваемой функции достаточно проанализировать четвертую и пятую строку её таблицы истинности, т. к. на четвертом наборе функция принимает значение 1, а на пятом – 0. Поскольку наборы (0,1,1) и (1,0,0) несравнимы, то данная функция монотонна.

Для того чтобы определить принадлежность функции классу *L*, необходимо построить полином Жегалкина одним из следующих способов:

– методом равносильных преобразований;
– методом неопределенных коэффициентов;
– на основе совершенной дизъюнктивной нормальной формы;
– с помощью треугольника Паскаля.

Рассмотрение этих методов выходит за рамки данной статьи. Отметим лишь, что для мажоритарной булевой функции полином Жегалкина имеет вид:

$$X_1 \wedge X_2 \oplus X_1 \wedge X_3 \oplus X_2 \wedge X_3$$

Таким образом, мажоритарная булева функция не является линейной, т. е. не принадлежит классу *L*.

Для исследования принадлежности функций классам Поста и определения полноты заданной системы булевых функций с помощью программы Master of Logic необходимо выполнить следующие действия:

1) в пункте меню "Система" (рис. 1) выбрать подпункт "Функций", или с помощью мыши нажать кнопку 

, или комбинацию клавиш "Alt+F";

2) в появившемся окне с помощью панели набора и/или клавиатуры ввести необходимое количество формул и нажать клавишу "Enter" или кнопку "Ok". Информация о функциональной полноте систем булевых функций из заданий 1 и 2 представлена соответственно на рисунках 2 и 3.

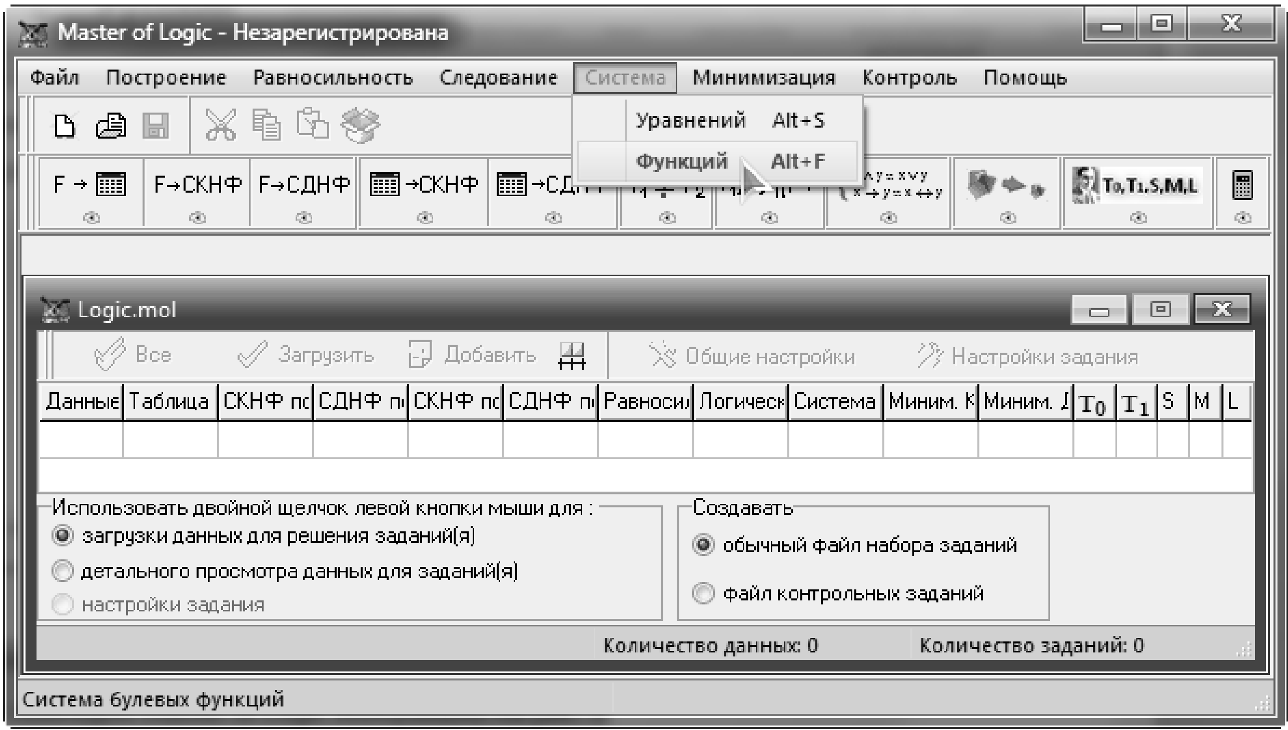

Рис. 1. Главное окно программы Master of Logic

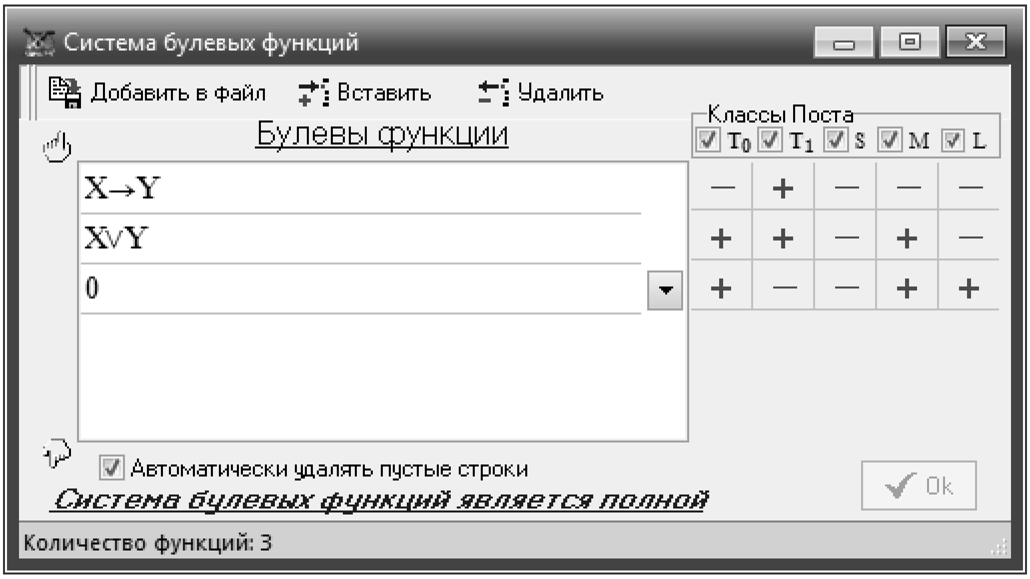

Рис. 2. Ответ программы Master of Logic для задания 1

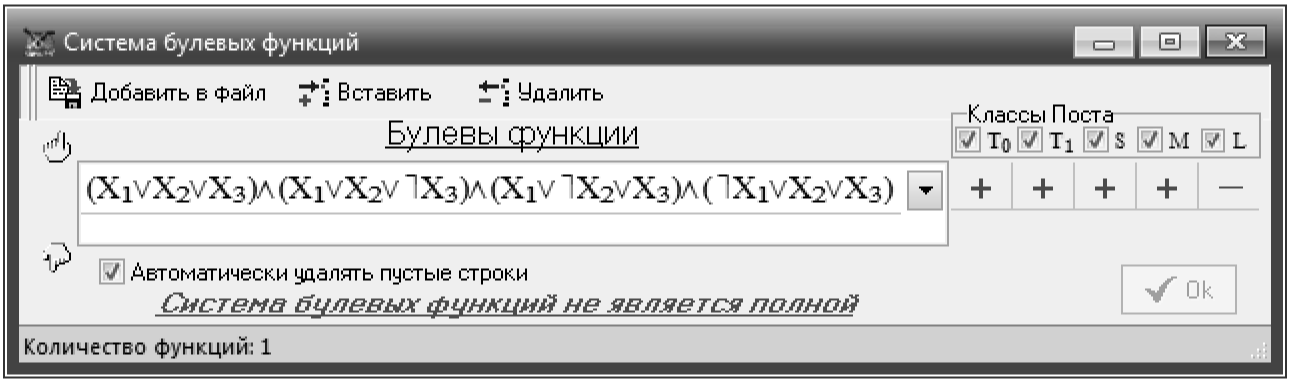

Рис. 3. Ответ программы Master of Logic для задания 2

Приведем ещё несколько примеров заданий на определение функциональной полноты системы булевых функций:

1) $\{X \wedge Y \vee \neg Y \wedge Z, 0, 1\}$;

2) $\{X \wedge Y \vee X \wedge Z \vee Y \wedge Z, X \leftrightarrow Y, X \oplus Y\}$;

3) $\{X_3 \leftrightarrow (X_2 \oplus X_1 \wedge X_3), X_1 \wedge X_2\}$.

Выводы. Задача определения функциональной полноты систем булевых функций является актуальной и для успешного решения требует серьезных знаний и умений в области булевых функций.

Программа Master of Logic содержит удобные и гибкие средства, позволяющие студентам (учащимся) и преподавателям исследовать булевы функции и их системы на функциональную полноту, эффективнее распределять учебное время.

ЛІТЕРАТУРА

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов / Под ред. B.C. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.
2. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр "Академия", 2008. – 448 с.
3. Любченко К.М., Триус Ю.В. Елементи математичної логіки з комп'ютерною підтримкою / Посібник для вчителів: Черкаси: Видавничий відділ ЧНУ, 2004. – 88 с.
4. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 384 е.: ил. – (Серия "Учебник для вузов").
6. Прийма С.М. Математична логіка і теорія алгоритмів: Навчальний посібник – Мелітополь: ТОВ "Видавничий будинок ММД", 2008. – 134 с.
7. Lyubchenko K.M. The Use of Instrumental and Controlling Program Master of Logic for Solving the Basic Class Problems of Propositional Algebra: Didactic Aspect / K. M. Lyubchenko // American Journal of Educational Research. – 2013. – 1(11). – P. 555-560.
8. Master of Logic. URL: http://lkn.univer.cherkassy.ua/. [Accessed Apr. 27, 2015].

REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED

1. Belousov, A.I., Tkachov, S.B, Discrete Mathematics: Textbook for universities / Ed. B.C. Zarubina, A.P. Krischenko. – 3rd ed. Publishing House of the Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 2004, 744 p.
2. Igoshyn, V.I, Mathematical Logics and Algorithm Theory: textbook for university students, Publishing Centre "Akademiya", Moscow, 2008, 448 p.
3. Lyubchenko, K.M., Tryus, Y.B, Element of Mathematical Logics with Computer Support / Handbook for Teachers: Cherkasy, Publishing Department of ChNU, Cherkasy, 2004, 88 p.
4. Nikolsky, Y.V., Pasichnyk, V.V., Shcherbyna, Y.M, Discrete Mathematics. – Publishing Group BHV, Kyiv, 2007, 368 p.
5. Novikov, F.A, Discrete Mathematics for Programmers: Textbook for universities, Piter, Sankt-Peterburg, 2009, 384 p.
6. Pryima, S.M, Mathematical Logics and Algorithm Theory : Tutorial, TOV " Publishing House MMD", Melitopol, 2008, 134 p.

Lyubchenko K.N.

The use of instrumental and controlling program Master of Logic in teaching of solving the task of functional completeness of Boolean functions systems

Abstract. The article considers the problem of investigating the functional completeness of Boolean functions systems. For the formation of students (learners) knowledge, abilities and skills needed for its successful solution necessary concepts are considered, such as the Post classes, and examples, as well as compliant abilities of instrumental monitoring program Master of Logic. The article is primarily intended for teachers of discrete mathematics, mathematical logic, artificial intelligence etc., computer science and mathematics teachers of secondary schools, students in related disciplines and pupils.

Keywords: *learning tools, mathematical logic, Boolean functions, Master of Logic*